उच्चतर माध्यमिक पाठ्यक्रम

भौतिकी (312)

1

पाठ्यक्रम समन्वयक
डॉ. आलोक कुमार गुप्त

विद्याधनम् सर्वधनं प्रधानम्

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान

(मानव संसाधन विकास मंत्रालय, भारत सरकार के अधीन एक स्वायत्त संस्था)

ए-24-25, इन्स्टीट्यूशनल एरिया, सेक्टर – 62, नोएडा -201309 (उ.प्र.)

वेबसाइटः www.nios.ac.in, टॉल फ्री नंबर 18001809393

सलाहकार समिति

डॉ. सितांशु एस. जेना
अध्यक्ष
रा.मु.वि.शि.सं, नोएडा (उ.प्र.)

डॉ. कुलदीप अग्रवाल
निदेशक (शैक्षिक)
रा.मु.वि.शि.सं, नोएडा (उ.प्र.)

डॉ. रचना भाटिया
संयुक्त निदेशक (शैक्षिक)
रा.मु.वि.शि.सं, नोएडा (उ.प्र.)

पाठ्यक्रम समिति

अध्यक्ष

प्रो. सी.के. घोष
निदेशक, एन.सी.आई.डी.ई.
इग्नू, दिल्ली

सदस्य

श्री पूरन चन्द
सुयुक्त सचिव, सी.ओ.बी.एस.ई.
नई दिल्ली-110034
पूर्व संयुक्त आयुक्त, के.वि.सं.

प्रो. बी. के. शर्मा
सेवानिवृत्त प्रोफेसर (भौतिकी)
डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी.
नई दिल्ली

श्री आर. पी. शर्मा
शिक्षा अधिकारी (से.नि.)
सी.बी.एस.ई.,
नई दिल्ली-110002

श्री कन्हैया लाल
प्रधानाचार्य (से.नि.)
शिक्षा निदेशालय, दिल्ली

डॉ. पी. के. मुखर्जी
ऐसोसिएट प्रोफेसर
देशबन्धु कॉलेज
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

स्व. श्री शेर सिंह
प्रधानाचार्य
नवयुग पब्लिक स्कूल
लोधी रोड, दिल्ली-110003

श्री जयवीर सिंह
पी.जी.टी. (भौतिकी)
होली क्रॉस स्कूल
नजफगढ़, दिल्ली-110043

डॉ. के. बी. थापा
सहायक प्रोफेसर, यू.आई.ई.टी.
छ.शा.म. विश्वविद्यालय,
कानपुर

प्रो. आर. आर. यादव
भौतिकी विभाग
इलाहाबाद विश्वविद्यालय,
इलाहाबाद-211002

प्रो. ए. के. झा
भौतिकी विभाग
वाणिज्य कॉलेज
पटना - 800016

प्रो. वी.पी. श्रीवास्तव
सेवानिवृत्त प्रोफेसर (भौतिकी)
डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी.
नई दिल्ली

प्रो. बालक दास
भौतिकी विभाग
लखनऊ विश्वविद्यालय,
लखनऊ - 226007

डॉ. आलोक कुमार गुप्त
शैक्षिक अधिकारी, भौतिक विज्ञान
रा.मु.वि.शि.सं, नोएडा (उ.प्र.)

पाठ लेखक एवं सम्पादक

प्रो. सी. के. घोष
निदेशक, एन.सी.आई.डी.ई.
इग्नू, दिल्ली

डॉ. पी. के. मुखर्जी
ऐसोसिएट प्रोफेसर, देशबन्धु कॉलेज
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

स्व. श्री शेर सिंह
प्रधानाचार्य
नवयुग पब्लिक स्कूल, लोधी रोड, दिल्ली-110003

श्री आर. एस. दास
पूर्व उपप्रधानाचार्य,
बी.आर.एम.वी.बी. उच्चतर माध्यमिक
विद्यालय, लाजपत नगर, नई दिल्ली

श्री डी. सी. पांडे
सहायक निदेशक
शिक्षा निदेशालय, दिल्ली

श्री कन्हैया लाल
प्रधानाचार्य (से.नि.)
शिक्षा निदेशालय, दिल्ली।

प्रो. वी. पी. श्रीवास्तव
सेवानिवृत्त प्रोफेसर (भौतिकी)
डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली

डॉ. एम. के. गांधी
शिक्षा अधिकारी
सी.आई.एस.सी.ई., नई दिल्ली

डॉ. आलोक कुमार गुप्त
शैक्षिक अधिकारी, भौतिक विज्ञान
रा.मु.वि.शि.सं, नोएडा (उ.प्र.)

पाठ्यक्रम समन्वयक

डॉ. आलोक कुमार गुप्त
शैक्षिक अधिकारी, भौतिक विज्ञान
रा.मु.वि.शि.सं, नोएडा (उ.प्र.)

रेखा चित्रण

श्रीकृष्णा ग्राफिक्स

सी-90, वेस्ट विनोद नगर
दिल्ली-110092

अध्यक्ष का संदेश

प्रिय शिक्षार्थी,

समाज की आवश्यकताएँ, ख़ास तौर पर विशेष समूहों की ज़रूरतें, समय के साथ-साथ बदलती रहती हैं अतएव उनकी आशाओं को पूरा करने के लिए पद्धतियों को भी बदलते रहना चाहिए। शिक्षा परिवर्तन का एक साधन है। सही तरीके की शिक्षा यदि सही समय पर दी जाए, तो उससे समाज के वैचारिक दृष्टिकोण में सकारात्मक परिवर्तन लाया जा सकता है और नई चुनौतियों का सामना करने और कठिन परिस्थितियों पर विजय हासिल करने की क्षमता प्राप्त की जा सकती है। समय-समय पर पाठ्यचर्या को अद्यतन बनाकर हम उपर्युक्त लक्ष्य को प्रभावी रूप से प्राप्त कर सकते हैं। न बदलने वाली पाठ्यचर्या से कोई उद्देश्य पूरा नहीं होता, क्योंकि यह व्यष्टि और समष्टि की तत्कालीन आवश्यकताओं और आकांक्षाओं की पूर्ति नहीं करता।

इसी उद्देश्य से देश भर के शिक्षाविद् नियमित समय अन्तराल पर एकत्रित होते हैं और आवश्यक और उपयोगी परिवर्तनों के बारे में विचार-विमर्श करते हैं। परिणामस्वरूप राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा (एनसीएफ 2005) तैयार की गई जिसमें शिक्षा के विभिन्न स्तरों प्राइमरी, प्राथमिक, माध्यमिक तथा उच्चतर माध्यमिक स्तर पर वांछित/आवश्यक शिक्षा के प्रकारों को विस्तार से प्रस्तुत किया गया।

इस रूपरेखा के साथ-साथ अन्य राष्ट्रीय तथा सामाजिक मुद्दों को ध्यान में रखकर हमने उच्चतर माध्यमिक स्तर पर भौतिकी की पाठ्यचर्या को राष्ट्रीय शैक्षणिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद (NCERT) एवं विद्यालयी शिक्षा बोर्डों का परिषद् (COBSE) द्वारा प्रदत्त सामान्य क्रोड पाठ्यचर्या के अनुसार इसे अद्यतन तथा आवश्यकता अनुरूप बनाकर संशोधित किया है। पाठ्य सामग्री निर्माण एनआईओएस के सभी मुक्त एवं दूर अधिगम प्रणाली द्वारा प्रदान किए जाने वाले कार्यक्रमों का अभिन्न और आवश्यक अंग है, इसलिए हमने अध्ययन-सामग्री को शिक्षार्थी-अनुकूल, रुचिकर और आकर्षक बनाने पर विशेष ध्यान दिया है।

मैं उन सभी विद्वानों के प्रति आभार व्यक्त करता हूँ, जिन्होंने इस सामग्री को रुचिकर और उपयोगी बनाने में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाई है। मुझे उम्मीद है कि आप इसे आकर्षक और अनुकूल पाएँगे।

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान की ओर से, मैं आपके उज्ज्वल और सफल भविष्य की कामना करता हूँ।

(डॉ. एस.एस. जेना)
अध्यक्ष
राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान

निदेशक की कलम से

प्रिय शिक्षार्थी,

स्वागतम्

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान का शैक्षिक विभाग हमेशा आपकी आवश्यकताओं के अनुरूप नए कार्यक्रम तैयार करने की कोशिश करता है। व्यापक तुलनात्मक अध्ययन के उपरांत हमने पाया कि हमारी पाठ्यचर्या अधिक कार्यात्मक, जीवन से जुड़ी हुई तथा सहज है। हमने देश के प्रमुख शिक्षाशास्त्रियों को आमंत्रित कर उनके निर्देशन में भौतिकी पाठ्यचर्या को संशोधित करके अद्यतन बनाया है।

साथ ही, हमने पुरानी तथा निरर्थक सूचनाओं को हटाकर नई तथा उपयोगी सामग्री को जोड़ा है तथा अधिगम सामग्री को आपके लिए आकर्षक और प्रभावी बनाने का प्रयास किया है।

मुझे विश्वास है कि आप इस नई सामग्री को रुचिकर और आकर्षक पाऐंगे जिसमें आपको करने के लिए बहुत से क्रियाकलाप मिलेंगे। आगे और सुधार लाने के लिए दिए गए आपके सुझावों का स्वागत है।

आपके सुखद तथा सफल जीवन की कामना करता हूँ।

(डॉ. कुलदीप अग्रवाल)
निदेशक (शैक्षिक)
राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान

शिक्षार्थी को पत्र

प्रिय शिक्षार्थी,

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान (रा.मु.वि.शि.सं.) के संशोधित भौतिकी पाठ्यक्रम में आपका स्वागत है। भौतिकी के पाठ्यक्रम को अब आठ मॉड्यूलों में बांटा गया है, जिनमें विभिन्न थीमों पर कुल मिलाकर 30 पाठ हैं। इन आठ मॉड्यूलों में मुख्यत: यांत्रिकी, विद्युत, प्रकाश तथा भौतिकी के अन्य क्षेत्रों की ऐसी आधार ज्ञान निरूपित करने वाली विषयवस्तु सम्मिलित है जिसकी अग्रणी क्षेत्रों में प्रगति करने के लिए तथा इस तथ्य के प्रति प्रशंसात्मक भाव विकसित करने के लिए आवश्यकता है कि भौतिकी अधिकांश स्थितियों में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है।

मॉड्यूल VIII में अनुप्रयोग युक्त विशिष्ट क्षेत्र, जैसे–अर्धचालक, इलेक्ट्रॉनिकी तथा संचार सम्मिलित किए गए हैं।

भौतिकी पाठ्यक्रम के तीन भाग हैं। भाग 1 तथा 2 सैद्धांतिक क्षेत्र से संबंधित हैं तथा भाग 3 में प्रायोगिक कार्य है। भाग 1 में चार मॉड्यूल समाविष्ट हैं। मॉड्यूल I में गति, बल एवं ऊर्जा से संबंधित सात पाठ हैं। मॉड्यूल II में ठोस एवं तरल पदार्थों की यांत्रिकी पर दो पाठ हैं और मॉड्यूल III में ऊष्मीय भौतिकी पर आधारित तीन पाठ हैं। मॉड्यूल IV में दोलन एवं तरंगों पर दो पाठ हैं। भाग दो में अन्य चार मॉड्यूल समाविष्ट किए गए हैं। मॉड्यूल V में विद्युत एवं चुंबकत्व से संबंधित 5 पाठ हैं, जबकि मॉड्यूल VI में प्रकाशिकी एवं प्रकाशकीय उपकरण पर चार पाठ हैं। मॉड्यूल VII में परमाणु एवं नाभिक से संबंधित चार पाठ हैं और मॉड्यूल VIII में अर्धचालक युक्तियां एवं संचार पर तीन पाठ हैं।

सार्वजनिक परीक्षाओं (पी.ई.) में पाठ्यक्रम का बोझ हल्का करने के लिए यह निश्चय किया गया है कि उच्चतर माध्यमिक भौतिकी के कुछ आधारभूत पाठों को शिक्षक अंकित मूल्यांकन पत्र (टी.एम.ए.) में मूल्यांकन हेतु रखा जाए। ये पाठ हैं–मात्रक, विभाएं एवं सदिश, समतल में गति, गुरुत्वाकर्षण, दृढ़ पिंड की गति, ठोसों के प्रत्यास्थ गुण, गैसों का अणुगति सिद्धांत, ऊष्मा संचरण एवं सौर ऊर्जा, सरल आवर्त गति, प्रकाश का परावर्तन एवं अपवर्तन, प्रकाशीय यंत्र तथा संचार प्रणालियां। मॉड्यूल VIII तक के अन्य पाठ सार्वजनिक परीक्षाओं (पी.ई.) के लिए हैं।

हम आशा करते हैं कि आप इस अधिगम सामग्री को न केवल उपयोगी पाएंगे, बल्कि स्वयं को न्यायसंगत ढंग से सोचने वाले इंसान, जो समाज में एक गुणात्मक अंतर ला सकता है, के रूप में बदलने में भी सहायक होंगे। हमें आशा है कि यह नई स्व-अधिगम सामग्री आपको भौतिकी के नए युग में ले जाएगी।

इस पाठ्यक्रम से संबंधित किसी भी प्रकार की कठिनाई या शंका समाधान के लिए हमें लिखने में संकोच न करें। हम आपके सुझावों और आलोचनाओं का भी स्वागत करते हैं, क्योंकि ये हमें भौतिकी की इस स्वअध्ययन सामग्री सुधार करने में सहायक होगी।

हम आशा करते हैं कि आप इस पाठ्यक्रम को रुचिकर पाएंगे और इसके अध्ययन में आनंद प्राप्त करेंगे।

लक्ष्य पर दृष्टि केंद्रित करें और निशाना साधे!!!

आपकी सफलता के लिए शुभकामनाएं

(डॉ. आलोक कुमार गुप्त)
पाठ्यक्रम समन्यवक, भौतिकी
ई-मेल: aophy@nios.ac.in

भौतिकी एवं इसके क्षेत्र में भारत का योगदान

भौतिक विज्ञान की वह शाखा है जिसका संबंध प्रकृति तथा द्रव्य एवं ऊर्जा के गुणों से है। भौतिकी की विषय वस्तु में शामिल है: यांत्रिकी, ऊष्मा, प्रकाश एवं अन्य विकिरण, ध्वनि, विद्युत, चुम्बकत्व एवं परमाणु संरचना। यह द्रव्य, ऊर्जा और इन दोनों के बीच की अन्योन्यक्रियाआं का वैज्ञानिक अध्ययन है।

महर्षि कणाद्, आचार्य आर्यभट्ट तथा भास्कराचार्य आदि भारतीय भूमि के प्राचीन मनीषियों ने अपने युग के अन्य दार्शनिकों की तुलना में बहुत आगे की अन्तर्दृष्टियाँ प्रस्तुत की थी। महर्षि कणाद् द्रव्य व परमाणु सिद्धान्त के प्राचीनतम समर्थकों में से एक थे और वे जगत की सभी घटनाओं को परमाणु के पदों में समझाने के लिए विख्यात थे। आचार्य आर्यभट्ट प्राचीन भारत की अप्रतिम गणितीय प्रतिभा थे जिन्होंने न केवल दिन-रात और ऋतुओं के क्रम को क्रमश: पृथ्वी की घूर्णन एवं परिक्रमण गतियों से जोड़कर व्यक्त किया था न्यूटन से बहुत पहले गुरूत्व बल की संकल्पना भी दी थी। भास्कर आचार्य एक असाधारण गणितज्ञ थे जिन्होंने किसी भी समय किसी भी खगोलिक पिंड की स्थिति के परिकलन के नियम निर्धारित किए थे। उनकी परिकलन विधियाँ भारत के कुछ भागों में आज भी प्रचलित हैं।

भौतिकी हमेशा से एक प्रेरणादायी विषय रहा है। तथापि 20वीं शताब्दी के पूर्वार्द्ध में द्रुत क्रम में हुई मूलभूत खोजों ने हमारी दिक्काल, द्रव्य और ऊर्जा संबंधी संकल्पनाओं में आमूलचूल परिवर्तन ला दिया। पूर्ववर्ती शताब्दी का एकअन्य बड़ा लक्षण किसी नई खोज और उसके अनुप्रयोगों के बीच उत्तरोत्तर घटता समय अन्तराल रहा है जो शताब्दियों से घट कर मात्र कुछ वर्ष रह गया है। यह विज्ञान और प्रौद्योगिकी के बीच निकट संबंध बन जाने के कारण ही हो सका। इसलिए यह स्वाभाविक ही है कि ज्ञान-समाज का भावी विकास, उद्यम-क्षमताओं से सन्नद्ध, सुप्रशिक्षित वैज्ञानिक मानव संसाधनों की उपलब्धता पर बड़े परिमाण में निर्भर करेगा। भौतिकी का अध्ययन करने, इस विषय में अच्छे परिणाम लाने और संपोष्य राष्ट्रीय वृद्धि और विकास के प्रक्रम में भाग लेने के लिए यह पर्याप्त बड़ा प्रेरणा स्रोत होना चाहिए।

आधुनिक काल में भी भारतीय भौतिकीविदों एवं अविष्कारकों के रूप में अनेक ऐसी प्रतिभाएं प्रकट हुई जिन्होंनें भौतिकी के विभिन्न क्षेत्रों में अपना सिक्का जमाया। इनमें से अनेक ने विश्व के विभिन्न भागों मे प्रौन्नत वैज्ञानिक अनुसंधान में महत्वपूर्ण योगदान किया।

प्रो सी. वी. रमण (जिन्हें उनके रमन प्रभाव के लिए 1930 का भौतिकी का नोबेल पुरस्कार मिला), प्रो. होमी जहाँगीर भाभा (भारतीय परमाणु ऊर्जा कार्यक्रम के मुख्य शिल्पी के रूप में विख्यात), प्रो. मेघनाद साहा (खगोलभौतिकीविद् जिन्होंने तारों की रासायनिक और भौतिक दशाओं की व्याख्या के लिए साहा समीकरणें प्रस्तुत की), डॉ. जगदीश चन्द्र बोस (रेडियो एवं माइक्रोवेव प्रकाशिकी अनुसंधान के अग्रदूत) प्रो. सत्येन्द्र नाथ बोस (अल्बर्ट आइन्सटाइन के साथ मिलकर विद्युत चुम्बकीय विकिरणों

के गैस वत् व्यवहार संबंधी एक सिद्धान्त के विकास के लिए प्रसिद्ध), डॉ. सुब्रमण्यम् चन्द्रशेखर (भारी तारों की विकास अवस्थाओं संबंधी अनुसंधान के लिए 1983 के नोबेल पुरस्कार विजता), डा. प्रशान्त चन्द्र महालनोविस (भारतीय सांख्यिकीय संस्थान के संस्थापक), डा. विक्रम साराभाई, प्रो. सतीश धवन, प्रो. के.एस. कृष्णन, प्रो. डी.एस. कोठारी, प्रो. जे.वी. नार्लीकर, प्रो. ई.सी.जी. सुदर्शन, प्रो. अशोक सेन, प्रो. राजा समन्ना, डॉ. ए.पी.जे. अब्दुल कलाम (पूर्व राष्ट्रपति, भारत तथा भारत में मिसाइल एवं नाभिकीय अस्त्र कार्यक्रमों के विकास में अपनी निर्णायक भूमिका के लिए प्रसिद्ध) तथा ऐसे अनेक सम्मानित भौतिकीविद् रहे हैं जिन्होंने न केवल हमारे राष्ट्रीय वैज्ञानिक संस्थानों के निर्माण में बल्कि वैश्विक विज्ञान के विकास में भी अपना बहुमूल्य योगदान किया है। आज वैज्ञानिक विकास के लिए अन्तर्राष्ट्रीय सहयोग को आमंत्रित किया जा रहा है। हमारे अनेक भौतिकीविद् इन अन्तर्राष्ट्रीय प्रयासों का हिस्सा हैं।

प्रक्रिया का ज्ञान अर्थात बिना संकल्पना पर पकड़ बनाए केवल उत्तर पाने के लिए समस्या को हल करना काफी नहीं है। उच्चतर माध्यमिक स्तर पर भौतिकी को बेहतर ढ़ंग से समझने के लिए आप को प्रक्रियात्मक और संकल्पनात्मक दोनों ही प्रकार के ज्ञान को विकसित करने की आवश्यकता होगी। स्व-शिक्षार्थी के रूप में आपको एकलव्य जैसी जिज्ञासा, लगन, अध्यवसाय एवं क्षमता का प्रदर्शन करना होगा। आत्मविश्वास और विज्ञान सीखने में सच्ची रूचि, उत्साही और अपनी पहल पर सफल स्वतंत्र शिक्षार्थी बनने के लिए आवश्यक कौशलों के विकास में सहायक होंगे। अनुभव दर्शाता है कि मिलजुल कर सीखने से बेहतर परिणाम प्राप्त होते हैं।

भौतिकी आपके भावी वृत्तिक जीवन के लिए एक मजबूत सहारा साबित हो सकती है। अनेक विश्वविद्यालयी स्नातक पाठ्यक्रमों के लिए भौतिकी एक पूर्व आवश्यकता होती है। जो शिक्षार्थी भौतिकी को गंभीरता से न लेने की गलती करते हें अथवा माध्यमिक एवं उच्चतर माध्यमिक स्तरों पर इसकी उपेक्षा करते हैं, वे अपने भावी जीवन में ऐसे अनेक वृत्तिक अवसर खो देते हैं जो अन्यथा उन्हें मिल सकते थे। भावी वृत्ति की दृष्टि से भौतिकी के महत्व पर जितना भी बल दिया जाए कम है। आगे दिए गए विषयों में अर्थात भौतिक विज्ञानों, जीवन एवं स्वास्थ्य विज्ञानों, अन्तरिक्ष एवं संचार अभियांत्रिकी एवं तकनीकी विज्ञानों जैसे कंप्यूटर विज्ञान, नेटवर्किंग, सॉफ्टवेयर विकास आदि में डिग्री प्राप्त करने के लिए आपको भौतिकी का अच्छा ज्ञान होना आवश्यक है। उच्चतर माध्यमिक स्तर पर भौतिकी सीखने से निम्नलिखित क्षेत्रों में वृत्ति चुनने में सहायता मिल सकती है:

- भौतिकी शिक्षक अथवा लेक्चर
- वैज्ञानिक या अन्वेषक
- अभियांत्रिकी और प्रौद्योगिकी
- भारतीय स्थल सेना/भारतीय वायु सेना/भारतीय जल सेना
- सेवा चयन आयोग (एस.एस.सी.)
- मानव संसाधन एवं प्रशासन में कंप्यूटन एवं अन्य वृत्तियाँ

अपने पाठ कैसे पढ़ें

आपकी अध्ययन सामग्री का विकास मुक्त एवं दूरस्थ-अध्ययन के भौतिकी विशेषज्ञों के एक दल द्वारा किया गया है। स्व: अध्ययन के लिए इसमें एक सुसंगत प्रारुप का अनुसरण किया गया है। निम्नलिखित बिन्दु आपको सुझायेंगे कि इस मुद्रित सामग्री का सर्वोत्तम उपयोग आप कैसे कर सकते हैं।

शीर्षक *एक अग्रिम संगठक है और पाठ की विषय-वस्तु का आभास आपको देता है। इस पर विचार कीजिए।*

प्रस्तावना *पाठ की विषय वस्तु को उकेरती है और आपके पूर्व ज्ञान एवं आसपास के वातावरण में घटती प्राकृतिक परिघटनाओं से उसको जोड़ती है। इसे अच्छी तरह पढ़िए।*

उद्देश्य *विषय वस्तु को पाठ पढ़ लेने के पश्चात आपकी वांछित उपलब्धियों के साथ जोड़ते हैं। इन्हें याद रखिए।*

विषय वस्तु *को पाठ में दी गई अवधारणाओं में अन्तर्निहित एकता को ध्यान में रखते हुए खंडों एवं उप खंडों में बाँट कर प्रस्तुत किया गया है। पाठ्य वस्तु को ध्यान से पढ़िए और पृष्ठ पर छोड़े गए हाशिए में टिप्पणियाँ लिखिए। एक खण्ड पूरा कर लेने के पश्चात् इससे संबंधित पाठ्गत प्रश्नों के उत्तर दीजिए एवं आंकिक प्रश्न स्वयं हल कीजिए। इससे आपको अपने बोध स्तर को जाँचने का अवसर मिलेगा। आपको एक खण्ड को तब तक बार-बार पढ़ना चाहिए जब तक कि आपको इस पर अधिकार प्राप्त न हो जाय।*

कुछ स्थानों पर आपको विषय वसतु ***तिरछे अक्षरों या मोटे अक्षरों*** *में लिखी मिलेगी। यह इस बात का सूचक है कि यह महत्वपूर्ण अवधारणा है। इन्हें याद कीजिए।*

साधित प्रश्न *आपको अवधारणाओं को समझने तथा विचारों को सुनिश्चित करने में सहायता करेंगे। वास्तव में समस्याओं को हल करना भौतिकी-प्रशिक्षण का एक अनिवार्य अंग है। इनको स्वयं हल कीजिए और किसी दिए गए उदाहरण में पढ़ायी जानेवाली अवधारणा पर ध्यान दीजिए।*

कार्यकलाप *सरल प्रयोग है जो आप आसानी से उपलब्ध (कम खर्च वाले) पदार्थों का उपयोग कर घर पर या कार्य-स्थल पर आसानी से कर सकते हैं। इनके द्वारा आप भौतिकी को करके सीख सकेंगे। इनको स्वयं कीजिए और प्रेक्षणों व अपने निष्कर्षों में संबंध स्थापित कीजिए।*

पाठगत प्रश्न *प्रत्येक खण्ड में विवेचित अवधारणों पर आधारित हैं। इन प्रश्नों के उत्तर प्रश्न के नीचे छोड़े गये स्थान पर लिखिए और अपने उत्तरों को पाठ के अंत में दिये गये संक्षिप्त उत्तरों से मिलाइए। यह आपको अपनी प्रगति का बोध करायेंगे। यदि आप अपने उत्तरों की गुणता एवं सत्यता से संतुष्ट नहीं है तो पीछे लौटिए और उस खण्ड को फिर से पढ़िए।*

आपने क्या सीखा *अनिवार्यत: अध्ययन बिन्दुओं के द्रुत पुनरावर्तन के लिए दिया गया सार है। आप चाहें तो इस सूचि में अन्य बिन्दु जोड़ सकते हैं।*

पाठांत अभ्यासों *लघु, दीर्घ एवं आंकिक प्रश्नों विषय का एक संदर्श प्राप्त करने में आपकी सहायता करेंगे। इनका सावधानी पूर्वक अभ्यास कीजिए। अपने सहपाठियों या परामर्शदाताओं से इन पर चर्चा कीजिए।*

पाठगत प्रश्नों के उत्तर : *इनकी सहायता से आप जान सकेंगे कि आपने पाठगत प्रश्नों के जो उत्तर दिए है वह कितने सही हैं।*

ऑडियो: *कठिन या अमूर्त अवधारणाओं को ठीक से समझने के लिए कुछ विषय क्षेत्रों में ऑडियो कार्यक्रम उपलब्ध है। आप इनको FM के ज्ञानवाणी पर सुन सकते हैं या रा.मु.वि.शि.सं. के मूल्यांकित प्रकाशनों के एकक से संहत डिस्को के रुप में खरीद सकते हैं।*

विडियो: *आपके विषय से संबंधित कुछ अंशो को स्पष्ट करने के लिए विडियो कार्यक्रम बनाए गए हैं। आप इनको अपने अध्ययन केन्द्र पर देख सकते हैं या रा.मु.वि.शि.सं. के मूल्यांकित प्रकाशनों के एकक से संहत डिस्कों के रुप में खरीद सकते हैं।*

www

www द्वारा संसूचित कुछ चुनी गई वेबसाइट हैं जिनको आप अतिरिक्त ज्ञान प्राप्त करने के लिए देख सकते हैं।

दूर बैठे अध्ययन स्वत: प्रेरणा, आत्म-अनुशासन एवं आत्म नियंत्रण के आधार पर ही हो पाता है। अत: आपको नियमित अध्ययन का स्वभाव बनाना चाहिए। इस प्रयास में एक दैनिक कार्यक्रम बनाना लाभदायक होगा। अपने अध्ययन के लिए घर में एक ऐसा स्थान निर्धारित कर लीजिए जहाँ हवा और रोशनी ठीक से उपलब्ध हो। परन्तु, वहाँ शोर नहीं होना चाहिए ताकि अध्ययन के समय आपका ध्यान भंग न हो।

उच्चतर माध्यमिक पाठ्यक्रम

विषय सामग्री पर एक विहंगम दृष्टि

मॉड्यूल	पाठ संख्या	पाठ का नाम	मूल्यांकन का प्रकार टी.एम.ए./पी.ई.	
मॉड्यूल-I **गति, बल एवं ऊर्जा**	01	मात्रक, विमाएं एवं सदिश	टी.एम.ए.	
	02	सरल रैखिक गति	टी.एम.ए.	
	03	गति के नियम		पी.ई.
	04	समतल में गति	टी.एम.ए.	
	05	गुरुत्वाकर्षण	टी.एम.ए.	
	06	कार्य, ऊर्जा और शक्ति		पी.ई.
	07	दृढ़ पिंड की गति	टी.एम.ए.	
मॉड्यूल-II **ठोसों एवं तरलों की यांत्रिकी**	08	ठोस के प्रत्यास्थ गुण	टी.एम.ए.	
	09	तरल पदार्थों के गुण		पी.ई.
मॉड्यूल-III **ऊष्मीय भौतिकी**	10	गैसों का अणुगतिक सिद्धांत	टी.एम.ए.	
	11	ऊष्मागतिकी		पी.ई.
	12	ऊष्मा स्थानान्तरण एवं सौर ऊर्जा	टी.एम.ए.	
मॉड्यूल-IV **दोलन एवं तरंगे**	13	सरल आवर्त गति	टी.एम.ए.	
	14	तरंग परिघटनाएं		पी.ई.
मॉड्यूल-V **विद्युत एवं चुम्बकत्व**	15	विद्युत आवेश एवं विद्युत क्षेत्र		पी.ई.
	16	विद्युत विभव एवं संधारित्र		पी.ई.
	17	विद्युत धारा		पी.ई.
	18	विद्युत चुंबकत्व तथा विद्युतधारा के चुंबकीय प्रभाव		पी.ई.
	19	विद्युत चुम्बकीय प्रेरण तथा प्रत्यावर्ती धारा		पी.ई.
मॉड्यूल-VI **प्रकाशिकी एवं प्रकाशिक यन्त्र**	20	प्रकाश का परावर्तन और अपवर्तन	टी.एम.ए.	
	21	प्रकाश का विक्षेपण एवं प्रकीर्णन		पी.ई.
	22	तरंग परिघटना एवं प्रकाश		पी.ई.
	23	प्रकाशीय यंत्र	टी.एम.ए.	
मॉड्यूल- VII **परमाणु एवं नाभिक**	24	परमाणु की संरचना		पी.ई.
	25	विकिरण एवं द्रव्य की द्वैती प्रकृति		पी.ई.
	26	नाभिक और रेडियोधर्मिता		पी.ई.
	27	नाभिकीय विखंडन एवं संलयन		पी.ई.
मॉड्यूल- VIII **अर्द्धचालक युक्तियाँ एवं संचार**	28	अर्द्धचालक एवं अर्द्धचालक युक्तियाँ		पी.ई.
	29	अर्द्धचालक युक्तियों के अनुप्रयोग		पी.ई.
	30	संचार तंत्र	टी.एम.ए.	

कुल पाठ = **30**

शिक्षक अंकित मूल्यांकन पत्र के पाठ (टी.एम.ए.) = **12**

सार्वजनिक परीक्षाओं के पाठ (पी.ई.) = **18**

विषय सूची

मॉड्यूल - 1

गति, बल एवं ऊर्जा

पाठ्यक्रम (Curriculum)

औचित्य

भौतिकी एक मौलिक विज्ञान है क्योंकि यह विश्व के अभिलक्षणों जैसे समय, अंतरिक्ष, गति, आवेश, द्रव्य और विकिरण से संबंध रखता है। प्राकृतिक विश्व की प्रत्येक घटना के कुछ पहलू ऐसे हैं, जिनका इनके संदर्भ में अवलोकन किया जा सकता है। भौतिकी का अध्ययन केवल आवश्यक रूप से भौतिक शास्त्री बनने के विचार से न करके प्रकृति को तर्कसंगत आधार पर समझने का माध्यम हो सकता है। कम्प्यूटर, इंटरनेट, रॉकेट–प्रक्षेपण, उपग्रह, रेडियो, टीवी, संचार, लेजर आदि सभी तकनीकी विकासों की आधारशिला भौतिकी ही है। मनुष्य की विभिन्न सामान्य गतिविधियों जैसे भार उठाने और लंबी कूद में भी इसका उपयोग है। इस प्रकार भौतिकी एक सर्वव्यापी विज्ञान है और इसका अध्ययन हमारे जीवन से जुड़ी गतिविधियों से संबंधित क्यों और कैसे जैसे प्रश्नों का समुचित उत्तर पाने में सहायक है।

स्कूली शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यक्रम प्रारूप में विशेष रूप से उल्लेख किए गए मुद्दों को ध्यान में रखते हुए ही भौतिकी का पाठ्यक्रम इस प्रकार विकसित किया गया है कि यह केवल भौतिकी की मूलभूत संकल्पनाओं का ही उल्लेख नहीं करता वरन् उनका दैनिक जीवन की गतिविधियों से भी संबंध स्थापित करता है। भौतिकी के नियमों का उपयोग और उनके दैनिक जीवन में प्रभाव को पाठ्यक्रम में विशेष स्थान प्राप्त है। भौतिकी की विषयवस्तु, जिससे सभी और विशेष रूप से भौतिकी को अपनी जीवनवृत्ति के रूप में अपनाने के इच्छुक लोग हो सकते हैं, को पाठ्यक्रम का सारभाग बनाया गया है। इसके अलावा पाठ्यक्रम में इलेक्ट्रॉनिक्स, संचार, नाभिकीय भौतिकी जैसे विषयों को शामिल किया गया है, जिनका दैनिक जीवन में बहुत बड़ा उपयोग है।

यद्यपि गणित भौतिकी के बहुत से कठिन प्रश्नों को समझने के लिए एक महत्त्वपूर्ण आधार है तथापि समाकलन एवं अवकलन जैसे कठिन गणितीय आधारों को प्रयोग में न लाकर गणितीय गणनाओं की बजाय भौतिकी की संकल्पनाओं के स्पष्टीकरण पर जोर दिया गया है।

पाठ्यक्रम के उद्देश्य

उच्चतर माध्यमिक भौतिकी पाठ्यक्रम का उद्देश्य शिक्षार्थी को निम्न बातों में सक्षम बनाना है

- भौतिकी की संकल्पनाओं, मूलभूत सिद्धांतों, नियमों और प्रक्रियाओं के बारे में ज्ञान एवं बोध प्राप्त करना ताकि भौतिक घटनाओं के कारणों व प्रभावों का अंतर्संबंध समझा जा सके;
- जीवन स्तर सुधारने में भौतिकी के योगदान का महत्त्व समझना;
- भौतिकी में रुचि उत्पन्न करना और जिज्ञासा का भाव जगाना;
- व्यक्तियों की कार्य क्षमता सुधार कर उनको व्यवसाय से संबंधित कार्यों को निपुणता से करने योग्य बनाना;

इस प्रक्रिया के अंग रूप में इस पाठ्यक्रम का उद्देश्य शिक्षार्थी में निम्नलिखित योग्यताएं विकसित करना भी है–

- प्रायोगिक निपुणताएं जैसे प्रेक्षण लेना, उपकरणों का परिचालन एवं प्रेक्षणों तथा प्रायोगिक निष्कर्षों की रिपोर्टिंग का संप्रेषण–नैपुण्य।

- प्रश्नों को हल करने की क्षमता उदाहरण के तौर पर एक स्थिति या आंकड़ों के विश्लेषण के कारण व प्रभाव के बीच संबंध स्थापित करने कीक्षमता।
- वैज्ञानिक दृष्टिकोण का विकास जिससे निर्णयों का आधार सत्यापित तथ्य हों न कि केवल राय, साथ ही नई अवधारणाओं एवं खोजों को स्वीकार करने की इच्छा का होना।
- वैज्ञानिक ज्ञान के संभावित दुरुपयोग के विषय में जानकारी।

पाठ्यक्रम की संरचना

उच्चतर माध्यमिक स्तर की भौतिकी में सिद्धांत और प्रयोग दोनों घटक है;

(i) भौतिकी पाठ्यचर्या के सैद्धांतिक भाग में आठ मॉड्यूल सम्मिलित है जिनमें भौतिकी की वे आधारभूत संकल्पनाएं और परिघटनाएं शामिल हैं, जो इस स्तर पर शिक्षार्थी को जाननी चाहिए। इन आठ मॉड्यूलों में मुख्य रूप से भौतिकी, विद्युत, प्रकाश आदि विषय हैं और वे भाग भी हैं जो कि अधिक अग्रवर्ती भौतिकी के क्षेत्र में प्रवेश के लिए न्यूनतम जानकारी प्रदान करते हैं और जिनसे इस बात की महत्ता समझी जा सकती है कि भौतिकी बहुत-सी स्थितियों में एक महत्त्वूपर्ण भूमिका निभाती है। मॉड्यूल आठ में अनुप्रयोग आधारित अर्धचालक, इलेक्ट्रॉनिकी एवं संचार जैसे विशिष्ट क्षेत्र शामिल हैं। विभिन्न मॉड्यूलों के लिए निर्धारित अंक और उनके अध्ययन के लिए अनुमानित समय नीचे सारणी में दिया गया है–

मॉडयूल का नाम	अंक	न्यूनतम अध्ययन की अवधि (घंटे)
1. गति, बल एवं ऊर्जा	14	45
2. ठोस एवं तरल पदार्थों की यांत्रिकी	06	20
3. ऊष्मा भौतिकी	06	25
4. दोलन और तरंगें	06	20
5. विद्युत और चुंबकत्व	16	45
6. प्रकाशिकी और प्रकाशिकी उपकरण	14	25
7. परमाणु और नाभिक	08	25
8. अर्धचालक युक्तियां और संचार	10	35
कुल	**80**	**240**

(ii) भौतिकी में प्रयोग

भौतिकी में प्रयोग एक अनिवार्य अवयव के रूप में है। सत्रांत परीक्षा में इसके लिए 20 प्रतिशत अंक निर्धारित हैं। उन प्रयोगों एवं क्रियाओं की सूची पाठ्यक्रम में दी गई है, जो कि विद्यार्थियों द्वारा संपन्न किए जाने है।

मॉड्यूल 1 : गति, बल एवं ऊर्जा

प्रस्तावना : सार्वत्रिक मानक मात्रकों की विशेषता बतलाने के साथ-साथ विमाओं और सदिशों के अनुप्रयोगों का भी इस मॉड्यूल में सविस्तार वर्णन किया गया है। भौतिकी का विस्तार-क्षेत्र, मापन की आवश्यकता, गति और विराम की अवधारणा व गति के कारण और विभिन्न प्रकार की गतियों का दैनिक जीवन के उदाहरणों की सहायता से वर्णन किया गया है। गुरुत्व का महत्त्व, कार्य व ऊर्जा की संकल्पना का विशेष उल्लेख किया गया है। दृढ़ पिंडों की गति के आधारभूत तथ्यों व घूर्णन गति की दैनिक जीवन में महत्ता भी समझाई गई है।

1. इकाई 1.1 : मात्रक, विमाएं एवं सदिश

- भौतिक जगत एवं मापन
- भौतिकी का प्रभाव क्षेत्र एवं आनंद
- भौतिकी के नियमों की प्रकृति
- भौतिकी, प्रौद्योगिकी एवं समाज
- मापन की आवश्यकता
- मापन के मात्रक-मूल एवं व्युत्पन्न
- मात्रक प्रणालियां, SI मात्रक
- द्रव्यमान, लंबाई और समय का मापन
- मात्रकों के अपवर्त्य एवं अनुवर्त्य
- मापक यंत्रों की यथार्थता
- मापनों में त्रुटि
- सार्थक अंक
- भौतिक राशियों की विमाएं
- विमीय सूत्र एवं विमीय समीकरण
- विमाओं के अनुप्रयोग
- सदिश और अदिश
- सदिश और उनका ग्राफीय निरुपण
- सदिशों को जोड़ना और घटाना
- सदिशों का दो दिशाओं (लंबवत) में वियोजन
- इकाई सदिश
- अदिश एवं सदिश गुणन

सहायक दृश्य (वीडियो) कार्यक्रम

1. मात्रक, विमाएं एवं सदिश भाग-1
2. मात्रक, विमाएं एवं सदिश भाग-2

2. इकाई 1.2 सरल रैखिक गति

- स्थिति, दूरी और विस्थापन, स्थिति सदिश एवं विस्थापन सदिश
- चाल, वेग और त्वरण
- औसत और तात्क्षणिक वेग

सहायक दृश्य (वीडियो) कार्यक्रम

1. सरल रैखिक गति भाग-1

1. सरल रैखिक गति भाग-2

- अवकलन एवं समाकलन की प्राथमिक संकल्पनाएं
- आपेक्षिक गति
- स्थिति–समय एवं वेग–समय ग्राफ
- समान एवं समान रूप से त्वरित गति
- गुरुत्व के अधीन गति सहित स्थिर त्वरण युक्त गतियों के समीकरण

3. इकाई 1.3 न्यूटन के गति के नियम

- बल व जड़त्व की अवधारणा
- गति का प्रथम नियम
- संवेग की अवधारणा
- गति का दूसरा नियम
- गति का तीसरा नियम
- आवेग
- रैखिक संवेग का संरक्षण नियम एवं उसके अनुप्रयोग
- संकेंद्री बलों का संतुलन
- घर्षण स्थैतिक और गतिज, घर्षण को प्रभावित करने वाले कारक
- घर्षण का महत्त्व और घर्षण कम करने के उपाय
- बल निर्देशक आरेख तकनीक
- जड़त्वीय एवं अजड़त्वीय निर्देशांक अक्षों का प्रारंभिक ज्ञान

4. इकाई 1.4 : समतल में गति

- प्रक्षेप्य गति (उड्डयन–काल, परास और अधिकतम ऊंचाई)
- प्रक्षेप्य का प्रक्षेप पथ
- एक समान वृत्तीय गति
- अभिकेंद्रीय त्वरण
- दैनिक जीवन में वृत्तीय गति
- ऊर्ध्वाधर वृत्ति में गति

5. इकाई 1.5 : गुरुत्वाकर्षण

- सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण का नियम
- गुरुत्व जनित त्वरण तथा पृथ्वी पर ऊंचाई, गहराई और अक्षांसों के साथ इसके मान में परिवर्तन (केवल सूत्र)

- कैपलर के ग्रहीय गति के नियम (कोई व्युत्पत्ति अवकलन नहीं)
- ग्रहों की गति-कक्षीय वेग और पलायन वेग
- उपग्रह-भूतुल्यकाली और ध्रुवीय
- गुरुत्त्वीय विभव एवं गुरुत्त्वीय स्थितिज ऊर्जा
- अंतरिक्ष अन्वेषण के क्षेत्र मे भारत की उपलब्धियां
- उपग्रहों के अनुप्रयोग

6. इकाई 1.6 : कार्य, ऊर्जा एवं शक्ति

- एक नियत बल द्वारा किया गया कार्य
- एक परिवर्तनशील बल द्वारा किया गया कार्य (ग्राफ-विधि) स्प्रिंग के उदाहरण सहित
- कार्य ऊर्जा प्रमेय
- संरक्षी और असंरक्षी बल
- यांत्रिक ऊर्जा (गतिज और स्थितिज ऊर्जाएं) उदाहरण सहित
- ऊर्जा संरक्षण (स्प्रिंग, पेंडुलम आदि)
- प्रत्यास्थ एवं अप्रत्यास्थ संघट्ट
- शक्ति और इसके मात्रक

सहायक दृश्य (वीडियो) कार्यक्रम

1. कार्य, ऊर्जा और शक्ति भाग-1
2. कार्य, ऊर्जा और शक्ति भाग-2

7. इकाई 1.7 : कणों के निकाय अथवा दृढ़ पिंड की गति

- दृढ़ पिंड की गति, द्रव्यमान केंद्र, युग्म, बल-आघूर्ण
- जड़त्व-आघूर्ण, परिभ्रमण-त्रिज्या और इसकी सार्थकता
- जड़त्व-आघूर्ण संबंधी समांतर अक्षीय एवं लंबवत अक्षीय प्रमेय और साधारण प्रकरणों में उनका उपयोग (कोई व्युत्पत्ति नहीं)
- घूर्णनकारी पिंड का संतुलन
- समान चाल से घूर्णन कर रहे दृढ़ निकाय के लिए समीकरण (कोई व्युत्पत्ति नहीं)
- कोणीय संवेग और कोणीय संवेग संरक्षण का नियम साधारण अनुप्रयोगों के साथ
- एक साथ होने वाली घूर्णन और स्थानांतरीय गतियां उदाहरण सहित (गेंद, बेलन, गतिपालक चक्र की नत समतल पर गति)
- घूर्णन ऊर्जा

मॉड्यूल 2 : ठोस एवं तरल पदार्थों की यांत्रिकी

प्रस्तावना : वस्तुओं का ठोस, द्रव और गैसों में वर्गीकरण अंतरआण्विक बलों के आधार पर किया जाता है। इस मॉड्यूल में ठोसों की प्रत्यास्थता की व्याख्या की गई है और साथ ही ठोसों के प्रत्यास्थ व्यवहार के सामान्य अनुप्रयोगों की भी विशेष व्याख्या की गई है। तरलों के यांत्रिक गुणों जैसे उत्प्लावन, पृष्ठ तनाव, केशिकाषर्ण आदि की दैनिक जीवन के उदाहरणों द्वारा व्याख्या की गई है और उनके अनुप्रयोगों का विशेष उल्लेख किया गया है।

8. इकाई 2.1 : ठोस पदार्थों के प्रत्यास्थ गुण

- प्रत्यास्थ व्यवहार एवं हुक का नियम, प्रतिबल-तन्यता वक्र
- अंतर-आण्विक बल
- यंग नियतांक, आयतन प्रत्यास्थत, गुणांक, दृढ़तांक, संपीड्यता
- प्वासों अनुपात
- ठोसों के प्रत्यास्थ व्यवहार के कुछ अनुप्रयोग जैसे कैन्टीलीवर, गर्डर (धरन) आदि
- प्रत्यास्थ ऊर्जा

9. इकाई 2.2 : तरलों के गुण

- द्रवस्थैतिक दाब और उत्प्लावकता
- पास्कल का नियम और इसके अनुप्रयोग
- ससंजन और आसंजन बल
- पृष्ठ तनाव और पृष्ठीय ऊर्जा
- स्पर्श कोण और केशिका क्रिया
- पृष्ठ तनाव के अनुप्रयोग, बूंदे, बुलबुले और डिटरजेंट्स
- तरलों के प्रवाह के प्रकार
- रेनॉल्ड संख्या
- श्यानता और स्टोक का नियम,
- अंत्य वेग
- बर्नोली का प्रमेय (कोई व्युत्पत्ति नहीं) और इसके अनुप्रयोग

मॉड्यूल 3 : ऊष्मा भौतिकी

प्रस्तावना : तापीय ऊर्जा सिद्धांत पर चर्चा की गई है। गैसों के अणुगति सिद्धांत के आधार पर गैसों के व्यवहार और गैस नियमों का वर्णन किया गया है। ताप की संकल्पना, ऊष्मागतिकी के नियमों और उनके हमारे दैनिक जीवन में अनुप्रयोगों के बारे में इस मॉड्यूल में बताया गया है। कृष्णिका विकिरण, ऊष्मा इंजनों एवं रेफ्रीजिरेटर की कार्यप्रणाली

की व्याख्या की गई हैं। विविध प्रणालियों द्वारा ऊष्मा का स्थानांतरण और उनके विविध परिस्थितियों में अनुप्रयोगों पर विशेष जोर दिया गया है। ऊष्मीय प्रदूषण और ग्रीन हाउस प्रभाव के बारे में भी इस मॉड्यूल में विचार किया गया है।

10. इकाई 3.1 : गैसों का अणुगतिक सिद्धांत

- तापीय ऊर्जा
- ऊष्मा, ताप, ठोसों, द्रवों और गैसों में तापीय प्रसार
- कैलॉरीमिति, असामान्य प्रसार और इसके प्रभाव
- गैसों का अणुगति सिद्धांत
- संबंध $PV = \frac{1}{3} mn \overline{c^2}^2$ की व्युत्पत्ति
- अणुगति सिद्धांत के आधार पर गैसों के व्यवहार संबंधी नियमों का निगमन
- आदर्श गैस अवस्था समीकरण
- गतिज ऊर्जा और ताप में संबंध
- स्वातंत्र्य कोटि और ऊर्जा सम विभाजन नियम
- गैसों की विशिष्ट ऊष्मा और C_P और C_v के बीच संबंध
- माध्य मुक्त पथ की अवधारणा और एवोगैड्रो संख्या

सहायक दृश्य (वीडियो) कार्यक्रम

1. ऊष्मीय भौतिक एवं इसके अनुप्रयोग

11. इकाई 3.2 : ऊष्मा गतिकी

- ऊष्मीय साम्य, ऊष्मागतिकी का शून्य कोटि नियम और ताप की अवधारणा
- ऊष्मागतिक चर एवं ऊष्मागतिक-साम्य
- ऊष्मा गतिक प्रक्रम-समतापी, रूद्धोष्म, उत्क्रमीणय, अनुत्क्रमणीय और चक्रीय प्रक्रम
- ऊष्मा, कार्य एवं आंतरिक ऊर्जा, ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम
- सूचक-आरेख, गुप्त ऊष्मा, त्रिक् बिंदु
- कार्नो चक्र और इसकी क्षमता-ऊष्मागतिकी का दूसरा नियम
- ऊष्मीय इंजन और रेफ्रीजिरेटर
- कार्नो इंजन की सीमाएं

12. इकाई 3.3 : ऊष्मा संचरण एवं सौर ऊर्जा

- ऊष्मा स्थानांतरण की विधियां, चालन, संवहन और विकिरण
- कृष्णिका विकिरण और किरखौफ का नियम, अवशोषण एवं उत्सर्जन क्षमता
- वीन का विस्थापन नियम
- स्टीफन का नियम
- सौर ऊर्जा
- सौर नियतांक
- ग्रीन हाऊस प्रभाव
- न्यूटन का शीतलन नियम

मॉड्यूल 4 : दोलन एवं तरंगें

प्रस्तावना : आवर्ती गति से जुड़े पदों की व्याख्या के साथ सरल आवर्त गति का वर्णन सामान्य उदाहरणों की सहायता से किया जाएगा। प्रणोदित दोलनों, अनुनाद और अवमंदित दोलनों को भी इस मॉड्यूल में गुणात्मक रूप में प्रस्तुत किया जाएगा।

13. इकाई 4.1 : सरल आवर्त गति

- आवर्त गति–आयाम, आवर्तकाल, आवृत्ति और कला
- संदर्भ वृत्त और सरल आवर्त गति समीकरण
- समय के फलन के रूप में विस्थापन – आवर्ती फलन
- स्प्रिंग–द्रव्यमान तंत्र और सरल लोलक के उदाहरण
- SHM में ऊर्जा – गतिज एवं स्थितिज
- अवमंदित दोलन (कोई व्युत्पत्ति नहीं)
- प्रणोदित दोलन और अनुनाद (कोई व्युत्पत्ति नहीं)

14. इकाई 4.2 : तरंग परिघटनाएं

- तरंग निर्माण एवं संचरण
- तरंग दैर्ध्य, आवृत्ति, चाल और उनके संबंध
  तरंग आयाम और तरंग समीकरण
- अनुदैर्ध्य और अनुप्रस्थ तरंगें

सहायक दृश्य (वीडियो) कार्यक्रम

1. ध्वनि एवं तरंगें

- सरल आवर्ती गति का समीकरण
- एक माध्यम में तरंग गति और उसकी चाल के लिए सूत्र
- किसी गैस में ध्वनि की गति को प्रभावित करने वाले कारक
- तरंगों का अध्यारोपण-तरंगों का व्यतिकरण
- तरंगों का परावर्तन एवं अपवर्तन
- अप्रगामी तरंगें और विस्पंद (केवल गुणात्मक विवेचन)
- संगीत स्वरों के अभिलक्षण (अधिस्वरक और प्रसंवादी)
- श्रव्यता देहली, ध्वनि-तीव्रता और ध्वनि प्रदूषण
- विद्युत चुंबकीय तरंगें और उनके गुण
- विद्युत चुंबकीय तरंग वर्णक्रम
- डॉप्लर प्रभाव और इसके अनुप्रयोग (केवल गुणात्मक)
- प्रकाश की चाल स्थिरता

मॉड्यूल 5 : विद्युत और चुंबकत्व

प्रस्तावना : इस मॉड्यूल में स्थिर विद्युत एवं घर्षण विद्युत की आधारभूत संकल्पनाओं का वर्णन किया जाएगा, एक बिंदु आवेश द्वारा उत्पन्न विद्युत क्षेत्र एवं विद्युत विभव की व्याख्या की जाएगी। विभिन्न प्रकार के संधारित्रों उनके संयोजनों और अनुप्रयोगों की व्याख्या की जाएगी। विद्युत धारा एवं विद्युत धारा के ऊष्मीय और चुंबकीय प्रभावों का भी वर्णन किया जाएगा। धारा के चुंबकीय प्रभाव और विद्युत चुंबकीय प्रेरण प्रभावों को विशेष रूप से समझाया जाएगा। विद्युत शक्ति का उत्पादन और प्रेषण तथा कम वोल्ट्ता और बाधित विद्युत आपूर्ति की भी व्याख्या की जाएगी।

15. इकाई 5.1 : विद्युत आवेश और विद्युत क्षेत्र

- घर्षण विद्युत-विद्युत आवेश और उनका संरक्षण
- कूलॉम का नियम
- अध्यारोपण सिद्धांत
- आरेख की सहायता से एक बिंदु आवेश के कारण विद्युत-क्षेत्र व क्षेत्र की तीव्रता दर्शाना
- एक विद्युत क्षेत्र में आवेशित कण पर बल
- एक समान विद्युत क्षेत्र में विद्युत द्विध्रुव का व्यवहार
- विद्युत अभिवाह और स्थिर वैद्युतिकी में गॉस का नियम (कोई व्युत्पत्ति नहीं)

सहायक दृश्य (वीडियो) कार्यक्रम

1. विद्युत चुम्बकतव भाग-1
2. विद्युत चुम्बकतव भाग-1
3. विद्युत स्थैतिकी एवं इसके अनुप्रयोग भाग-1

- गॉस के प्रमेय के उपयोग द्वारा एक बिंदु आवेश, लंबे तार तथा गोलाकार कोश (के अंदर और बाहर) अनंत समतल पट्टी के कारण विद्युत क्षेत्र की गणना करना
- वान-डे ग्राफ जनित्र

16. इकाई 5.2 : विद्युत विभव व संधारित्र

- एक बिंदु आवेश द्वारा विद्युत विभव
- एक विद्युत द्विध्रुव द्वारा किसी अक्षीय या निरक्षीय स्थिति में विद्युत विभव
- बिंदु आवेशों के निकाय की वैद्युत स्थितिज ऊर्जा
- विद्युत क्षेत्र और विद्युत विभव में संबंध-समविभव तल
- चालक व चालक के अंदर विद्युत क्षेत्र
- स्थिर विद्युतीय परिरक्षण
- संधारित्र और समांतर प्लेट संधारित्र की धारिता
- विभिन्न प्रकार के संधारित्र और उनके अनुप्रयोग
- श्रेणी व समांतर क्रम में संधारित्रों का संयोजन
- एक संधारित्र में संग्रहीत ऊर्जा
- परावैद्युतिकी और ध्रुवण
- परावैद्युतों का धारिता पर प्रभाव

17. इकाई 5.3 : विद्युत धारा

- एक चालक में विद्युत धारा
- इलेक्ट्रॉनों के अपवाह वेग की संकल्पना
- ओह्म का नियम, ओहमी और अनओह्मी प्रतिरोध, प्रतिरोधकों की वर्ण कोडिंग
- मुक्त एवं बद्ध इलेक्ट्रॉन
- प्रतिरोधों का संयोजन (श्रेणी और समांतर)
- किरखौफ के नियम और विद्युत परिपथ में उनके अनुप्रयोग
- व्हीट स्टोन सेतु-सिद्धान्त एवं इसके अनुप्रयोग
- विद्युत वाहक बल और विभवांतर

- प्राथमिक एवं द्वितीयक सेलों का प्राथमिक विवरण
- विभवमापी और इसके अनुप्रयोग
- विद्युत धारा का तापीय प्रभाव – जूल का तापीय नियम

18. चुंबकत्व 5.4 : चुंबकत्व और विद्युत धारा के चुंबकीय प्रभाव

- छड़ चुंबक और इसका चुंबकीय क्षेत्र
- विद्युत धारा का चुंबकीय प्रभाव
- बियो–सावा का नियम और इसके द्वारा किसी विद्युतवाही कुंडली के केंद्र में चुंबकीय क्षेत्र ज्ञात करना (गुणात्मक विवेचन)
- एम्पीयर का परिपथ नियम और इसकी सहायता से एक धारावाही तार, छल्ले (के केंद्र) या सीधे या टारॉयडी सोलेनोइड के कारण चुंबकीय क्षेत्र का मान ज्ञात करना
- विस्थापन धारा की संकल्पना
- एक चुंबकीय क्षेत्र में किसी आवेश पर लगने वाला बल, लॉरेंज बल
- एक समान चुंबकीय और वैद्युत क्षेत्रों में गतिमान आवेश पर बल : साइक्लोट्रोन
- एक समान चुंबकीय क्षेत्र में रखे एक विद्युत धारावाही तार पर लगने वाला बल
- धारा लूप का एक द्विध्रुव की भांति व्यवहार, चुंबकीय द्विध्रुव और चुंबकीय आघूर्ण
- परिक्रमणकारी इलेक्ट्रॉन का चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण
- किसी चुंबकीय द्विध्रुव (छड़ चुंबक अथवा धारावाही कुंडली) के कारण इसके अक्ष और अक्ष के लंबवत् बिंदुओं पर चुंबकीय क्षेत्र तीव्रता
- एक समान चुंबकीय क्षेत्र में रखे चुंबकीय द्विध्रुव पर बल आघूर्ण
- चल कुंडल गैल्वेनोमीटर और इसका आमीटर और वोल्टमीटर में रूपांतरण
- पृथ्वी का चुंबकीय क्षेत्र (केवल विवरणात्मक)
- लोह चुंबकीय पदार्थ–क्षेत्र (डोमेन) सिद्धांत (गुणात्मक)
- विद्युत चुंबक और उनकी प्रबलता को प्रभावित करने वाले कारक

19. इकाई 5.5 : विद्युत चुंबकीय प्रेरण व प्रत्यावर्ती धारा

- फैराडे का विद्युत चुंबकीय प्रेरण संबंधी नियम
- लेंज का नियम, भंवर धाराएं
- स्वप्रेरण व पारस्परिक प्रेरण–चोक कुंडली
- प्रत्यावर्ती धारा और वोल्टता (कला आरेख द्वारा प्रदर्शित गई), शीर्ष व मूल माध्य वर्ग मान
- परिपथ, जिनमें केवल R, L या C अलग–अलग लगा हो, I और V के बीच में कला संबंध

- LCR श्रेणी परिपथ (केवल कलादर्शक आरेख) और अनुनाद
- जनित्र (प्रत्यावर्ती धारा और दिष्ट धारा)
- ट्रांसफॉर्मर और उनके अनुप्रयोग
- विद्युत शक्ति का प्रेषण
- निम्न वोल्टता की समस्या और बाधित विद्युत आपूर्ति (स्थायीकारी और प्रतीपक की अवधारणाएं)

मॉड्यूल 6 : प्रकाशिकी और प्रकाशिक उपकरण

प्रस्तावना : प्रकाश के परावर्तन के संक्षिप्त परिचय के बाद, मूलभूत सिद्धांतों जैसे अपवर्तन, पूर्ण आंतरिक परावर्तन, वर्ण विपथन प्रकीर्णन का वर्णन इस मॉड्यूल में किया जाएगा। इसके अतिरिक्त प्रकाश का व्यतिकरण, अपवर्तन और ध्रुवण का भी गुणात्मक वर्णन किया जाएगा। इसके अलावा प्रकाश के गुणों का अनुप्रयोग, अनेक प्रकार के प्रकाशिकी उपकरणों के निर्माण का वर्णन भी किया गया है। रमन प्रभाव का प्राथमिक ज्ञान भी इस मॉड्यूल में पा सकेंगे।

20. इकाई 6.1 : प्रकाश का परावर्तन और अपवर्तन

- गोलाकार दर्पणों द्वारा प्रकाश का परावर्तन, चिह्न प्रणाली और दर्पण सूत्र
- प्रकाश का अपवर्तन, स्नैल का अपवर्तन संबंधी नियम
- पूर्ण आंतरिक परावर्तन और इसका तंतु प्रकाशिकी में अनुप्रयोग
- लेंसों की एकल वक्रीय सतह पर अपवर्तन
- लेंस निर्माणक-सूत्र और आवर्धन
- न्यूटन का सूत्र
- प्रतिबिंबों की स्थिति ज्ञात करने की विस्थापन विधि
- लेंस की शक्ति
- लेंसों का संयोजन
- दृष्टि दोष और उनका निराकरण (निकट दृष्टि और दीर्घ दृष्टि)

सहायक दृश्य (वीडियो) कार्यक्रम

1. तरंग प्रकाशिकी एवं इसके अनुप्रयोग भाग-1
2. तरंग प्रकाशिकी एवं इसके अनुप्रयोग भाग-2
3. किरण प्रकाशिकी का परिचय एवं इसका अनुप्रयोग

21. इकाई 6.2 : प्रकाश का वर्ण विपथन और प्रकीर्णन

- प्रकाश का वर्ण विपथन, विचलन कोण
- इंद्रधनुष और इसका निर्माण
- प्रतिबिंब निर्माण में दोष, गोलीय विपथन और वर्ण विपथन (गुणात्मक विवेचन)
- वायुमंडल में प्रकाश का प्रकीर्णन
- रमन प्रभाव का प्राथमिक परिचय

22. इकाई 6.3 : तरंग परिघटना और प्रकाश

- हाइगेन का तरंग-सिद्धांत एवं तरंग-संचरण
- व्यतिकरण, यंग का द्विछिद्र प्रयोग
- प्रकाश का विवर्तन-एकल छिद्र से (गुणात्मक)
- ध्रुवण, ब्रेवेस्टर का नियम और इसका दैनिक जीवन में उपयोग

23. इकाई 6.4 : प्रकाशिक उपकरण

- सरल और संयुक्त सूक्ष्मदर्शी और उनकी आवर्धन क्षमता
- परावर्ती और अपवर्ती दूरबीन
- विभेदन क्षमता और रेले निकष
- खगोल विज्ञान में उपयोग

मॉड्यूल 7 : परमाणु और नाभिक

प्रस्तावना : परमाणु की संरचना का वर्णन करने के लिए अनेक परमाणु मॉडल दिए गए हैं और उनकी सीमाएं और अनुप्रयोगों का इस मॉड्यूल में वर्णन किया गया है। नाभिकीय व रेडियो सक्रियता की व्याख्या की गई है और उनके अनुप्रयोग दिए गए हैं। नाभिकीय ऊर्जा के शांतिप्रिय उपयोग का विशेष रूप से उल्लेख किया गया है तथा साथ ही आधुनिकतम प्रवृत्तियों का भी वर्णन किया गया है।

24. इकाई 7.1 : परमाणु की संरचना

- अल्फा कण प्रकीर्णन और रदरफोर्ड का परमाणु मॉडल
- हाइड्रोजन परमाणु व ऊर्जा कक्षाओं के लिए बोर का मॉडल
- हाइड्रोजन स्पेक्ट्रम
- उत्सर्जन और अवशोषण स्पेक्ट्रम
- संतत एवं अभिलाक्षणिक एक्स-किरणें

25. इकाई 7.2 : विकरणों एवं द्रव्य की द्वैती प्रकृति

- कार्य फलन और इलेक्ट्रॉनों का उत्सर्जन
- प्रकाश विद्युत प्रभाव और इसकी व्याख्या
- प्रकाश विद्युत नालिका और इसके अनुप्रयोग
- द्रव्य तरंगें-डेविसन और जर्मर का प्रयोग
- इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी (बॉक्स में, परीक्षा में पूछे जाने के लिए नहीं)

26. इकाई 7.3 : नाभिक और रेडियो धर्मिता

- परमाणु द्रव्यमान मात्रक, द्रव्यमान संख्या, नाभिक का आकार
- समस्थानिक और समभारिक
- नाभिकीय बल, द्रव्यमान-ऊर्जा तुल्यता
- द्रव्यमान क्षति और बंधन ऊर्जा वक्र
- रेडियो धर्मिता-अल्फा, बीटा एवं गामा उत्सर्जन
- नाभिक की अर्धायु और क्षय नियतांक
- रेडियोधर्मिता के अनुप्रयोग

27. इकाई 7.4 : नाभिकीय विखंडन तथा संलयन

- नाभिकीय अभिक्रियाएं
- नाभिकीय विखंडन-शृंखला अभिक्रिया
- नाभिकीय संलयन-तारों में ऊर्जा
- परमाणु ऊर्जा का दुरुप्रयोग-परमाणु बम और हाइड्रोजन बम (बॉक्स: परीक्षा में पूछे जाने के लिए नहीं)
- नाभिकीय ऊर्जा के शांतिप्रिय उपयोग-वर्तमान रुझानों के साथ
- नाभिकीय विकिरण से संकट और बचाव के उपाय

मॉड्यूल 8 : अर्धचालक और युक्तियाँ और संचार

प्रस्तावना : अर्धचालकों का लगभग सभी इलेक्ट्रॉनिक युक्तियों के निर्माण में महत्त्वपूर्ण स्थान है। अर्धचालकों की उपयोगिता का आधार स्पष्ट करने के अलावा विभिन्न प्रकार की उपचालक युक्तियों और उनके अनुप्रयोगों का वर्णन इस मॉड्यूल में किया गया है। सूचना एवं संचार प्रौद्यागिकी के इस युग में इलेक्ट्रॉनिकी एवं संचार प्रौद्योगिकी की मूल संकल्पनाओं का ज्ञान सभी के लिए आवश्यक है। संचार तंत्रों, संचार तकनीकों और माध्यमों के विषय में, जिनका हम नित्य उपयोग करते हैं, उनके कार्य सिद्धांत समझाए गए हैं।

28. इकाई 8.1 : अर्धचालक एवं अर्धचालक युक्तियां

- ठोसों में ऊर्जा स्तर और ऊर्जा बैंड
- ऊर्जा बैंडस के आधार पर पदार्थों का चालक, विद्युतरोधी एवं अर्धचालकों में वर्गीकरण
- नैज और अपद्रव्यी अर्धचालक
- *p-n* संधि-इसकी संरचना (निर्माण) और गुण
- *p-n* संधि की बायसिंग

सहायक दृश्य (वीडियो) कार्यक्रम

1. अर्धचालक युक्तियां

- *p-n* संधि डायोड के अभिलाक्षणिक वक्र
- डायोडों के प्रकार-जेनर डायोड, प्रकाश उत्सर्जक डायोड और सौर-सेल
- जेनर डायोड, L.E.D., प्रकाशिक डायोड एवं सौर-सेल के I-V अभिलाक्षणिक वक्र
- ट्रांजिस्टर pnp और npn
- ट्रांजिस्टर के अभिलाक्षणिक वक्र

28. इकाई 8.2 : अर्धचालक युक्तियों के अनुप्रयोग

- p-n संधि एक दिष्टकारी के रूप में
- जेनर डायोड वोल्टता नियामक के रूप में
- ट्रांजिस्टर एक प्रवर्धक के रूप में (उभयनिष्ठ उत्सर्जक)
- ट्रांजिस्टर एक दोलित्र के रूप में
- तर्क द्वार और उनका प्रापन (Realization)

  अपि द्वार, अथ द्वार, न द्वार, नथ द्वार, नापि द्वार (क्रमशः OR, AND, NOT, NAND, NOR Gates)

30. यूनिट 8.3 : संचार प्रणाली

- मानक संचार प्रणाली
- संचार प्रणाली के अवयव
- सिग्नलों के प्रकार—एनालॉग एवं डिजीटल
- संचार में विद्युत चुंबकीय तरंगें
- निदर्शित माध्यम (संप्रेषक लाइनें, प्रकाशित तंतु)
- अनिदर्शित माध्यम एवं ऐंटेना—भू-तरंग संचार, व्योम तरंग संचार, आकाश तरंग संचार एवं उपग्रह संचार
- मॉडुलन—एनालॉग AM एवं FM, डिजिटल (PCM)
- विमॉडुलन
- संचार अनुप्रयोग

प्रयोगों की सूची

समूह-A

1. दिए गए बेलनाकार बर्तन (जैसे टिन का गोल डिब्बा, कैलॉरीमीटर) का आंतरिक व्यास एवं गहराई वर्नियर कैलीपर्स की सहायता से ज्ञात करके इसकी धारिता निकालिए। मापक-सिलिंडर का प्रयोग करके अपने परिणाम की पुष्टि कीजिए।

2. स्क्रूगेज द्वारा एक तार का व्यास ज्ञात कीजिए।

3. स्फैरोमीटर द्वारा एक अवतल दर्पण की वक्रता-त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

4. सरल लोलक को कम आयाम के लिए दोलित कराकर विभिन्न लंबाइयों के लिए आवर्त्त काल ज्ञात कीजिए और लोलक की लंबाई एवं आवर्त्त काल के वर्ग में ग्राफ खींचिए। ग्राफ का प्रयोग करके सेकेंड लोलक की लंबाई ज्ञात कीजिए।

5. सदिशों के समांतर चतुर्भुज के नियम का प्रयोग करके दी गई वस्तु का भार ज्ञात कीजिए।

6. शीतलन-काल तथा कैलॉरीमीटर एवं परिवेश के बीच तापांतर के लोगेरिथ्म में ग्राफ बनाकर न्यूटन के शीतलन नियम की पुष्टि कीजिए।

7. मिश्रण विधि का प्रयोग करके दिए गए ठोस की विशिष्ट ऊष्मा ज्ञात कीजिए।

8. बढ़ते क्रम में ज्ञात भार लटका कर स्प्रिंग की लंबाई में संगत वृद्धि ज्ञात कीजिए। स्प्रिंग के लिए भार-लम्बाई वृद्धि वक्र बनाकर इसके स्प्रिंग नियतांक का परिकलन कीजिए।

9. ब्यूरेट को पानी से भरकर इसके कुल आयतन का 1/2, 1/4, 1/8 .... खाली होने में लगा समय ज्ञात कीजिए। निकाले गए पानी के आयतन और निकालने में लगे समय में ग्राफ खींचिए। परिणाम का विश्लेषण कीजिए और रेडियो सक्रिय-क्षयता से इसकी तुलना कीजिए।

समूह-B

10. अनुनाद स्तम्भ व स्वरित्र विभ्रण का प्रयोग करके (i) वायु स्तम्भ में उत्पन्न ध्वनि का तरंगदैर्ध्य ज्ञात कीजिए। (ii) कमरे के तापमान पर वायु में ध्वनि का वेग ज्ञात कीजिए।

11. अनुनाद नलिका में दो अलग-अलग स्वरित्रों के लिए प्रथम एवं द्वितीय अनुनाद की स्थिति ज्ञात करके उनकी आवृत्तियों की तुलना कीजिए।

12. दिए गए स्वरित्र द्वारा सोनोमीटर के तार को फंडामेंटल मोड़ में अनुनादित कर तार के तनाव एवं अनुनादित लंबाई के वर्ग में ग्राफ खींचिए। ग्राफ से तार के प्रति इकाई द्रव्यमान की गणना कीजिए।

13. अवतल दर्पण की विभिन्न वस्तु दूरियों u के लिए प्रतिबिंब दूरियों v के मान ज्ञात कीजिए। $1/u$ और $1/v$ में ग्राफ खींचकर दर्पण की फोकस दूरी का मान निकालिए।

14. उत्तल लैंस के लिए $1/u$ एवं $1/v$ में ग्राफ बनाकर उसकी फोकस दूरी ज्ञात कीजिए।

15. उत्तल लैंस का प्रयोग करके उत्तल दर्पण की फोकस दूरी ज्ञात कीजिए।

16. उपयुक्त उत्तल लैंस के साथ जोड़कर एक अवतल लैंस की फोकस दूरी ज्ञात कीजिए।

17. एक कांच के प्रिज्म के लिए आपतन कोण (i) एवं विचलन कोण (D) में ग्राफ खींचिए। ग्राफ का उपयोग करके कांच का अपवर्तनांक ज्ञात कीजिए।

18. एक अवतन दर्पण और एक पिन प्रयोग करके दो पारदर्शी द्रवों के अपवर्तनांकों की तुलना कीजिए।

19. एक खगोलीय दूरदर्शी समंजित कीजिए और इसकी अभिवर्धन क्षमता ज्ञात कीजिए।

समूह-C

20. ऐमीटर, वोल्टमीटर एवं ज्ञात मान वाली प्रतिरोध कुंडलियों का प्रयोग करके (श्रेणी एवं समांतर क्रम में) प्रतिरोधों के संयोजन के नियमों का सत्यापन कीजिए।

21. विभवमापी का प्रयोग करके दो दिए गए प्राथमिक सेलों के emf की तुलना कीजिए।

22. मीटर सेतु का प्रयोग करके दिए गए तार के पदार्थ की प्रतिरोधकता ज्ञात कीजिए।

23. विभवमापी की सहायता से दिए गए सेल का आंतरिक प्रतिरोध ज्ञात कीजिए।

24. उपयुक्त श्रेणी प्रतिरोध एवं वोल्ट मीटर की सहायता से दी गई कुंडली का प्रेरकत्व ज्ञात कीजिए।

25. एक गैल्वेनोमीटर द्वारा R-C परिपथ में धारा की वृद्धि एवं ह्रास की प्रक्रिया का अध्ययन कीजिए और परिपथ का काल-नियतांक ज्ञात कीजिए।

26. दी गई p-n संधि के अग्र अभिनत परिपथ के लिए अभिलाक्षणिक वक्र खींचिए और दिए गए डायोड का स्थैतिक एवं गतिक प्रतिरोध ज्ञात कीजिए।

27. उभयनिष्ठ उत्सर्जक संयोजन में n-p-n ट्रांजिस्टर के अभिलक्षणों का अध्ययन कीजिए। इन अभिलक्षणों द्वारा 1 kΩ लोड प्रतिरोध के साथ वोल्टेज-लब्धि (Av) तथा धारा-लब्धि (β) की गणना कीजिए।

28. दिए गए दंड-चुंबक के लिए चुंबकीय बल रेखाएं खींचकर न्यूट्रल बिंदु अंकित कीजिए जबकि चुंबक का–

    (क) उत्तरी ध्रुव पृथ्वी के भौगोलिक उत्तरी ध्रुव की ओर संकेत करता हो।

    (ख) उत्तरी ध्रुव पृथ्वी के भौगोलिक दक्षिणी ध्रुव की ओर संकेत करता हो।

29. अर्द्ध विक्षेप विधि द्वारा दिए गए चल कुंडल धारामापी का आंतरिक प्रतिरोध ज्ञात कीजिए। इस धारामापी को 0-3V के वोल्टमीटर में बदलिए। इसका सत्यापन भी कीजिए।

अध्ययन योजना

भौतिकी पाठ्यक्रम आपको अधिगम अवसरों का जो पैकेज प्रदान करता है, उसमें शामिल हैं–

- मुद्रित स्व अधिगम सामग्री (SLM), जो दो भाग में हैं–भाग-1 एवं भाग-2।
- ऑडियो एवं वीडियो कार्यक्रमों के रूप में पूरक सामग्री।
- NIOS वेबसाइट (www.nios.ac.in) तथा यूट्यूब पर उपलब्ध भौतिकी के वीडियो ट्यूटोरियल। इन ट्यूटोरियलों के लिंक का उल्लेख SLM में संबंधित पाठों में किया गया है।
- 30 व्यक्तिश: संपर्क कार्यक्रम (PCPs) सत्र आपके अध्ययन केंद्र पर आयोजित किए जाएंगे। इनका शेड्यूल जानने के लिए कृपया अपने अध्ययन केंद्र पर संपर्क कीजिए।
- आपके अध्ययन केंद्र पर साक्षात व्यक्तिश: संपर्क कार्यक्रम (PCPs) के अतिरिक्त, मुक्त विद्यावाणी पर ऑडियो संप्रेषण के माध्यम से लाइव व्यक्तिश: संपर्क कार्यक्रम (PCPs) भी वेबकास्ट किए जाते हैं जिन्हें आप NIOS वेबसाइट (www.nios.ac.in) के माध्यम से एक्सेस कर सकते हैं।

मूल्यांकन योजना

शिक्षार्थी का मूल्यांकन शिक्षक अंकित मूल्यांकन एसाइंमेंट (टी. एम.ए.) के रूप में संतत व्यापक मूल्यांकन (CCE) के माध्यम से तथा सार्वजनिक परीक्षा के माध्यम से दोनों प्रकार से किया जाएगा। नीचे की सारणी में इस संबंध में विस्तृत सूचना दी गई है–

मूल्यांकन विधि	पाठ्यक्रम/ विषयवस्तु	अवधि	अंक प्रतिशत
शिक्षक अंकित मूल्यांकन पत्र (टी. एम.ए.)		स्व निर्धारित	20
सार्वजनिक/ अंतिम परीक्षा		3 घंटे	80

1

मात्रक, विमाएं एवं सदिश

विज्ञान एवं विशेष रूप से भौतिकी में हम यथासंभव शुद्ध मापन का प्रयास करते हैं। विज्ञान के इतिहास में शुद्ध मापन से अनेक नये आविष्कार और महत्वपूर्ण विकास हुए हैं। स्पष्टतया, प्रत्येक मापन के उपयुक्त मात्रक होते हैं। उदाहरण के लिए यदि आप अपने कमरे की लम्बाई मापें तो इसको एक उपयुक्त मात्रक में अभिव्यक्त किया जाता है। इसी प्रकार यदि आप दो घटनाओं के बीच के अंतराल का मापन करते हें तो इसे किसी दूसरे मात्रक के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है। किसी भौतिक राशि के मात्रक की व्युत्पत्ति अंतर्राष्ट्रीय समझौते के द्वारा नियत मूलभूत मात्रकों के द्वारा की जाती है। मूलभूत मात्रकों की धारणा विमाओं की संकल्पना को जन्म देती है जिसके भौतिकी में महत्वपूर्ण अनुप्रयोग हैं।

आप अध्ययन करेंगे कि भौतिक राशियाँ सामान्यतया दो समूहों में विभाजित की जा सकती हैं– अदिश एवं सदिश। अदिश राशियों का केवल परिमाण होता है जबकि सदिश राशियों का परिमाण एवं दिशा दोनों होते हैं। सदिश राशियों की गणितीय प्रक्रिया अदिश राशियों के लिये प्रयुक्त प्रक्रिया से कुछ भिन्न होती है। सदिश एवं अदिश राशियों की परिकल्पना विभिन्न प्राकृतिक घटनाओं की भौतिकी को समझने में सहायक हैं। इसका अनुभव आप इस पाठ्यक्रम में करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के पश्चात् आप :

- *भौतिकी के क्षेत्र, इसके नियमों की प्रकृति और भौतिकी के सिद्धान्तों के हमारे दैनिक जीवन में अनुप्रयोगों का वर्णन कर सकेंगे;*
- *मापन में सार्थक अंकों की संख्या ज्ञात कर सकेंगे और मापन में उनके महत्व को समझा सकेंगे;*
- *मौलिक एवं व्युत्पन्न राशियों में भेद कर पायेंगे तथा इनके SI मात्रक बता सकेंगे;*
- *विभिन्न भौतिक राशियों की विमाएं लिख सकेंगे;*

- *विमीय विश्लेषण के प्रयोग द्वारा समीकरणों की शुद्धता की जाँच कर सकेंगे एवं अज्ञात राशियों की विमीय प्रकृति निर्धारित कर पायेंगे;*
- *अदिश एवं सदिश राशियों में भेद बता सकेंगे एवं इनके उदाहरण प्रस्तुत कर सकेंगे;*
- *दो सदिशों को जोड़ व घटा सकेंगे एवं किसी सदिश को उसके घटकों में वियोजित कर सकेंगे;*
- *दो सदिशों का गुणनफल ज्ञात कर सकेंगे।*

1.1 भौतिक जगत और मापन

1.1.1 भौतिकी: प्रयोजन एवं प्रेरणा

भौतिकी का कार्य-परिसर बहुत विस्तृत है। अत्यन्त विविधतापूर्ण प्राकृतिक परिघटनाएं इसके अध्ययन क्षेत्र में आती हैं। इसमें शामिल हैं: यान्त्रिकी; ऊष्मा एवं ऊष्मागतिकी; प्रकाशिकी; तरंगें एवं दोलन; विद्युत एवं चुम्बकत्त्व; परमाण्विक एवं नाभिकीय भौतिकी; इलेक्ट्रॉनिकी एवं कम्प्यूटर आदि। बहुत समय से, कुछ समस्याओं के हल की आवश्यकता को लेकर जैव-भौतिकी, रसायन-भौतिकी, खगोल-भौतिकी, मृदा-भौतिकी, भू-भौतिकी इत्यादि विषयों का विकास किया गया है और इससे भौतिकी का क्षेत्र और विकसित हुआ है। भौतिकी में हम तारों, ग्रहों जैसे विशाल तथा मूल कणों जैसे सूक्ष्म पिंडो का, 10^{25} m (ब्रहमाण्ड का साइज़) जैसी विशाल तथा 10^{-14} m (परमाणु नाभिक का साइज) जैसी अल्प दूरियों का, 10^{55} kg (ब्रहमाण्ड का द्रव्यमान) जैसे विशाल और 10^{-30} kg (इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान) जैसे सूक्ष्म द्रव्यमानों का अध्ययन करते हैं।

भौतिकी संभवत: सभी विज्ञानों का आधार है। अभियांत्रिकी अथवा प्रौद्योगिकी में हुए सभी विकास भौतिकी के अनुप्रयोगों के अतिरिक्त और कुछ भी नहीं हैं।

भौतिकी के अध्ययन नें अनेक महत्वपूर्ण खोजों, आविष्कारों और उनके अनुप्रयोगों को जन्म दिया है, उदाहरणार्थ:

(i) एक गिरते हुए सेव से गुरुत्वाकर्षण का बोध,

(ii) जल, तापीय एवं नाभिकीय शक्ति-संयन्त्रों द्वारा विद्युत ऊर्जा का उत्पादन (विद्युत विहीन जगत और उसके जीवन की कल्पना करके देखिए)।

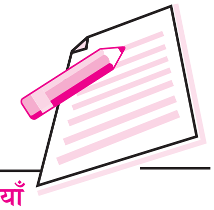
(iii) टेलिफोन एवं टेलिविजन द्वारा विश्व के किसी भी भाग से संदेश एवं दृश्य प्राप्त करना।

(iv) पृथ्वी से रोबोट नियन्त्रण प्रणाली का उपयोग कर के चन्द्रमा पर अवतरण तथा मंगल जैसे ग्रहों एवं अन्य खगोलिक पिंडों का अध्ययन।

(v) कृत्रिम उपग्रहों और उपग्रहों पर लगे टेलिस्कोपों की सहायता से बाहय अन्तरिक्ष का अध्ययन।

(vi) लेसर्स और उनके अनेक अनुप्रयोग

(vii) उच्च गति कम्प्यूटर, तथा ऐसे अनेक अनुप्रयोग।



1.1.2 भौतिक नियमों की प्रकृति

भौतिकीविद् ब्रह्माण्ड का अन्वेषण करते हैं। वैज्ञानिक प्रक्रमों पर आधारित उनके अन्वेषण के परिसर में सूक्ष्म अवपरमाणुक कणों से लेकर विशाल तारे तक आते हैं।

भौतिक नियम प्रारूपिकत: ऐसे निष्कर्ष होते हैं जो बार बार दोहराए गए प्रयोगों और कई वर्षों तक लिए गए प्रेक्षणों पर आधारित होते हैं और जिन्हें वैज्ञानिक समाज द्वारा सार्वभौमिक मान्यता प्राप्त हो चुकी होती है। भौतिक नियम–

- कम से कम अपने वैधता क्षेत्र के अन्तर्गत सत्य होते हैं।
- सार्वभौम होते हैं। उन्हें ब्रह्माण्ड में हर कहीं लागू किया जा सकता है।
- सरल होते हैं। उन्हें प्रारूपिकत: एक गणितीय समीकरण के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।
- निरपेक्ष होते हैं। ब्रह्माण्ड में कुछ भी उन्हें प्रभावित नहीं कर सकता।
- स्थायी होते हैं। खोजे जाने के बाद अपरिवर्तित रहते हैं (हालांकि, उनमें कुछ उपगमन/अथवा अपवाद हो सकते हैं)।
- सर्वशक्तिमान होते हैं। ब्रह्माण्ड में हर वस्तु को उनका पालन करना ही होता है।

1.1.3 भौतिकी, प्रौद्योगिकी एवं समाज

प्रौद्योगिकी, भौतिकी के नियमों का अनुप्रयोग होती है, जिसके द्वारा हमारे भौतिक जीवन स्तर की गुणवत्ता में सुधार के लिए मशीनों, युक्तियों आदि का निर्माण किया जाता है या उनमें सुधार लाया जाता है। उदाहरण के लिए:

(i) विभिन्न प्रकार के इन्जन (भाप, पैट्रोल, डीज़ल आदि) ऊष्मा गतिकी के नियमों पर आधारित होते हैं।

(ii) संचार के साधन जैसे रेडियो, टेलिफोन, टेलिविजन आदि विद्युत-चुम्बकीय तरंगों के प्रगमन पर आधारित होते हैं।

(iii) विद्युत जनन विद्युत चुम्बकीय प्रेरण के सिद्धान्त पर आधारित होता है।

(iv) नाभिकीय रिएक्टर नियंत्रित-नाभिकीय-विखण्डन के सिद्धान्त पर आधारित होता है।

(v) जेट वायुयान तथा रॉकेट न्यूटन के गति के द्वितीय एवं तृतीय नियमों पर आधारित होते हैं।

(vi) एक्स-किरणों, पराबैंगनी किरणों तथा अवरक्त किरणों का उपयोग चिकित्सा विज्ञान में निदान एवं रोगहरण के लिए किया जाता है।

(vii) मोबाइल फोन, परिकलित्र और संगणक इलेक्ट्रानिकी के सिद्धांत पर आधारित होते हैं।

(viii) लेसर्स इलेक्ट्रॉन संख्या उत्क्रमण की परिघटना पर आधारित होते हैं।

इस प्रकार के बहुत से उदाहरण दिए जा सकते हैं।

1.1.4 मापन की आवश्यकता

प्रत्येक नई खोज समाज की संरचना और इसके लोगों के जीवन में क्रांतिकारी परिवर्तन लाती है। क्या आप इस तथ्य को कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट कर सकते हैं?

भौतिकी, जैसा हम जानते हैं, विज्ञान की एक शाखा है जिसमें प्रकृति और प्राकृतिक परिघटनाओं का अध्ययन किया जाता है। किसी परिघटना के सम्पूर्ण एवं उपयुक्त अध्ययन के लिए इससे संबद्ध राशियों का मापन अनिवार्य होता है। उदाहरण के लिए किसी कण की गति के अध्ययन के लिए किसी क्षण विशेष पर इसके विस्थापन, वेग एवं त्वरण का सही मापन करना होता है। जिसके लिए, समय और दूरी का मापन करना पड़ता है। इसी प्रकार, किसी गैस की अवस्था के पूर्ण अध्ययन के लिए आयतन, दाब और ताप का मापन आवश्यक होता है। किसी द्रव पर ऊष्मा के प्रभाव का अध्ययन करने के लिए उसका द्रव्यमान, आयतन और ताप मापना पड़ता है। अतः हम देखते हैं कि प्रत्येक प्राकृतिक परिघटना का अध्ययन करने के लिए, दूरी, समय, ताप, द्रव्यमान, बल आदि राशियों का मापन करना होता है। इससे मापन की आवश्यकता स्पष्ट हो जाती है।

1.2 माप के मात्रक (Unit of Measurement)

भौतिकी के नियमों को दूरी, चाल, समय, बल, क्षेत्रफल, आयतन, विद्युतधारा, आदि भौतिक राशियों के पदों में व्यक्त करते हैं। मापन के लिये प्रत्येक भौतिक राशि का एक मात्रक नियत किया जाता है। उदाहरण के तौर पर, समय का मापन मिनटों, घंटों या दिनों के रूप में किया जा सकता है। लेकिन विभिन्न व्यक्तियों के बीच उपयोगी वैचारिक आदान प्रदान हेतु इस मात्रक की तुलना सभी को स्वीकार्य मानक मात्रक से की जानी चाहिये। उदाहरणतया, जब हम कहते हैं कि दिल्ली एवं कलकत्ता के बीच की दूरी लगभग 2000 किलोमीटर (km) है तो हम मूलभूत मात्रक km के रूप में तुलना करते हैं। इसी प्रकार आप संभवतया द्रव्यमान के मात्रक किलोग्राम एवं समय के मात्रक सेकंड से परिचित होंगे। मानक मात्रकों के संदर्भ में सभी का एक मत होना आवश्यक है। ताकि जब हम 100 किलोमीटर, 10 किलोग्राम या 10 घंटे कहें तो दूसरे लोग इसे समझ सकें। विज्ञान में मूलभूत मात्रकों के संदर्भ में अंतर्राष्ट्रीय मतैक्य आवश्यक है अन्यथा संसार के एक भाग के व्यक्तियों द्वारा प्राप्त परीक्षणों के परिणामों को दूसरी भाषा के व्यक्ति नहीं समझ पायेंगे।

माना आप पानी में एक रसायन की विलेयता का परीक्षण कर रहे हैं। यदि आप रसायन का द्रव्यमान तोलों में एवं पानी का आयतन कप के परिमाण से व्यक्त करें तो क्या आपका जापानी मित्र आपके परीक्षण के परिणामों को समझ पायेगा?

आपके मित्र की समझ में परीक्षण के परिणाम आना असंभव है क्योंकि वह द्रव्यमान के मात्रक तोला एवं आयतन-मापन के लिये प्रयुक्त कप से सुपरिचित नहीं है। क्योंकि ये परिमाण के मानक मात्रक नहीं हैं। क्या अब आपको सर्वमान्य, मानक मात्रकों की आवश्यकता स्पष्ट हुई?

याद रखें कि विज्ञान में एक परीक्षण के परिणाम तभी स्थापित माने जाते हैं जबकि समान परिस्थितियों में अन्यत्र वह परीक्षण किये जाने पर समान परिणाम प्राप्त हों।

भारतीय परंपराओं में मापन

भारत में प्राचीन काल से ही यथाक्रम मापन की परिपाटी रही है, मनुस्मृति का निम्नलिखित उद्धरण इस बात को भली-भाँति स्पष्ट करता है:

"राजा को प्रत्येक 6 माह में बाटों एवं तुलाओं का परीक्षण कर यह सुनिश्चित कर लेना चाहिये कि मापन सही हैं एवं इन्हें राजमुद्रित कर दिया गया है।"

– मनुस्मृति, 8वाँ अध्याय, श्लोक सं. 403

हड़प्पा काल में मापन के संकेत बहुतायत में मिलते हैं। समान रूप से चौड़ी सड़कें, 4 : 2 : 1 अनुपात की ईंटें, लोथल में पाया गया हाथी दाँत का पैमाना जिसकी न्यूनतम माप 1.70 mm थी, षटफलकीय 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200 एवं 500 इकाईयों के भार (1 इकाई = 20 ग्राम) पाये गये,

मौर्य काल में लंबाई के निम्न मात्रक प्रचलन में थे :

8 परमाणु	= 1 रज:कण	8 रज:कण	= 1 लिक्षा
8 लिक्षा	= 1 यूकमाध्य	8 यूकमाध्य	= 1 यवमाध्य
8 यवमाध्य	= 1 अंगुल	8 अंगुल	= 1 धनर्मुष्टि

मुगल काल में शेरशाह एवं अकबर ने भार एवं मापन के क्षेत्र में एकरूपता पुनर्स्थापन का प्रयास किया। अकबर ने लंबाई मापने के लिये 41 अंगुल का गज आरंभ किया। जमीन का क्षेत्रफल-मापन के लिये बीघा प्रयुक्त किया (1 बीघा = 60 गज × 60 गज)।

द्रव्यमान एवं आयतन के मात्रकों का स्पष्ट उल्लेख आयुर्वेद में भी पाया जाता है।

1.2.1 मात्रकों की SI पद्धति

सर्वमान्य मात्रकों की आवश्यकता को ध्यान में रखते हुये 1971 में आयोजित चौदहवीं **जनरल कान्फ्रेंस आन वेट्स एण्ड मेजरस** में 7 मूल मात्रकों की पद्धति को अपना लिया गया। इन 7 मात्रकों पर आधरित SI मात्रक प्रणाली बनी। SI अंतर्राष्ट्रीय मात्रक पद्धति **(Système International d'Unités)** का संक्षिप्तीकरण है। यह प्रणाली मीट्रिक प्रणाली के नाम से लोकप्रिय है। SI मात्रक एवं उनके प्रतीक सारणी 1.1 में सूचीबद्ध हैं।

सारणी 1.1 : आधारभूत SI मात्रक

राशि	मात्रक	प्रतीक
लम्बाई	मीटर	m
द्रव्यमान	किलोग्राम	kg
समय	सेकन्ड	s
विद्युतधारा	ऐम्पियर	A
ताप	केल्विन	K
ज्योति तीव्रता	कैन्डेला	cd
पदार्थ की मात्रा	मोल	mol

लम्बाई के मात्रक मील, गज एवं फुट आज भी भारत एवं अन्य देशों में कुछ कार्यों में प्रयुक्त होते हैं। **लेकिन वैज्ञानिक कार्य के लिये हम सदैव SI मात्रकों का ही प्रयोग करते हैं।**

टिप्पणियाँ

SI प्रणाली मीट्रिक प्रणाली है। इसका प्रयोग आसान है क्योंकि इस प्रणाली में मूल मात्रकों से छोटे और बड़े मात्रक दस के अपवर्त्यों या अपवर्तकों के रूप में व्यक्त किये जा सकते हैं। मात्रकों के अपवर्तकों एवं अपवर्त्यों को विशेष नाम दिये गये हैं। ये सारणी 1.2 में सूचीबद्ध हैं।

सारणी 1.2 : दस की घात के पूर्वलग्न

दस की घात	पूर्वलग्न	प्रतीक	उदाहरण	
10^{-18}	एटो	a	एटोमीटर	(am)
10^{-15}	फेम्टो	f	फेम्टोमीटर	(fm)
10^{-12}	पीको	p	पीकोमीटर	(pF)
10^{-9}	नेनो	n	नेनोमीटर	(nm)
10^{-6}	माइक्रो	μ	माइक्रोन	(μm)
10^{-3}	मिली	m	मिलीग्राम	(mg)
10^{-2}	सेंटी	c	सेंटीमीटर	(cm)
10^{-1}	डेसी	d	डेसीमीटर	(dm)
10^{1}	डेका	da	डेकाग्राम	(dag)
10^{2}	हेक्टो	h	हेक्टोमीटर	(hm)
10^{3}	किलो	k	किलोग्राम	(kg)
10^{6}	मेगा	M	मेगावाट	(MW)
10^{9}	गीगा	G	गीगाहर्ट्स	(GHz)
10^{12}	टेरा	T	टेराहर्ट्स	(THz)
10^{15}	पेटा	P	पेटा किलोग्राम	(Pkg)
10^{18}	एग्जा	E	एग्जा किलोग्राम	(Ekg)

सारणी 1.3 : कुछ द्रव्यमानों की परिमाण कोटि

द्रव्यमान	किलोग्राम
इलैक्ट्रॉन	10^{-30}
प्रोटोन	10^{-27}
अमीनो अम्ल	10^{-25}
हीमोग्लोबिन	10^{-22}
फ्लू वायरस	10^{-19}
विशाल अमीबा	10^{-8}
वर्षा की बूँद	10^{-6}
चींटी	10^{-2}
मानव	10^{2}
सेटर्न 5 राकेट	10^{6}
पिरामिड	10^{10}
पृथ्वी	10^{24}
सूर्य	10^{30}
आकाशगंगा	10^{41}
ब्रह्माण्ड	10^{52}

सारणी 1.4 : कुछ लम्बाईयों की परिमाण कोटि

लम्बाई	मीटर
प्रोटॉन की त्रिज्या	10^{-15}
परमाणु की त्रिज्या	10^{-16}
विषाणु की त्रिज्या	10^{-7}
विशाल अमीबा की त्रिज्या	10^{-4}
अखरोट की त्रिज्या	10^{-2}
मनुष्य की ऊँचाई	10^{0}
सर्वाधिक ऊँचा पर्वत	10^{4}
पृथ्वी की त्रिज्या	10^{7}
सूर्य की त्रिज्या	10^{9}
सूर्य एवं पृथ्वी के मध्य दूरी	10^{11}
सौर परिवार की त्रिज्या	10^{13}
निकटतम तारे की दूरी	10^{16}
आकाशगंगा की त्रिज्या	10^{21}
दृश्यमान ब्रह्माण्ड की त्रिज्या	10^{26}

सारणी 1.5 : कुछ समय अंतराल का परिमाण कोटि

अंतराल	सेकंड
प्रकाश द्वारा नाभिक को पार करने में लगा समय	10^{-23}
दृश्यमान प्रकाश तरंगों का आवर्तकाल	10^{-15}
माइक्रोवेव्ज का आवर्तकाल	10^{-10}
म्यूऑन की अर्ध आयु	10^{-6}
उच्चतम श्रव्य ध्वनि का	आवर्तकाल 10^{-4}
मनुष्य के हृदयस्पंद का	आवर्तकाल 10^{0}
मुक्त न्यूट्रॉन की अर्धआयु	10^{3}
पृथ्वी के घूर्णन का आवर्तकाल (दिन)	10^{5}
पृथ्वी के परिक्रमण काआवर्तकाल (वर्ष)	10^{7}
मनुष्य की आयु	10^{9}
प्लूटोनियम-239 की अर्धआयु	10^{12}
पर्वत शृंखला की जीवन	अवधि 10^{15}
पृथ्वी की आयु	10^{17}
ब्रह्माण्ड की आयु	10^{18}

सारणी 1.3 से ब्रह्माण्ड की विभिन्न वस्तुओं के द्रव्यमान, सारणी 1.4 से विभिन्न वस्तुओं के साइज एवं सारणी 1.5 से ब्रह्माण्ड की विभिन्न घटनाओं के समय अंतरालों का अनुमान लगाया जा सकता है।

1.2.2 द्रव्यमान, लंबाई और समय के मानक मात्रक

एक बार मात्रकों की SI पद्धति के उपयोग का निश्चय कर लेने के बाद हमें मूल राशियों के लिये मानक मात्रकों का समुच्चय (Set) निश्चित कर लेना चाहिये। अब हम द्रव्यमान, लम्बाई एवं समय के मानक मात्रकों को परिभाषित करते हैं :

(i) द्रव्यमान : द्रव्यमान का SI मात्रक किलोग्राम है। किलोग्राम का मानक 1857 में स्थापित किया गया। यह प्लेटिनम-इरीडियम मिश्रधातु के बने एक विशिष्ट, असाधारण रूप से स्थायी बेलन का द्रव्यमान है, जिसे फ्रांस के पेरिस स्थित भार तथा मापन के अंतर्राष्ट्रीय ब्यूरो (International Bureau of Weights and Measures) में रखा गया है। इसी मिश्रधातु के आदिप्रारूप किलोग्राम बनाकर संसार के सभी देशों को दे दिये गये हैं। भारत का राष्ट्रीय आदिप्रारूप किलोग्राम संख्या 57 है जो राष्ट्रीय प्रयोगशाला (National Physical Laboratory) नई दिल्ली में सुरक्षित है, (चित्र 1.1)।

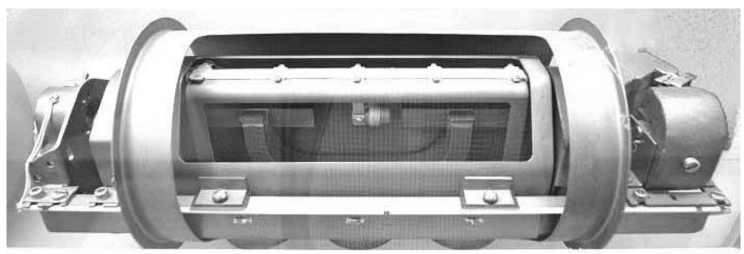
चित्र 1.1: किलोग्राम का आदिप्रारूप

(ii) **लम्बाई :** मीटर को एक प्राकृतिक घटना के रूप में परिभाषित किया जाता है। निर्वात में प्रकाश द्वारा **1/299792458 सेकंड** में चली गई दूरी को एक मीटर कहते हैं।

यह परिभाषा इस तथ्य पर आधारित है कि निर्वात में प्रकाश की चाल 299792458 मीटर प्रति सेकंड है।

(iii) **समय :** सीजियम - **133** परमाणु को अपनी मूल स्थिति के दो अतिसूक्ष्म स्तरों के बीच **9192631770** कम्पन करने के लिये आवश्यक समय को एक सेकंड के रूप में परिभाषित किया गया है।

सीजियम परमाणु घड़ी
(S60,000)
सीजियम बेरियम ट्यूब



चित्र. 1.2 : परमाणु घड़ी

सेकंड की यह परिभाषा एक युक्ति, के विकास में सहायक सिद्ध हुई जिसे परमाणु घड़ी कहते हैं, (चित्र 1.2)। भारत की राष्ट्रीय भौतिक प्रयोगशाला में सुरक्षित सीजियम घड़ी की अनिश्चितता $\pm 1 \times 10^{-12}$ सेकंड है जो कि एक सेकंड में एक पिकोसेकंड की त्रुटि के तुल्य है। वर्तमान में 10^{15} में 5 भाग की त्रुटि तक की घड़ी विकसित की जा चुकी हैं। इसका अर्थ यह है कि यदि घड़ी 10^{15} सेकंड तक चले तो इसमें ± 5 सेकंड से कम त्रुटि आयेगी। यदि सेकंड को वर्षों में परिवर्तित किया जाय तो एक आश्चर्यजनक परिणाम प्राप्त होता है कि यदि यह घड़ी 60 लाख वर्षों तक चलती रह सके तो इसके द्वारा समय मापन में ± 1 सेकंड से कम त्रुटि आयेगी। यह प्रयासों की चरम सीमा नहीं है। प्रामाणिकता को और अधिक बढ़ाने के लिये निरंतर प्रयास जारी है। अंततोगत्वा हम 10^{18} सेकंड में ± 1 सेकंड की त्रुटि वाली घड़ी बनाने की आशा करते हैं। आपकी तकनीकी उपलब्धि संबंधी जानकारी के लिये बता दें कि यदि यह घड़ी ब्रह्माण्ड के जन्म (जिसे बिग बैंग कहा जाता है) के समय चलाई जाती तो आज तक इसमें मात्र ± 2 सेकंड की त्रुटि आती।

नवीन खोजों में परिशुद्ध मापन की भूमिका

लार्ड रैले द्वारा नाइट्रोजन के घनत्व मापन के लिये किये गये प्रयोग इस तथ्य का एक अतिविशिष्ट उदाहरण है कि शुद्ध मापन नये आविष्कारों में सहायक हो सकते हैं।

एक प्रयोग में उन्होंने एक नली में लाल गर्म ताँबे के ऊपर एवं द्रव अमोनिया के बीच से हवा के बुलबुले गुजारे और इस प्रकार प्राप्त शुद्ध नाइट्रोजन का घनत्व मापा। एक दूसरे प्रयोग में उन्होंने हवा को सीधे लाल गर्म ताँबे के ऊपर गुजारा और शुद्ध नाइट्रोजन का घनत्व मापा। दूसरे प्रयोग में प्राप्त घनत्व पहले प्रयोग से प्राप्त घनत्व की तुलना में 0.1% अधिक पाया गया। इस प्रयोग से हवा में नाइट्रोजन से भारी गैस की उपस्थिति के संकेत मिले। बाद में उन्होंने इस गैस-आर्गन की खोज की और इसके लिये उन्हें नोबेल पुरस्कार प्राप्त हुआ।

दूसरा उदाहरण माइकेलसन और मौर्ले का असफल प्रयोग है। माइकेलसन व्यतिकरणमापी का प्रयोग करते हुये वे पृथ्वी की गति की दिशा एवं इसके अनुप्रस्थ दिशा में चलने वाली प्रकाश तरंगों के अध्यारोपण से प्राप्त व्यतिकरण चित्राम (Interference pattern) में 0.4 फ्रिंज चौड़ाई के स्थान परिवर्तन की अपेक्षा कर रहे थे। उनका यंत्र व्यतिकरण चित्राम में अपेक्षित परिवर्तन की अपेक्षा सौ गुना संवेदनशील था। इस प्रकार वे ईथर की तुलना में पृथ्वी की गति मापन की अपेक्षा कर रहे थे और इस बात को सिद्ध करना चाह रहे थे कि ईथर का वास्तव में अस्तित्व है। लेकिन जब उनका यंत्र कोई परिवर्तन (shift) संसूचित नहीं कर सका तो वैज्ञानिक दुनिया में विपरीत परिणामों की व्याख्या को लेकर लंबी बहस छिड़ गई। इससे **लंबाई संकुचन** एवं **समय विस्फारण** की अवधारणाओं का जन्म हुआ जिनकी परिणति **सापेक्षता के सिद्धांत** में हुई।

स्पेक्ट्रोस्कोपी की एक नई तकनीक से किसी नाभिकीय अभिक्रिया में निर्मित नये परमाणुओं के अवशेषों का संसूचन सूक्ष्मता से करना संभव हो सका। इसमें कई नई खोजें संभव हुईं।

1.2.3 सार्थक अंक

जब कोई विद्यार्थी किसी रेखा की लम्बाई 6.8 cm मापता है तो उसके मापन में अंक 6 तो निश्चित है जबकि 8 अनिश्चित है क्योंकि 0.8 से जरा कम या ज्यादा माप होने पर भी प्रेक्षक उसे 0.8 ही लिखता है। प्राय: मापन के वे सब अंक जो निश्चयात्मकता से ज्ञात है जमा पहला अनिश्चयात्मक अंक मिल कर सार्थक अंक कहलाते हैं।

इस प्रकार 1.4 cm में दो सार्थक अंक हैं। किसी राशि के सार्थक अंक उसके मापन में प्रयुक्त यन्त्र की यथार्थता पर निर्भर करते हैं। किसी राशि में जितने अधिक सार्थक अंक होंगे उसके मापन में प्रतिशत त्रुटि उतनी ही कम होगी। यदि मापन में सार्थक अंकों की संख्या कम होगी तो इसमें प्रतिशत त्रुटि अधिक होगी।

किसी राशि में सार्थक अंकों की संख्या निम्नलिखित नियमों का अनुसरण करके प्राप्त की जा सकती है:

(i) किसी संख्या में जो अंक शून्य नहीं होते वे सभी सार्थक होते हैं। उदाहरण के लिए 315.58 में पाँच सार्थक अंक हैं।

(ii) दो न-शून्य (non-zero) अंको के बीच के सभी शून्य सार्थक होते हैं। उदाहरणार्थ 5,300,405,003 में दस सार्थक अंक हैं।

(iii) मापन में लिखे गए दशमलव पश्चात के शून्य या न-शून्य अंक के दाहिनी ओर लिखे गए सभी शून्य सार्थक होंगे। इस प्रकार 50.00 में चार सार्थक अंक है और 0.04050 में भी चार सार्थक अंक हैं। ध्यान दें कि 0.04050 में दशमलव के पश्चात पहला शून्य सार्थक नहीं है परन्तु आखिरी शून्य सार्थक है।

(iv) दशमलव भिन्न में दशमलव पश्चात और न-शून्य अंक से पहले के सभी शून्य सार्थक नहीं होते हैं। उदाहरणार्थ 0.00043 में केवल दो सार्थक अंक हैं परन्तु 2.00023 में छः सार्थक अंक है। इस बात पर भी ध्यान दिया जाए कि दशमलव से पहले प्रथा के रुप में लिखा गया शून्य भी सार्थक नहीं होता है।

(v) संख्या में अन्तिम न-शून्य अंक के पश्चात लिखे गए सभी शून्य सार्थक होते हैं बशर्ते यह संख्या वास्तविक मापन को व्यक्त करती हो। उदाहरण के लिए यदि दो पिंडों के बीच की दूरी 4050 m (निकटतम मीटर माप में) है तो 4050 m में 4 सार्थक अंक हैं।

(vi) मात्रक परिवर्तन से सार्थक अंकों की संख्या नहीं बदलती। उदाहरण के लिए, यदि किसी वस्तु की लम्बाई 348.6 cm दी गई है तो इसमें 4 सार्थक अंक हैं। यदि लम्बाई मीटर में 3.486 m लिखें तो अभी भी इसमें चार सार्थक अंक हैं।

(vii) किसी पूर्ण संख्या में अन्तिम न-शून्य अंक के दाहिनी ओर के शून्य सार्थक नहीं होते। उदाहरण के लिए 5000 में केवल एक सार्थक अंक है।

मापन में सार्थक अंकों का महत्व

जैसा पहले उल्लेख किया जा चुका है, किसी राशि में सार्थक अंकों की संख्या का निर्धारण मापन की यथार्थता से होता है। माना कि किसी सिक्के का व्यास 2 cm है। यदि कोई विद्यार्थी इसका व्यास मीटर स्केल से नापता है जो 0.1 cm तक ही ठीक ठीक मापन कर सकता है तो विद्यार्थी इसका व्यास 2.0 cm अर्थात केवल दो सार्थक अंकों तक बताएगा। यदि व्यास का मापन वर्नियर कैलिपर्स जैसे किसी यंत्र द्वारा किया जाए जो 0.01 cm तक ठीक ठीक माप सकता है तो वह व्यास को 2.00 cm अर्थात तीन सार्थक अंको तक लिखेगा। इसी प्रकार, यदि मापन पेंचमापी जैसे किसी यंत्र द्वारा किया जाए जो 0.001 cm तक ठीक-ठीक नाप सकता है तो व्यास 2.000 cm अर्थात् चार सार्थक अंको तक रिकॉर्ड किया जाएगा। अत: मापन का अभिलेखन मापक यंत्र की यथार्थता को ध्यान में रखते हुए किया जाना चाहिए।

गणनाओं का परिणाम व्यक्त करने में सार्थक अंकों का महत्व

माना कि कोई विद्यार्थी एक घन की कोर मीटर स्केल से मापता है जो 3.2 cm आता है। वह गणना द्वारा इस घन का आयतन परिकलित करता है और इसे $(3.2 \times 3.2 \times 3.2)$ घन

सेन्टीमीटर या 32.768 cm^3 रिपोर्ट करता है। यह परिणाम गणित की दृष्टि से तो सही है परन्तु वैज्ञानिक मापन की दृष्टि से यथार्थ नहीं है। आयतन का जो सही मान बताया जाना चाहिए वह है 33cm^3 । ऐसा इसलिए है क्योंकि घन की कोर की माप में केवल दो सार्थक अंक हैं अत: परिणाम में भी दो ही सार्थक अंक होने चाहिए जबकि 32.768 में पाँच सार्थक अंक हैं जो ठीक नहीं है।

जोड़, घटा, गुणा और भाग संक्रियाओं में सार्थक अंक

(i) **जोड़ और घटा**– माना हमें तीन राशियों 2.7m, 3.68m तथा 0.486 m को जोड़ना है। इन राशियों में पहला माप केवल एक दशमलव अंक तक ही ज्ञात है अत: ये राशियाँ एक दशमलव अंक तक ही निश्चित होंगी। इसलिए इन राशियों का योग 6.848 न लिख कर 6.8 लिखा जाना चाहिए।

इसी प्रकार 2.65×10^3 cm और 2.65×10^2 cm का योग ज्ञात करने के लिए पहले सभी संख्याओं को 10 की समान घातों के पदों में व्यक्त करना चाहिए। तब राशियाँ हो जायेंगी, 2.65×10^3 cm तथा 0.263×10^3 cm। क्योंकि पहली संख्या दो दशमलव अंकों तक ज्ञात है इनका योग भी 2 दशमलव अंकों तक होना चाहिए। अत: $2.65 \times 10^3 \text{ cm} + 0.263 \times 10^3 \text{ cm} = 2.91 \times 10^3$ cm.

यही बात घटाने की संक्रिया पर भी लागू होती है। उदाहरण के लिए 4.6 cm में से 2.38 cm घटाने पर परिणाम 2.2 cm होगा न कि 2.22 cm

(ii) **गुणा एवं भाग**– माना कि किसी प्लेट की लम्बाई 3.003 m और चौड़ाई 2.26 m मापी गई । गणनात्मक परिकलन के अनुसार इसका क्षेत्रफल 6.78678 m^2 होगा। परन्तु वैज्ञानिक मापन की दृष्टि से यह सही नहीं है। इस परिणाम में छ: सार्थक अंक हैं। किन्तु न्यूनतम सार्थक अंकों की संख्या (चौड़ाई के मापन में) केवल तीन है। अत: परिणाम को भी केवल तीन सार्थक अंकों तक ही लिखा जाना चाहिए। अत: क्षेत्रफल का सही मान 6.79 m^2 होगा।

यही विधि भाग के लिए भी लागू होती है। उदाहरण के लिए 248.57 को 56.9 से भाग देने पर भागफल 4.3685413 प्राप्त होता हैं परन्तु परिणाम को तीन सार्थक अंको तक ही लिखना है क्योंकि भाजक में सार्थक अंकों की संख्या तीन है जो दोनों संख्याओं में न्यूनतम है। अत: परिणाम होगा: 4.37।

इसी प्रकार, यदि कोई पिंड 142 s में 1452 m चलता है तो इसकी चाल, गणितीय परिकलन से $\dfrac{1452 \text{ m}}{142 \text{ s}}$ अथवा 10.225352 ms^{-1} होगी परन्तु वैज्ञानिक मापनों में इसे 10.2 ms^{-1} लिखा जाएगा क्योंकि समय के मान में केवल 3 सार्थक अंक हैं।

(iii) **गणनाओं में प्रयुक्त नियतांकों के मान**– यदि वृत्त की त्रिज्या 3.35 cm हो तो क्षेत्रफल (πr^2) का परिकलन करने के लिए π का मान दो दशमलव अंकों तक (अर्थात π = 3.14) ही लिया जाना चाहिए (3.1416 नहीं)। अत: वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = (3.14 \times 3.35 \times 3.35)\ cm^2 = 35.2\ cm^2$ होगा न कि 35.23865 cm^2।

(iv) यदि किसी मापित राशि को किसी नियतांक से गुणा किया जाता है तो गुणनफल में सभी अंक सार्थक होते हैं। उदाहरण के लिए, यदि किसी गेंद का द्रव्यमान 32.59 g है तो ऐसी 10 गेदों का द्रव्यमान $32.59 \times 10 = 325.90$ g होगा। ध्यान दीजिए कि इसमें सार्थक अंकों की संख्या पाँच है।

1.2.4 व्युत्पन्न मात्रक

अब तक हमने द्रव्यमान, लंबाई और समय मापन के लिये तीन मूल मात्रकों को परिभाषित किया है। अनेक राशियों के मापन के लिए हमें अन्य मात्रकों की आवश्यकता होती है जिन्हें मूल मात्रकों के विभिन्न संयोगों द्वारा प्राप्त किया जाता है। इन मात्रकों को व्युत्पन्न मात्रक कहते हैं। उदाहरणतया लंबाई एवं समय के मात्रकों की सहायता से चाल या वेग का मात्रक प्राप्त होता है जिसे ms^{-1} द्वारा दर्शाया जाता है। दूसरा उदाहरण लंबाई के मात्रक की स्वयं के साथ अन्योन्य क्रिया है जिसके द्वारा क्षेत्रफल एवं आयतन के मात्रकों की व्युत्पत्ति होती है और उन्हें क्रमश: m^2 और m^3 द्वारा दर्शाया जाता है।

अब हम आपसे आपकी सुपरिचित भौतिक राशियों व इनके मात्रकों की सूची तैयार किये जाने की अपेक्षा करते हैं।

कुछ व्युत्पन्न मात्रकों को विशेष नाम दिये गये हैं। निम्न सारणी में साधारणतया उपयोग में आने वाले व्युत्पन्न मात्रक दिये गये हैं।

सारणी 1.6 : विशेष नाम वाले व्युत्पन्न SI मात्रकों के उदाहरण

राशि	नाम	प्रतीक	मूल मात्रक प्रतीक
बल	न्यूटन	N	$kg\,m\,s^{-2}$
दाब	पास्कल	Pa	$N\,m^{-2}$
ऊर्जा/कार्य	जूल	J	$N\,m$
शक्ति	वाट	W	$J\,s^{-1}$

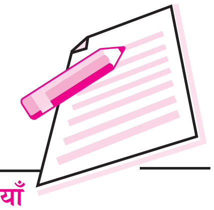
SI प्रणाली के मात्रकों के प्रयोग का एक लाभ यह है कि ये एक संबद्ध समुच्चय (coherent set) बनाते हैं और किन्हीं दो SI मात्रकों के गुणन या परस्पर विभाजन द्वारा प्राप्त व्युत्पन्न मात्रक एक अन्य SI मात्रक होता है। उदाहरणतया, बल एवं लंबाई के SI मात्रकों का गुणन कार्य के SI मात्रक को निर्मित करता है। मात्रकों को लिखे जाने के क्रम में कुछ सावधानी बरती जानी चाहिये, उदाहरणतया, Nm को इसी क्रम में लिखा जाना चाहिये। यदि भूल से हम इसे mN लिख दें तो यह मिलीन्यूटन बन जाता है जो कि पूर्णतया अलग बात है।

याद रखें कि भौतिकी में कोई भी राशि सही मात्रकों के साथ प्रयोग की जानी चाहिए अन्यथा यह निरर्थक होगी।

उदाहरण 1.1 : आनन्द, रीना एवं कैफ के अध्यापक ने उन्हें एक बीकर में भरे पानी का आयतन मापने को कहा

आनन्द ने 200 लिखा; रीना ने 200 mL लिखा; कैफ ने 200 Lm लिखा

कौन सा उत्तर सही है?



हल : पहले उत्तर में कोई मात्रक नहीं है अत: इससे कोई आशय स्पष्ट नहीं होता, तीसरा उत्तर भी ठीक नहीं है क्योंकि Lm मात्रक नहीं होता। केवल दूसरा उत्तर सही है। यह मिलीलीटर मात्रक को दर्शाता है।

एक पुस्तक का द्रव्यमान kg या g में अभिव्यक्त किया जा सकता है। **आप ग्राम के लिये gm प्रयोग न करें क्योंकि ग्राम का सही प्रतीक g है न कि gm।**

नामपद्धति एवं प्रतीक

(i) मात्रकों के प्रतीकों में पूर्ण विराम का प्रयोग नहीं किया जाना चाहिए और इसे एकवचन में प्रयोग किया जाना चाहिए। उदाहरण के लिए, पेंसिल की लंबाई 7cm लिखी जानी चाहिये न कि 7cm. या 7cms।

(ii) यदि एकल पूर्वलग्न उपलब्ध हों तो दोहरे पूर्वलग्नों को प्रयोग नहीं किया जाना चाहिए। उदाहरणतया, नेनोसेकंड के लिये ns लिखा जाना चाहिए न कि mμs; इसी प्रकार पिकोफैरड के लिये pF प्रयोग किया जाना चाहिए नकि μμf।

(iii) एक मात्रक के प्रतीक के पूर्व एक पूर्वलग्न प्रयोग किया जाता है तो पूर्वलग्न और प्रतीक के संयोग को एक प्रतीक माना जाना चाहिये जिसे बिना कोष्ठकों के प्रयोग के धनात्मक एवं ऋणात्मक घातों के रूप में लिखा जा सकता है। उदाहरणतया, μs^{-1}, cm^2, mA^2

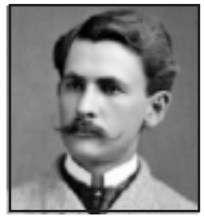
$\mu s^{-1} = (10^{-6} s)^{-1}$ (न कि $10^{-6} s^{-1}$)

(iv) $cm\, s^{-2}$ के स्थान पर cm/s/s का प्रयोग न करें, इसी प्रकार 1 प्वाज = $1\, g\, s^{-1} cm^{-1}$ लिखें न कि 1 g/s/cm

(v) जब एक वाक्य में किसी मात्रक को पूरा लिखा जाना हो तो छोटे अक्षरों का व्यवहार किया जाना चाहिये न कि बड़े अक्षरों का। उदाहरणतया, 6 hertz लिखा जाना चाहिये न कि 6 Hertz।

(vi) बड़ी संख्याओं को पढ़ने की सुविधा के लिये दायें से बायें 3 के समूह में व्यवस्थित किया जाना चाहिये किन्तु कोई अल्पविराम प्रयोग नहीं किया जाना चाहिये, उदाहरणतया, 1 532; 1 568 320

अल्बर्ट अब्राहम माइकेलसन
(1852–1931)



जर्मन अमरीकी भौतिक शास्त्री, आविष्कारक एवं प्रयोगकर्त्ता जिन्होंने माइकेलसन व्यतिकरणमापी का निर्माण किया और मोर्ले के साथ मिलकर, ईथर के सापेक्ष पृथ्वी की गति पता लगाने का प्रयास किया जिसमें ये असफल रहे। तथापि, असफल प्रयोग ने वैज्ञानिक जगत को पुराने सिद्धांतों पर पुनर्विचार करने को प्रेरित किया जिसके फलस्वरूप नवीन भौतिकी का आविर्भाव हुआ।

बाह्य दर्पणों के प्रयोग द्वारा उन्होंने दूरबीनों की विभेदन क्षमता बढ़ाने की एक तकनीक विकसित की। अपने नक्षत्रीय व्यतिकरणमापी और हुक्स के 100" दूरबीन की सहायता से उन्होंने तारों के बारे में कुछ परिशुद्ध माप लिये।

अब आपकी प्रगति को परखने का समय आ गया है। निम्न प्रश्नों को हल करें यदि आपकी कोई समस्या हो तो पाठ के अंत में दिये गये उत्तरों को देखें।

पाठगत प्रश्न 1.1

1. भौतिकी के नियमों की प्रकृति की विवेचना कीजिए।
2. भौतिकी के नियमों के अनुप्रयोग हमारे जीवन स्तर की गुणवत्ता में सुधार हेतु किस प्रकार सहायक हैं?
3. मापन में सार्थक अंकों से क्या अभिप्राय: है?
4. संबद्ध नियमों को उद्धृत करते हुए निम्नलिखित राशियों में सार्थक अंकों की संख्या बताइए।
   (i) 426.69 (ii) 4200304.002 (iii) 0.3040 (iv) 4050 m (v) 5000
5. किसी दिए गए पिंड की लम्बाई 3.486 m है। यदि इस लम्बाई को सेंटीमीटर में 348.6 cm व्यक्त किया जाता है तो क्या इन दोनों दशाओं में मापी गई लम्बाई में सार्थक अंकों की संख्या में कोई परिवर्तन होगा?
6. विमाओं के सिद्धान्तों के कोई चार अनुप्रयोग लिखिए। ये किस सिद्धान्त पर आधारित है।
7. सूर्य का द्रव्यमान 2×10^{30} kg है। प्रोटॉन का द्रव्यमान 2×10^{-27} kg है। यदि सूर्य को केवल प्रोटॉनों द्वारा बना मान लें तो सूर्य में प्रोटॉनों की संख्या का परिकलन कीजिए।
8. पहले प्रकाश की तरंगदैर्घ्य को ऐंग्स्ट्रम में व्यक्त किया जाता था, एक ऐंग्स्ट्रम 10^{-8} cm के बराबर होता है। अब प्रकाश की तरंगदैर्घ्य को नैनोमीटर में व्यक्त किया जाता है। एक नैनोमीटर में कितने ऐंग्स्ट्रम होते हैं।
9. एक रेडियो स्टेशन 1370 kHz कंपन आवृत्ति संप्रेषित कर रहा है। इस कंपन आवृत्ति को GHz में व्यक्त कीजिए।
10. एक डेकामीटर में कितने डेसीमीटर होते हैं? एक GW में कितने MW होते हैं?

1.3 भौतिक राशियों की विमाएं

इस पाठ्यक्रम में आप जिन भौतिक राशियों के बारें में पढ़ेंगे उनमें से अधिकतर पाँच मूल विमाओं के रूप में व्यक्त की जा सकती है। द्रव्यमान को (M), लंबाई को (L), समय को (T), विद्युत धारा को (A) व ताप को (θ) द्वारा व्यक्त किया जाता है क्योंकि यांत्रिकी में सभी राशियों को द्रव्यमान, लंबाई एवं समय के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है, अत: हमारे वर्तमान प्रयोजन के लिये केवल इन्हीं तीन विमाओं को व्यवहार में लाना पर्याप्त होगा। निम्न उदाहरणों से यह बात स्पष्ट हो जायेगी कि किस प्रकार भौतिक राशियों की विमाओं को M, L एवं T की घातों के संयोग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

(i) आयतन के लिये लंबाई के तीन मापों की आवश्यकता होती है। अत: इसको लंबाई में तीन विमाओं (L^3) के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है।

(ii) द्रव्यमान को आयतन से विभाजित करने पर घनत्व प्राप्त होता है। इसका विमीय सूत्र ML^{-3} है।

(iii) चाल, इकाई समय में चली गयी दूरी अथवा लंबाई/समय है, इसका विमीय सूत्र LT^{-1} है।

(iv) त्वरण इकाई समय में वेग परिवर्तन है अर्थात् लंबाई प्रति इकाई समय प्रति इकाई समय, इसका विमीय सूत्र LT^{-2} है।

(v) द्रव्यमान एवं त्वरण का गुणनफल बल कहलाता है। इसका विमीय सूत्र MLT^{-2} है।

इसी प्रकार हम अन्य भौतिक राशियों की विमायें लिख सकते हैं।

स्मरण रहे कि भौतिक मात्राओं से संबंधित अंक विमीय महत्व के नहीं हैं। इस प्रकार यदि x की विमा L है तो $3x$ की विमा भी L ही होगी।

द्रव्यमान एवं वेग के गुणनफल संवेग तथा बल एवं विस्थापन के गुणनफल कार्य की विमाएं लिखिए।

स्मरण रहे विमाएं एवं मात्रक एक-दूसरे के पर्यायवाची नहीं हैं। उदाहरण के लिए चाल को मीटर/सेकंड (ms^{-1}) या किलोमीटर प्रति घंटा के रूप में मापा जा सकता है लेकिन इसकी विमाएं सदैव लंबाई की विमा को समय की विमा से विभाजित करके या LT^{-1} द्वारा दर्शायी जायेंगी।

विमीय विश्लेषण किसी राशि या राशियों के संयोजन की विमाओं की जाँच की एक प्रक्रिया है। विमीय विश्लेषण का एक महत्वपूर्ण सिद्धांत यह है कि किसी समीकरण के दोनों ओर प्रत्येक राशि की विमा समान होनी चाहिये। अत: यदि $x = p + q$, तो p और q की वही विमायें होंगी जो कि x की। इससे हमें समीकरणों की सत्यता और किसी समीकरण में प्रयुक्त राशियों की विमाऐं पता चल जाती हैं। निम्न उदाहरण विमीय विश्लेषण की उपयोगिता को दर्शाते हैं।

1.3.1 विमाओं (अथवा विमीय समीकरणों) के अनुप्रयोग

विमाओं (या विमीय समीकरणों) के निम्नलिखित चार अनुप्रयोग हैं।

(i) विभिन्न भौतिक राशियों में संबंध स्थापित करना (या सूत्र की व्युत्पत्ति)।

(ii) दिए गए सूत्र (अथवा विभिन्न भौतिक राशियों के बीच संबंध) की संगतता की जाँच।

(iii) एक मात्रक प्रणाली से दूसरी मात्रक प्रणाली में बदलना, तथा

(iv) किसी भौतिक राशि के मात्रकों की व्युत्पत्ति।

उपर्युक्त अनुप्रयोग इस सिद्धान्त पर आधारित हैं कि किसी भौतिक दृष्टि से सही संबंध /समीकरण/सूत्र के दोनों ओर के प्रत्येक पद की विमाएं समान होंगी। यह विमाओं की समांगता का सिद्धान्त कहलाता है।

टिप्पणियाँ

उदाहरण 1.2 : आपको पहले से ही यह ज्ञान है कि m द्रव्यमान के कण की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}mv^2$ एवं स्थितिज ऊर्जा mgh है जहाँ v कण का वेग, h धरातल से ऊँचाई और g गुरुत्वीय त्वरण है। ये दोनों अभिव्यक्तियाँ एक ही भौतिक राशि, ऊर्जा को दर्शाती है अत: इनकी विमाएं भी एक समान होनी चाहिये। इसे दोनों अभिव्यक्तियों की विमाऐं लिखकर सिद्ध करें।

हल : $\frac{1}{2}mv^2$ की विमाऐ $M.(LT^{-1})^2$ या ML^2T^{-2} हैं (स्मरण रहे अंकों की कोई विमा नहीं होती)। mgh की विमायें $M.LT^{-2}.L$ या ML^2T^{-2} हैं। स्पष्टतया दोनों अभिव्यक्तियाँ समान हैं और समान भौतिक राशि को निरूपित करती हैं।

अब हम एक दूसरे उदाहरण द्वारा एक भौतिक राशि को अन्य भौतिक राशियों के रूप में अभिव्यक्त करेंगे।

उदाहरण 1.3 : हमारा अनुभव बताता है कि विरामावस्था से प्रारंभ करके एकसमान त्वरण से गतिशील कार द्वारा तय की गई दूरी x, समय t तथा त्वरण a पर निर्भर करती है। विमीय विश्लेषण का उपयोग करके तय की गई दूरी का व्यंजक ज्ञात कीजिए।

हल : माना राशि x t, की घात m (t^m) एवं a की घात n (a^n) के समानुपाती है। इसे हम, $x \propto t^m . a^n$ लिख सकते हैं जहाँ α समानुपात का प्रतीक है।

दोनों ओर विमाओं के रूप में अभिव्यक्त करने पर हम पाते हैं कि

$$L^1 \propto T^m (LT^{-2})^n,$$

या

$$L^1 \propto T^{m-2n} L^n.$$

दोनों ओर की L व T के घातों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि $n = 1$ व $m = 2$, अत:

$$x \propto t^2 a^1, \text{ या } x \propto at^2.$$

हम विमीय विश्लेषण द्वारा केवल यहीं तक पहुँच सकते हैं। इससे हमें आंकिक गुणक प्राप्त नहीं होते क्योंकि अंकों की कोई विमायें नहीं होतीं। आंकिक गुणक हमें सिद्धांत या परीक्षण से प्राप्त होते हैं। इस उदाहरण में हमें ज्ञात है कि पूर्ण संबंध $x = (1/2)at^2$ द्वारा निरूपित होता है।

आंकिक गुणकों के अलावा दूसरी राशियों जैसे कोण व त्रिकोणमितीय फलनों के कोणांक (ज्या, कोज्या आदि) एवं लघुगणिकीय फलन विमाहीन होते हैं। $\sin x$ में x, sine (ज्या) फलन का कोणांक (स्वतंत्र चर) कहलाता है। e^x में x चरघातांकी फलन का कोणांक (स्वतंत्र चर) कहलाता है।

अब हम एक छोटा सा विराम लेते हैं और निम्न प्रश्नों की सहायता से आपकी प्रगति की जाँच करते हैं।

पाठगत प्रश्न 1.2

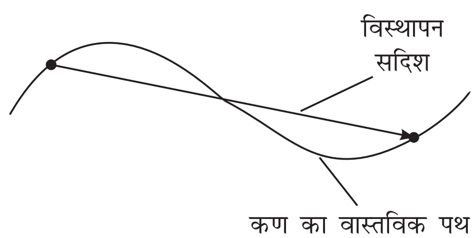
1. सरल लोलक द्वारा किये गये प्रयोग दर्शाते हैं कि इसका आवर्तकाल (T) इसकी लंबाई (l) व गुरुत्वीय त्वरण (g) पर निर्भर करता है। विमीय विश्लेषण की सहायता से T का l एवं g से संबंध स्थापित कीजिए।
2. कल्पना कीजिये कि एक कण r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ में υ वेग व a त्वरण से गतिशील है। विमीय विश्लेषण द्वारा दर्शाइये कि $a \propto \upsilon^2/r$ ।
3. आपको एक समीकरण $m\upsilon = Ft$ दिया गया है, m द्रव्यमान, υ वेग, F बल एवं t समय है इस समीकरण की विमीय सत्यता की जाँच कीजिए।

1.4 सदिश एवं अदिश

1.4.1 सदिश एवं अदिश राशियाँ

भौतिक विज्ञान में हम भौतिक राशियों को दो समूहों में वर्गीकृत करते हैं। एक दशा में हम केवल उनका परिमाण व्यक्त करके उनकी पूर्ण जानकारी दे देते हैं। उदाहरणतया, यदि हम कहें कि किसी गेंद का द्रव्यमान 50 g है तो यह द्रव्यमान के विषय में पूर्ण जानकारी है। इसी प्रकार यह कथन कि पानी का घनत्व 1000 kg m^{-3} है, स्वयं में पूर्ण है। **इस प्रकार की राशियों को अदिश राशियाँ कहते हैं।**

दूसरी ओर कुछ राशियों की पूर्ण जानकारी के लिये परिमाण एवं दिशा दोनों की आवश्यकता होती है। इसका एक सरल उदाहरण वेग हैं केवल यह कथन कि रेलगाड़ी का वेग 100 km h^{-1} है पर्याप्त नहीं है। हमें रेलगाड़ी की गति की दिशा भी दर्शानी पड़ेगी। दूसरा उदाहरण बल है। हमें परिमाण के साथ बल की दिशा भी दर्शानी आवश्यक है। इस प्रकार की राशियाँ सदिश कहलाती हैं। **एक सदिश राशि में परिमाण एवं दिशा दोनों निहित हैं।**



चित्र 1.3: विस्थापन सदिश

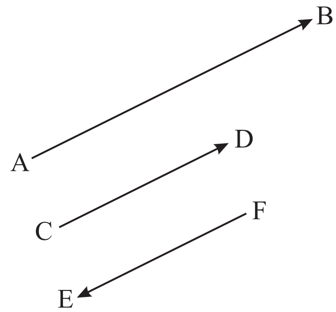
विस्थापन, त्वरण, संवेग, कोणीय संवेग एवं आघूर्ण आदि सदिश राशियाँ हैं जिनका प्रयोग यांत्रिकी में किया जाता है।

ऊर्जा क्या है? अदिश या सदिश?

सोचें क्या ऊर्जा से दिशा संबंधित है यदि नहीं तो यह एक अदिश राशि है।

1.4.2 सदिश निरूपण

एक सदिश को एक तीरांकित रेखा द्वारा निरूपित किया जाता है। चित्र 1.4 में सदिश AB को उदाहरणस्वरूप लें। इसमें रेखा की लंबाई किसी पैमाने में इसके परिमाण को बतलाती है और



चित्र 1.4 : सदिशों की दिशायें और परिमाण

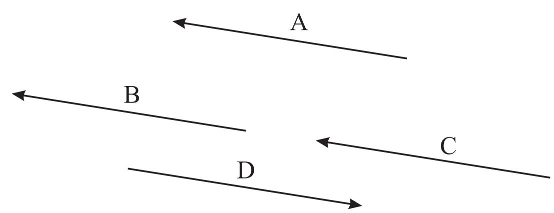
तीर इसकी दिशा को बतलाता है। सदिश CD की दिशा भी सदिश AB के समान है किंतु परिमाण भिन्न है। सदिश EF का परिमाण, सदिश CD के बराबर है लेकिन इसकी दिशा भिन्न है। किसी भी सदिश में आरंभिक बिंदु (**AB** में बिंदु A) **सदिश पुच्छ** एवं अंतिम बिंदु (**AB** में B) **सदिश शीर्ष** कहलाता है।

एक सदिश को इसको निरूपित करने वाले शब्द के ऊपर तीरांकन द्वारा दर्शाया जाता है, उदाहरणतया, $\vec{A}$ सदिश $\vec{A}$ का परिमाण A अथवा $|\vec{A}|$ है। मुद्रण में सदिश राशि को मोटे अक्षर जैसे **A** द्वारा दर्शाया जाता है।

यदि दो सदिशों की दिशा एवं परिमाण एक हों तो वे **समतुल्य** कहलाते हैं। इसका आशय यह हुआ कि सभी सदिश जो एक दूसरे के समानांतर हो, समान परिमाण वाले हों और एक ही दिशा में हों वे सभी समतुल्य माने जायेंगे। चित्र 1.5 में दर्शाये गये सदिश **A, B** और **C** समान हैं, अत: **A = B = C** लेकिन **D A** के समतुल्य नहीं है।

यहाँ सदिश **D** का परिमाण A के बराबर है लेकिन इसकी दिशा विपरीत है, इसे **A** का ऋणात्मक सदिश माना जा सकता है। अत: **D = –A** या **A = –D**

एक भौतिक सदिश राशि का परिमाण दर्शाने के लिये सदैव एक आनुपातिक पैमाने का चयन किया जाता है। उदाहरणतया दिल्ली एवं आगरा के बीच के 200 km के सदिश विस्थापन को 100 km = 1 cm के पैमाने से दर्शाया जा सकता है। इसी प्रकार 20 N के बल को 10N = 1cm के पैमाने में 2cm से सदिश द्वारा दर्शाया जा सकता है।



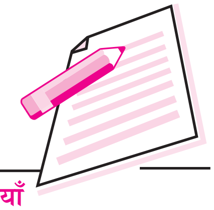
चित्र 1.5 : तीन सदिश समान हैं लेकिन चौथा सदिश D समान नहीं है।

उपरोक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट होता है कि यदि हम किसी सदिश को उसके समानांतर विस्थापित करें तो यह अपरिवर्तित रहता है। इस महत्वपूर्ण परिणाम को सदिशों के योग में उपयोग किया जाता है। देखें यह कैसे होता है?

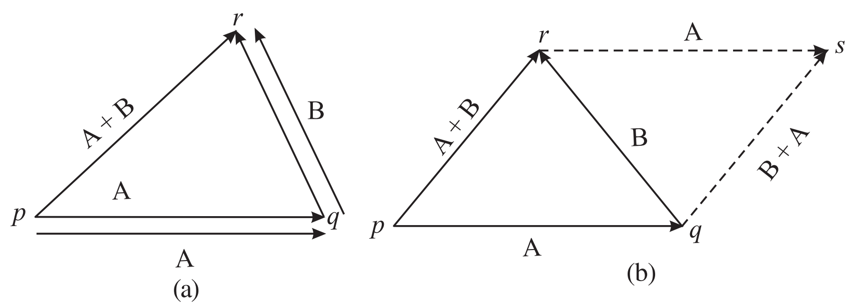
1.4.3 सदिशों का योग

याद रखें कि केवल **समान प्रकार के सदिशों का योग** किया जा सकता है। उदाहरणतया दो बलों अथवा दो वेगों को जोड़ा जा सकता है। लेकिन एक बल तथा एक वेग को नहीं जोड़ा जा सकता।

यदि आप सदिश **A** और सदिश **B** का योग करना चाहते हैं तो सर्वप्रथम सदिश **A** को पुन: दर्शायें (चित्र 1.6 (a)) इसके लिये एक रेखा (यथा *pq*) **A** के समानांतर खींचे। फिर सदिश **B** को



इस प्रकार बनायें कि इसका पुच्छ भाग सदिश **A** के शीर्ष से जुड़ जाये। इसके लिये सदिश **B** के समानांतर रेखा qr सदिश **A** के शीर्ष से खींचे। अब सदिश **A** के पुच्छ बिंदु एवं सदिश **B** के शीर्ष बिंदु q को मिलाने पर दोनों सदिशों का योग प्राप्त हो जायेगा और इनका परिणामी सदिश परिमाण एवं दिशा में रेखा pr द्वारा दर्शाया जायेगा। अब आप आसानी से सिद्ध कर सकते हैं कि सदिश योग क्रमविनिमेय है अर्थात् $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ जैसा कि चित्र 1.6 (b) में दर्शाया गया है। चित्र 1.6 (b) में हम देखते हैं कि pqr एक त्रिकोण है एवं इसकी भुजायें pq एवं qr क्रमश: सदिश **A** एवं सदिश **B** के परिमाण एवं दिशा को दर्शाती हैं, एवं त्रिकोण की तीसरी भुजा pr परिणामी सदिश pr को दर्शाती है जिसकी दिशा p से r की ओर है। इससे हमें दो सदिशों का परिणामी सदिश का नियम प्राप्त होता है।



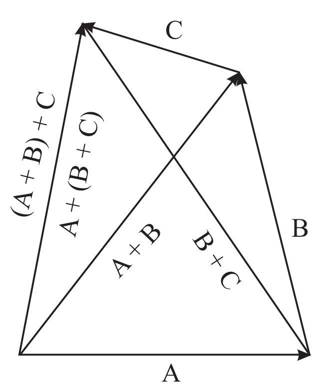
चित्र 1.6 : सदिशों A व B का योग

यदि दो सदिशों को परिमाण एवं दिशा में किसी त्रिभुज की दो क्रमागत भुजाओं द्वारा दर्शाया जाये तो इनके परिणामी सदिश को त्रिभुज की तीसरी भुजा को विपरीत क्रम में लेकर दर्शाया जाता है। इसे 'सदिशों का त्रिभुजीय नियम' कहा जाता है।

दो या अधिक सदिशों का योग **परिणामी** सदिश कहलाता है। चित्र 1.6(b) में **pr A** एवं **B** का परिणामी सदिश है। त्रिभुज की तीनों भुजाओं के अनुदिश एक क्रम में लगे तीन बलों का परिणामी बल क्या होगा? यदि आप सोचते हैं कि परिणामी बल शून्य होगा तो आप सही सोचते हैं।

अब हम दो से अधिक सदिशों का योग ज्ञात करना सीखते हैं।

दो से अधिक सदिशों **A**, **B** और **C** का परिणामी भी दो सदिशों **A** और **B** के परिणामी की भांति प्राप्त किया जा सकता है। पहले हम **A** और **B** का परिणामी (**A + B**) प्राप्त करते हैं फिर इसका योग **C** के साथ किया जा सकता है। वैकल्पिक रूप से आप **B** और **C** का योग प्राप्त कर सकते हैं (चित्र 1.7)। दोनों स्थितियों में परिणामी सदिश समान रहता है। अत: सदिश योग साहचर्यी है, अर्थात् $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$



चित्र 1.7 : दो भिन्न क्रमों में तीन सदिशों का योग

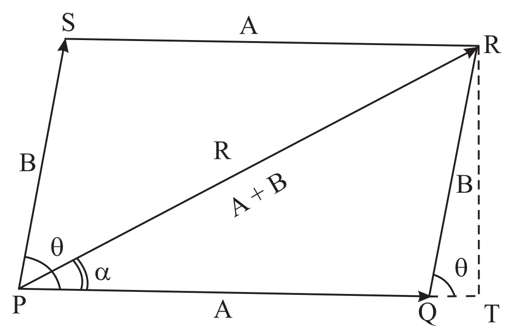
इसी प्रकार यदि आप तीन से अधिक सदिशों का योग प्राप्त करना चाहें तो **परिणामी सदिश प्रथम सदिश के पुच्छ को अंतिम सदिश के शीर्ष से मिलाने पर प्राप्त होगा।**

टिप्पणियाँ

कई बार अनेक सदिश एक ही बिंदु पर कार्य करते हैं। ऐसी स्थिति में सदिश योग के समान्तर चतुर्भुज नियम का उपयोग अधिक सुविधाजनक होता है। आइए इसके संबंध में अध्ययन करें।

1.4.4 सदिश योग का समांतर चतुर्भुज नियम

मान लीजिए कि चित्र 1.8 में दर्शाये अनुसार **A** और **B** दो सदिश हैं और उनके बीच का कोण θ है। इनका योग प्राप्त करने के लिये हम समातंर चतुर्भुज को पूर्ण करते हैं (यहाँ भुजा PQ सदिश **A** और भुजा PS सदिश **B** को दर्शाती है और कर्ण PR दोनों के परिणामी **R** को दर्शाता है। क्या आपको याद है कि कर्ण PR, **A** और **B** का योग है? यह **A** और **B** सदिशों का परिणामी सदिश है, परिणामी सदिश **A** की दिशा से α कोण बनाता है, याद रखें कि सदिश **PQ** और **SR** समान हैं और **A** के तुल्य है। इसी प्रकार सदिश **PS** और सदिश **QR** समान हैं और **B** के तुल्य हैं परिणामी सदिश **R** का परिमाण प्राप्त करने के लिये एक लम्ब RT गिरायें जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। तब परिमाणों के संदर्भ में



चित्र 1.8: सदिश योग का समांतर चतुर्भुज नियम

$$(PR)^2 = (PT)^2 + (RT)^2$$

$$\begin{aligned}
(PR)^2 &= (PT)^2 + (RT)^2 \\
&= (PQ + QT)^2 + (RT)^2 \\
&= (PQ)^2 + (QT)^2 + 2PQ.QT + (RT)^2 \\
&= (PQ)^2 + [(QT)^2 + (RT)^2] + 2PQ.QT \qquad (1.1) \\
&= (PQ)^2 + (QR)^2 + 2PQ.QT \\
&= (PQ)^2 + (QR)^2 + 2PQ.QR\,(QT / QR) \\
R^2 &= A^2 + B^2 + 2AB.\cos\theta
\end{aligned}$$

अत: **R** का परिमाण

$$|R| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB.\cos\theta} \qquad (1.2)$$

सदिश **R** की दिशा प्राप्त करने के लिये हम देखते हैं कि

$$\tan\alpha = \frac{RT}{PT} = \frac{RT}{PQ+QT} = \frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta} \qquad (1.3)$$

अत: परिणामी सदिश की दिशा इसके द्वारा आधार के सदिश से बनाये गये कोण द्वारा प्रदर्शित की जा सकती है।

विशिष्ट प्रकरण

आइए अब विचार करें कि दो समांतर सदिशों का परिणामी सदिश क्या होगा?

ध्यान दें कि दोनों सदिशों के बीच का कोण शून्य है और इनके परिणामी सदिश का परिमाण दोनों के परिमाण के योग के बराबर एवं दिशा समान रहेगी।

यदि दो सदिश एक दूसरे के लंबवत् हों तो उनके परिणामी सदिश का परिमाण क्या होगा? इस स्थिति में $\theta = 90^{o}$ और $\cos\theta = 0$

यदि इन दोनों के परिमाण समान हों तो परिणामी सदिश की दिशा क्या होगी?

ध्यान दें $\tan\alpha = B/A = 1$ तब α क्या है?

यह भी ध्यान दीजिए कि यदि $\theta = \pi$ है तब दो सदिश विपरीत दिशा में समांतर होते हैं। इस स्थिति में $\alpha = 0$। ऐसी स्थिति में परिणामी सदिश **A** या **B** की दिशा में होगा और दिशा इस बात पर निर्भर करती है कि किस सदिश का परिमाण अधिक है।

उदाहरण 1.4 अहमद एक गाड़ी को 70 N के बल से उत्तर दिशा में खींच रहा है और हामिद उसी गाड़ी को 50 N के बल से दक्षिण पश्चिम दिशा में खींच रहा है। परिणामी बल का परिमाण एवं दिशा का परिकलन कीजिए।

हल :

यहाँ पहले बल A का परिमाण = 70 N

दूसरे बल का B का परिमाण = 50 N

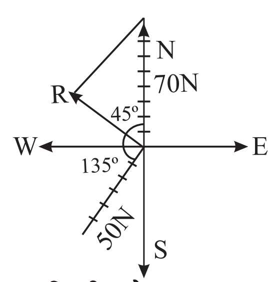
दोनों बलों के बीच का कोण $\theta = 135^{o}$ (135 डिग्री)

अत: परिणामी बल का परिमाण

$$R = \sqrt{(70)^2 + (50)^2 + 2\times70\times50\times\cos(135)}$$

$$= \sqrt{4900 + 2500 - 7000\times\sin45}$$

$$= 49.5\ N$$



चित्र 1.9: किसी कोण पर आनत बलों का परिणामी बल

R का परिमाण = 49.5 N

परिणामी बल की दिशा समीकरण 1.3 द्वारा ज्ञात की जायेगी,

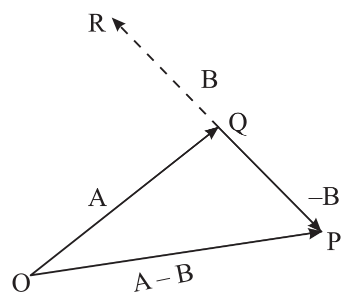
$$\tan\alpha = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta} = \frac{50\times\sin(135)}{70+50\cos(135)} = \frac{50\times\cos 45}{70-50\sin 45} = 1.0$$

अत: $\alpha = 45.0^\circ$ इस प्रकार परिणामी **R** उत्तर की ओर लगने वाले 70N बल से 45° का कोण बनाता है। इस प्रकार **R** की दिशा उत्तर पश्चिम है (चित्र 1.9)।

1.4.5 सदिशों का घटाना

हम एक सदिश को दूसरे सदिश से किस प्रकार घटाते हैं? ध्यान दें कि दो सदिशों का अंतर **A – B** वास्तव में **A + (–B)** के बराबर है। तब आप दो सदिशों को जोड़ने की पूर्व वर्णित विधि अपना सकते हैं। इसकी व्याख्या चित्र 1.10 में की गयी है। **A** के शीर्ष से **–B** सदिश खींचे। **A** के पुच्छ और **–B** के शीर्ष को मिलाने पर परिणामी सदिश **(A – B)** प्राप्त हो जायेगा।

अब आपकी प्रगति जानने का समय है।



चित्र 1.10 : सदिश B को सदिश A से घटाना

पाठगत प्रश्न 1.3

दो सदिश $\xrightarrow[A]{}$ और $\nearrow B$ दिये गये हैं।

1. इनके द्वारा चित्र बनाकर दर्शायें कि किस प्रकार निम्न सदिश प्राप्त किये जा सकते हैं:

   (a) **B – A**, (b) **A + 2B**, (c) **A – 2B** और (d) **B – 2A**.

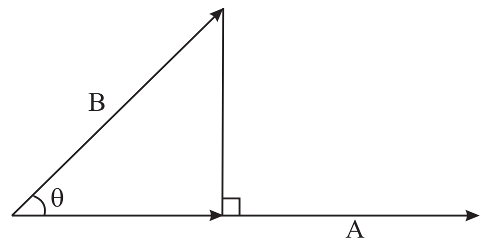
2. दो सदिशों **A** व **B** के परिमाण 10 इकाई एवं 12 इकाई है और ये एक दूसरे की विपरीत दिशा में समांतर हैं। परिणामी सदिश **A + B** तथा **A – B** प्राप्त करें।

3. दो सदिशों **A** और **B** के परिमाण क्रमश: 30 व 60 इकाई हैं और इनके बीच का दिशा अंतर 60° है। परिणामी सदिश प्राप्त करें (स्मरण रहे कि एक सदिश प्राप्त करने का तात्पर्य इसका परिमाण एवं दिशा दोनों ज्ञात करना है।

1.5 सदिशों का गुणन

1.5.1 एक सदिश का एक अदिश द्वारा गुणन

यदि हम एक सदिश **A** को एक अदिश k से गुणा करें तो हमें **A** के k गुना परिमाण का सदिश प्राप्त होगा। इसका अर्थ यह है कि परिणामी सदिश k**A** है। यदि k धनात्मक हो तो नये सदिश की दिशा अपरिवर्तित रहती है और यदि k ऋणात्मक हो तो नये सदिश की दिशा मूल सदिश की दिशा के विपरीत हो जाती है। उदाहरणार्थ, सदिश 3**A** का परिमाण **A** के परिमाण से तीन गुना है और दिशा समान है। लेकिन –3**A** सदिश की दिशा सदिश **A** के विपरीत है, यद्यपि इसका परिमाण सदिश **A** के परिमाण का तीन गुना है।



चित्र 1.11: B का A में प्रक्षेप

1.5.2 सदिशों का अदिश गुणन

दो सदिशों **A** और **B** के गुणन को **A.B** लिखा जाता है और इसका मान AB cosθ होता है जहाँ θ दोनों सदिशों के बीच का कोण है। चित्र 1.11 को ध्यान से देखने पर आप पायेंगे कि B cosθ सदिश **B** का सदिश **A** पर प्रक्षेप है। अत: **A** और **B** का अदिश गुणन **A** के परिमाण एवं **B** के **A** की दिशा में प्रक्षेप के बराबर होता है। दूसरी ध्यान देने योग्य बात यह है कि यदि हम दो सदिशों के बीच के कोण θ को (360 – θ) से निरूपित करें तो इसका कोई प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि दोनों के कोज्या अर्थात् cosθ और cos (360 – θ) का मान समान है। चूँकि दो सदिशों के बीच एक बिंदु अदिश गुणन को दर्शाता है अत: इसे बिंदु गुणन भी कहते हैं। याद रखें कि दो सदिशों का बिंदु गुणनफल एक अदिश राशि होती है।

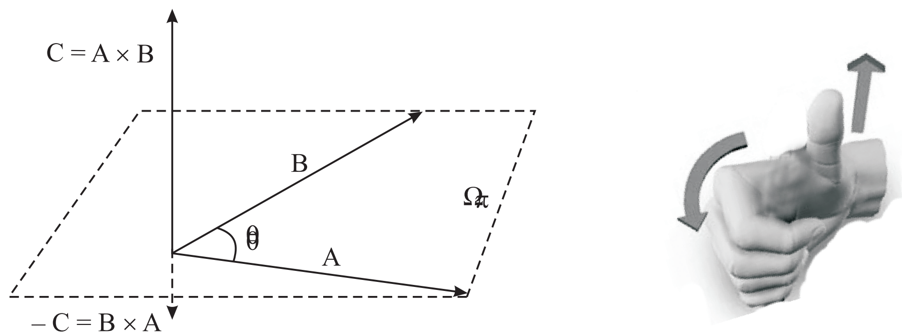
अदिश गुणन का एक सुपरिचित उदाहरण किसी गतिशील निकाय से एक कोण बनाते हुए लगने वाले बल द्वारा किया गया कार्य है। यदि निकाय का विस्थापन **d** और **F** के बीच का कोण θ हो तो बल द्वारा किया गया कार्य $Fd\cos\theta$ होता है।

बिंदु गुणन अदिश होने के कारण क्रमविनिमेयी है, अर्थात् **A.B** = **B.A** = ABcosθ यह वितरणीय भी है अर्थात् **A.(B + C) = A.B + A.C** (गुणन का वितरण नियम)

1.5.3 सदिशों का सदिश गुणन

मान लीजिए हमारे पास दो सदिश **A** और **B** हैं जिनके बीच का कोण θ है। हम एक ऐसा तल बना सकते हैं जिनमें ये दोनों सदिश स्थित हों। इस तल को हम Ω से संसूचित करते हैं और यह कागज के तल में है। अब इन सदिशों का गुणनफल **A** ×**B** एक सदिश **C** होगा (चित्र 1.12 a) जिसका परिमाण **AB** sinθ है और इसकी दिशा Ω तल के लंबवत् है। सदिश **C** की दिशा दाहिने हाथ के नियम द्वारा ज्ञात की जा सकती है (चित्र 1.12 b)। कल्पना कीजिए कि आपकी अंगुलियाँ **A** से **B** की दिशा में इन सदिशों के बीच के न्यून कोण के अनुदिश मुड़ी

है। तब अंगूठा परिणामी सदिश **C** की दिशा को दर्शाता है। यदि आप इस नियम का पालन करें तो आप आसानी से पायेंगे कि सदिश **B × A** की दिशा सदिश **A × B** की दिशा के विपरीत है। इसका अर्थ हुआ कि **सदिश गुणन क्रमविनिमेयी नहीं है**। चूँकि सदिश गुणन में दो सदिशों के बीच क्रॉस का चिन्ह प्रयोग किया जाता है अत: इसे क्रॉस गुणन भी कहते हैं।



(a) **(b)**

चित्र 1.12 (a) : सदिशों का सदिश गुणन (b) गुणन के फलस्वरूप प्राप्त सदिश C की दिशा C = A × B दाहिने हाथ के नियम द्वारा निर्धारित होती है यदि आपकी अंगुलियाँ न्यूनकोण बनाते हुए दो सदिशों के बीच A से B की दिशा में मुड़ी हों तो अंगूठा C की दिशा को प्रदर्शित करता है।

सदिश गुणन का एक सुपरिचित उदाहरण घूर्णन करते हुए निकाय का कोणीय संवेग है।

अपनी प्रगति का आंकलन करने के लिए निम्न प्रश्नों को हल करने का प्रयास करें।

पाठगत प्रश्न 1.4

1. माना एक सदिश **A,** सदिश **B** के समांतर है। उनका सदिश गुणनफल क्या होगा? यदि **B, A** के विपरीत दिशा में हो तो इनका सदिश गुणनफल क्या होगा?

2. माना हमारे पास एक सदिश **A** और एक सदिश $\mathbf{C} = \frac{1}{2}\mathbf{B}$ है। $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ की दिशा और $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ की दिशा के बीच क्या संबंध है?

3. यदि आप सदिश **A** और **B** को उनके तल में घुमायें तो $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ की दिशा किस प्रकार प्रभावित होगी?

4. यदि आप सदिश **A** और **B** को इस प्रकार घुमायें कि वे अपने तल पर ही बनें रहें तो क्या आप सदिश $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ की दिशा विपरीत कर सकेंगे?

5. यदि सदिश **A** *x*-अक्ष और सदिश **B** *y*-अक्ष के अनुदिश हों तो सदिश $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ की दिशा क्या होगी? यदि **A** *y*-अक्ष और **B** *x*-अक्ष के विपरीत हों तो इससे **C** किस प्रकार प्रभावित होगा?

6. यदि सदिश **A** और सदिश **B** परस्पर लंबवत् हों तो (a) **A . B** और (b) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ का मान परिकलित कीजिए।

1.6 सदिशों का वियोजन

सदिशों का वियोजन सदिशों के संयोजन के विपरीत प्रक्रिया है। वियोजन में हम नियत निर्देशांक अक्षों की दिशा में सदिशों के घटकों का मान ज्ञात करते हैं। माना हमारे पास एक सदिश **A** है जैसा कि चित्र 1.13 में दिखाया गया है और हम *x*-अक्ष व *y*-अक्ष की दिशा में इसके घटकों को ज्ञात करना चाहते हैं। माना ये घटक क्रमशः A_x और A_y हैं। सरल त्रिकोणमिति दर्शाती है कि

$$A_x = A\cos\theta \tag{1.4}$$

एवं

$$A_y = A\sin\theta, \tag{1.5}$$

यहाँ **A** और *x*-अक्ष के बीच का कोण θ है। यदि X-अक्ष और **A** के बीच कोण ϕ हो तो X और Y अक्ष की दिशा में सदिश **A** के घटकों का क्या मान होगा? (चित्र 1.13)।

$$A_X = A\cos\phi$$

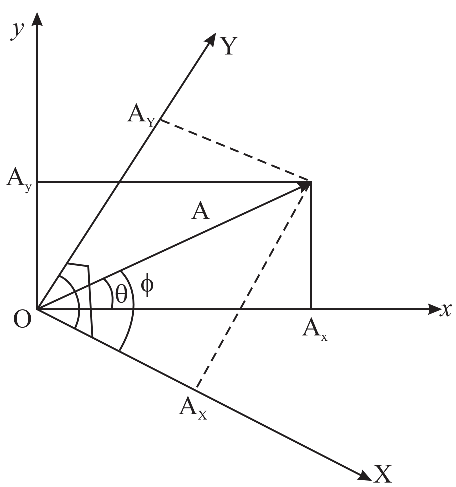
$$A_Y = A\sin\phi.$$

यहाँ एक बात स्पष्ट समझ लें कि सदिश के घटकों का मान नियत नहीं है वरन एक विशेष अक्षों के चयन के अनुसार परिवर्तनशील हैं। यह भी ध्यान दें कि सदिश **A** का परिमाण एवं दिशा इसके घटकों के संदर्भ में निम्न रूप से दर्शायी जा सकती है।

$$A = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2}} = \sqrt{A_X^{\,2} + A_Y^{\,2}} \tag{1.6}$$

और

$$\tan\theta = A_y / A_x, \qquad \tan\phi = A_Y / A_X. \tag{1.7}$$



चित्र 1.13 : सदिश A के दो निर्धारित निर्देशांक समुच्चयों *(x, y)* और (X, Y) के अनुदिश वियोजन

अतः यदि हमें एक सदिश के घटक मालूम हों तो इन समीकरणों की सहायता से हम सदिश **A** प्राप्त कर सकते हैं।

1.7 इकाई सदिश

अब हम इकाई सदिश की संकल्पना का समावेश करते हैं। जैसा कि नाम से स्पष्ट है इकाई सदिश का इकाई परिमाण होता है और एक निश्चित दिशा होती है। इसका कोई मात्रक या विमा नहीं होती। उदाहरण के तौर पर हम सदिश $\mathbf{A}$ को A $\hat{\mathbf{n}}$ लिख सकते हैं जहाँ $\hat{\mathbf{n}}$ सदिश $\mathbf{A}$ की दिशा में एक इकाई सदिश को इंगित करता है। ध्यान दें कि मात्रक सदिश का समावेश एक सदिश की दिशा की जानकारी के लिये किया गया है; $\mathbf{A}$ का परिमाण A द्वारा इंगित किया जाता है। निर्देशांक अक्षों की दिशा में इकाई सदिश विशेष रूप से महत्वपूर्ण है। x-अक्ष की दिशा में इकाई सदिश को $\hat{\mathbf{i}}$, y-अक्ष की दिशा में $\hat{\mathbf{j}}$ और z-अक्ष की दिशा में $\hat{\mathbf{k}}$ द्वारा दर्शाया जाता है। इस अंकन पद्धति के उपयोग से, सदिश $\mathbf{A}$ को, जिसके x व y अक्षों की दिशा में घटक क्रमशः A_x और A_y हैं, निम्न प्रकार निरूपित किया जा सकता है।

$$\mathbf{A} = A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} \tag{1.8}$$

इसी प्रकार दूसरे सदिश $\mathbf{B}$ को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\mathbf{B} = B_x\,\hat{\mathbf{i}} + B_y\,\hat{\mathbf{j}} \tag{1.9}$$

इन दो सदिशों का योग इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = (A_x + B_x)\,\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\,\hat{\mathbf{j}} \tag{1.10}$$

अदिश गुणन के नियमानुसार आप दर्शा सकते हैं कि

$$\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}}=1,\ \hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{j}}=1,\ \hat{\mathbf{k}}.\hat{\mathbf{k}}=1,\ \hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{j}}=0,\ \hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{k}}=0,\ \text{और}\ \hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{k}}=0 \tag{1.11}$$

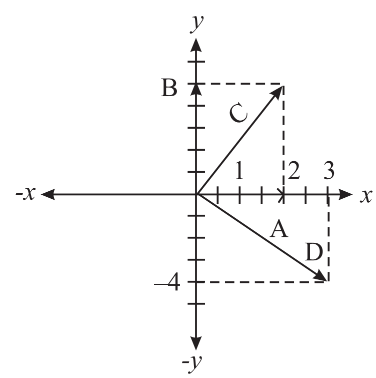
अब दो सदिशों $\mathbf{A}$ व $\mathbf{B}$ के बीच का बिंदु गुणनफल (अदिश गुणनफल) निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\begin{aligned}\mathbf{A}.\mathbf{B} &= (A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}}).(B_x\,\hat{\mathbf{i}} + B_y\,\hat{\mathbf{j}})\\ &= A_xB_x(\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}}) + A_xB_y(\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{j}}) + A_yB_x(\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{i}}) + A_yB_y(\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{j}})\\ &= A_xB_x + A_yB_y,\end{aligned} \tag{1.12}$$

यहाँ हमने समीकरण 1.11 के परिणामों का उपयोग किया है।

उदाहरण 1.4 एक निर्देशांक तंत्र में (सभी चार चतुर्थांशों को दर्शाते हुये) निम्न सदिशों को दर्शाइए। उनके परिमाण एवं दिशाएं ज्ञात कीजिए।

$\mathbf{A} = 4\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}}$, $\mathbf{B} = 0\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}$, $\mathbf{C} = 4\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}$, $\mathbf{D} = 6\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}$.



चित्र 1.14

हल : सदिशों को उनके घटकों के रूप में दिया गया है। $\hat{\mathbf{i}}$ का गुणन x घटक और $\hat{\mathbf{j}}$ का गुणक y घटक है। सभी सदिशों को निर्देशांक ग्रिड में दिखाया गया है (चित्र 1.14)।

सदिश **A** के घटक (अवयव) $\mathbf{A}_x = 4$, $\mathbf{A}_y = 0$, इसका परिमाण $\mathbf{A} = 4$ है और इसकी दिशा $\tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) = 0$ है अतः दिशा x-अक्षीय है। सदिश **B** के घटक (अवयव) x-अवयव $= 0$ अतः इसकी दिशा y-अक्षीय है और इसका परिमाण 5 है।

अब हम सदिश **C** पर विचार करते हैं, यहाँ $\mathbf{C}_x = 4$ और $\mathbf{C}_y = 5$ अतः **C** का परिमाण $C = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$. है और इसके द्वारा x-अक्ष से बना कोण $\tan^{-1}(\mathbf{C}_y/\mathbf{C}_x) = 51.3$ डिग्री है। इसी प्रकार **D** का परिमाण $D = \sqrt{60}$ और इसकी दिशा $\tan^{-1}(\mathbf{D}_y/\mathbf{D}_x) = \tan^{-1}(0.666) = -33.7^o$ (चौथे चतुर्थांश में है)

उदाहरण 1.5 उदाहरण 1.4 में दिए गए सदिशों के लिए गुणन **C . D** का मान प्राप्त कीजिए।

हल : **C** और **D** का बिंदु गुणन (अदिश गुणन) समीकरण (1.12) की सहायता से प्राप्त किया जा सकता है

$$\mathbf{C}\,.\,\mathbf{D} = C_x D_x + C_y D_y = 4\times6 + 5\times(-4) = 24 - 20 = 4.$$

दो सदिशों के क्रॉस गुणन (सदिश गुणन) को भी इकाई सदिशों के रूप में दर्शाया जा सकता है। इसके लिये हमें पहले इकाई सदिशों के क्रॉस गुणन (सदिश गुणन) की आवश्यकता होती है। इकाई सदिशों के बीच का कोण 90º होता है। उदाहरण के लिए, $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$ को लें, चूँकि इनके बीच के कोण की ज्या (sine) का मान एक होता है इसलिये सदिश गुणन का परिमाण भी 1 होता है। इसकी दिशा $\hat{\mathbf{i}}$ एवं $\hat{\mathbf{j}}$ की स्थिति के तल (xy तल) के अभिलंबवत् z-अक्षीय है। दाहिने हाथ के नियम के अनुसार हम पाते हें कि यह दिशा धनात्मक z-अक्षीय है, z - अक्ष में इकाई सदिश $\hat{\mathbf{k}}$ द्वारा दर्शाया जाता है। अतः

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\,. \qquad (1.13)$$

इसी तर्क के आधार पर हम दर्शा सकते हें कि

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}},\ \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}},\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}}, \qquad (1.14)$$

और

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0. \qquad (1.15)$$

उदाहरण 1.6 उदाहरण 1.4 में दिये गये सदिशों **C** एवं **D** के क्रॉस गुणन का मान ज्ञात कीजिए।

हल :
$$\mathbf{C} \times \mathbf{D} = (4\,\hat{\mathbf{i}} + 5\,\hat{\mathbf{j}}\,) \times (6\,\hat{\mathbf{i}} - 4\,\hat{\mathbf{j}}\,)$$
$$= 24\,(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}}\,) - 16\,(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}) + 30\,(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}) - 20\,(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}})$$

(समीकरणों 1.13 - 1.15 के परिणामों के उपयोग से)

$$\mathbf{C} \times \mathbf{D} = -16\,\hat{\mathbf{k}} - 30\,\hat{\mathbf{k}} = -46\,\hat{\mathbf{k}}$$

अत: **C** और **D** का क्रास गुणन एक सदिश है जिसका परिमाण 46 इकाई और दिशा ऋणात्मक z-अक्षीय है। चूँकि **C** और **D** xy-तल में है अत: स्पष्ट है कि इनका क्रॉस गुणक इस तल के लंबवत् होगा अर्थात् z-दिशा में होगा।

पुन: यह स्वयं परीक्षण का समय है। निम्न प्रश्नों का हल प्राप्त करें।

पाठगत प्रश्न 1.5

1. एक सदिश **A**, xy निर्देशांक तंत्र में x-अक्ष से 60° का कोण बनाता है। इसका परिमाण 50 इकाई है, इसके x और y दिशाओं में घटक प्राप्त करें। यदि दूसरा सदिश जिसका परिमाण समान है और यह x-अक्ष से 30° का कोण बनाता है तो इसके घटकों को प्राप्त करें। क्या ये पहले घटकों के समान हैं?

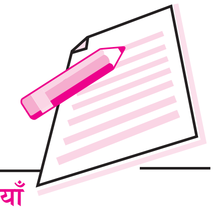
2. दो सदिशों **A** और **B** को क्रमश: $3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}$ और $-2\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}}$ द्वारा दर्शाया गया है। निर्देशांक ग्रिड में इन्हें दर्शाएं। इनका परिमाण ज्ञात करें और इनके द्वारा x-अक्ष के साथ बने कोण ज्ञात करें (चित्र 1.14)।

3. प्रश्न 2 में दिये सदिशों के बिंदु गुणनफल (अदिश गुणनफल) एवं क्रॉस गुणनफल प्राप्त करें।

आपने ऊपर सीखा कि एक सही समीकरण में प्रत्येक पद की विमायें समान होनी चाहिये। सदिश राशियों की जानकारी के बाद हम इसमें यह जोड़ सकते हैं कि **समीकरण के सही होने की स्थिति में इसमें प्रत्येक पद के अभिलक्षण समान हों या तो वे सभी सदिश हों या सभी अदिश।**

आपने क्या सीखा

- सार्थक अंकों की संख्या किसी माप की यर्थाथता निर्धारित करती है।
- प्रत्येक भौतिक राशि का मापन विशेष मात्रकों द्वारा किया व दर्शाया जाता है। वैज्ञानिक प्रतिवेदन के लिए हम सार्वत्रिक रूप से SI मात्रकों को अपनाते हैं।
- द्रव्यमान, लंबाई और समय के लिये मूल SI मात्रक क्रमश: kg, m और s हैं। मूल मात्रकों के अतिरिक्त व्युत्पन्न मात्रक भी होते हैं।
- प्रत्येक भौतिक राशि की विमायें होती हैं। समीकरणों की शुद्धता जाँचने के लिये विमीय विश्लेषण एक उपयोगी साधन है।
- भौतिकी में हम सामान्यतया दो प्रकार की राशियों का प्रयोग करते हैं–अदिश और सदिश। अदिश का केवल परिमाण होता है और सदिश का परिमाण व दिशा दोनों होते हैं।



टिप्पणियाँ

- सदिश राशियों को समान्तर चतुर्भुज नियम के अनुसार जोड़ा जाता है।
- दो सदिश राशियों का बिन्दु गुणनफल अदिश होता है।
- दो सदिशों का क्रॉस गुणनफल सदिश होता है और यह इन सदिशों के तल के लंबवत् होता है।
- सदिशों को एक विशेष निर्देशांक अक्षों की दिशा में घटकों के रूप में वियोजित किया जा सकता है।

पाठांत प्रश्न

1. बहुत लंबी दूरी मापन के लिये प्रयुक्त मात्रक प्रकाश वर्ष कहलाता है। यह प्रकाश द्वारा एक वर्ष में तय की गयी दूरी है। प्रकाश वर्ष को मीटर में व्यक्त कीजिए। (प्रकाश की चाल = 3×10^8 m s^{-1})

2. उल्काएं चट्टान के छोटे टुकड़े हैं जो कि यदा कदा बहुत उच्च वेग से पृथ्वी के वायुमण्डल में प्रवेश करते हैं। वायुमण्डल के घर्षण से वे अत्यधिक गर्म हो जाते हैं और अल्पकालिक विकिरण उत्सर्जित करते हुए धीरे-धीरे पूर्णतया जल जाते हैं। इसके परिणामस्वरूप एक प्रकाश रेखा दिखाई देती है जिसे 'टूटने वाला तारा' कहते हैं। उल्का की गति 51 kms^{-1} है। इसकी तुलना में 20^{0}C ताप पर वायु में ध्वनि का वेग 340 ms^{-1} है। दोनों गतियों के परिमाणों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

3. प्रारंभिक वेग u व समान त्वरण a से गतिशील कण द्वारा t समय में तय की गयी दूरी को $s = ut + (1/2)at^2$ समीकरण द्वारा दर्शाया जाता है। विमीय विश्लेषण द्वारा समीकरण की शुद्धता की जाँच कीजिए।

4. न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम के अनुसार r दूरी पर स्थित दो द्रव्यमानों m_1 व m_2 के बीच लगने वाला बल

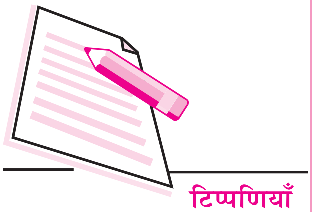
$$\mathrm{F} = \mathrm{G}\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

है, जहाँ G सार्वत्रिक नियतांक है, G की विमायें ज्ञात कीजिए।

5. हमीदा एक मेज को एक विशेष दिशा में 10 N के बल से धकेल रही है उसकी मित्र लीला इसी मेज को 8 N के बल से हमीदा द्वारा आरोपित बल की दिशा से 60^o का कोण बनाते हुये धकेल रही है। मेज पर आरोपित परिणामी बल का परिमाण एवं दिशा ज्ञात कीजिए।

6. एक भौतिक राशि दो सदिश राशियों का बिंदु गुणनफल (अदिश गुणनफल) है। यह राशि अदिश है या सदिश? दो सदिशों के क्रॉस (सदिश गुणन) द्वारा प्राप्त भौतिक राशि की प्रकृति क्या है?

7. जॉन एक गाड़ी को धरातल के समांतर बल लगाकर खींचना चाहता है। उसका मित्र राम इस बात पर जोर देता है कि धरातल से 30^o का कोण बनाते हुये बल लगाकर गाड़ी को खींचना अधिक आसान है, दोनों में कौन सही है और क्यों?



8. दो राशियाँ $5\,\hat{\mathbf{i}} - 3\,\hat{\mathbf{j}}$ और $3\,\hat{\mathbf{i}} - 5\,\hat{\mathbf{j}}$ से निरूपित की गयी हैं। इनके अदिश एवं सदिश गुणनफल प्राप्त कीजिए।

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

1.1

4. (i) 5 (ii) 10 (iii) 4 (iv) 4 (v) 1

5. नहीं, दोनों दशाओं में सार्थक अंकों की संख्या 4 रहेगी।

7. सूर्य का द्रव्यमान $= 2 \times 10^{30}$ kg

प्रोटॉन का द्रव्यमान $= 2 \times 10^{-27}$ kg

सूर्य में प्रोटॉनों की संख्या $= \dfrac{2\times10^{30}\,\text{kg}}{2\times10^{-27}\,\text{kg}} = 10^{57}$

8. 1 एंगस्ट्रॉम $= 10^{-8}$ cm $= 10^{-10}$ m

1 नैनोमीटर (nm) $= 10^{-9}$ m

∴ $1\text{ nm}/1\text{ Å} = 10^{-9}\text{ m}/10^{-10}\text{ m} = 10$ अत: 1 nm = 10 Å

9. $1370\text{ kHz} = 1370 \times 10^3\text{ Hz} = (1370 \times 10^3)/10^9\text{ GHz} = 1.370 \times 10^{-3}\text{ GHz}$

10. 1 डेकामीटर (dam) = 10 m

1 डेसीमीटर (dm) $= 10^{-1}$ m

∴ 1 dam = 100 dm

1 MW $= 10^6$ W

1 GW $= 10^9$ W

∴ 1 GW $= 10^3$ MW

1.2

1. लंबाई की विमा = L

समय की विमा = T

g की विमा $= LT^{-2}$

माना आवर्तकाल t, l^{α} और g^{β} के गुणनफल के समानुपाती है

अत: दोनों ओर की विमायें लिखने पर $T = L^{\alpha}(LT^{-2})^{\beta} = L^{\alpha+\beta}T^{-2\beta}$

L व T की घातों की तुलना करने पर

$\alpha + \beta = 0, 2\beta = -1 \Rightarrow \beta = -1/2$ और $\alpha = 1/2$

अत: $t \propto \sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

2. a की विमा $= LT^{-2}$

υ की विमा $= LT^{-1}$

r की विमा $= L$

माना a υ^{α} एवं r^{β} के गुणनफल का समानुपाती है

अत: विमीय दृष्टिकोण से

$LT^{-2} = (LT^{-1})^{\alpha} L^{\beta} = L^{\alpha+\beta} T^{-\alpha}$

L व T की घातों की तुलना करने पर

$\alpha + \beta = 1, \alpha = 2, \Rightarrow \alpha = -1$

अत:, $a \propto \upsilon^2/r$

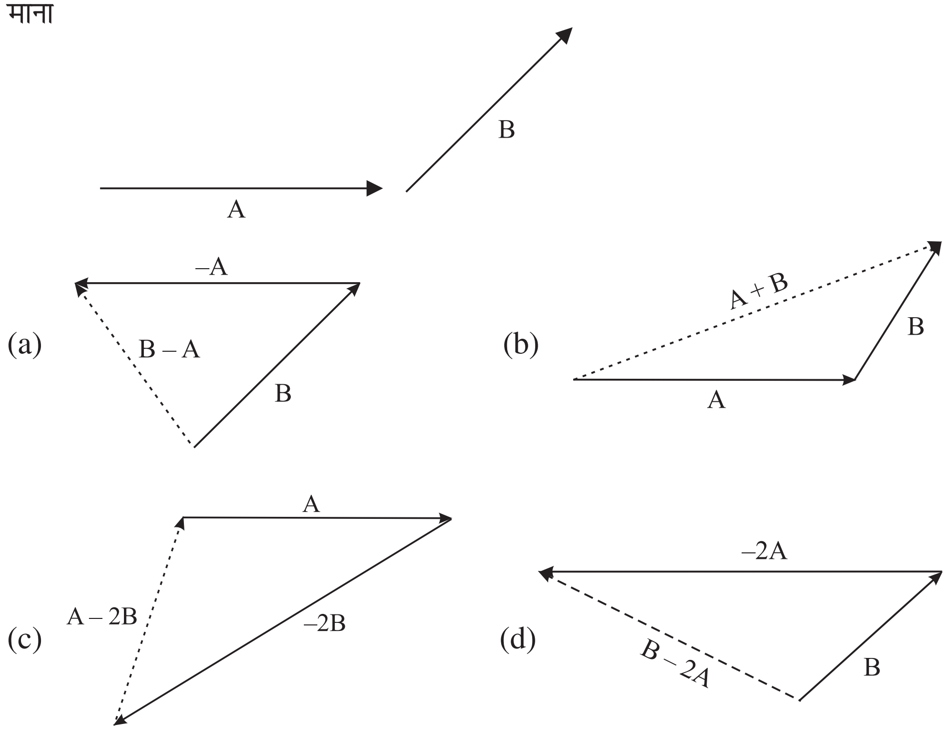
3. $m\upsilon$ की विमायें $= MLT^{-1}$

Ft की विमायें $= MLT^{-2}\, T^{1} = MLT^{-1}$

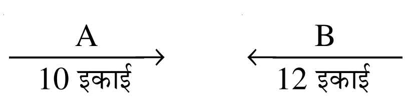
दोनों ओर की विमायें समान हैं अत: समीकरण विमीय रूप से सही है।

1.3

1. माना



2.



$B = -12$ इकाई

$A = 10$ इकाई

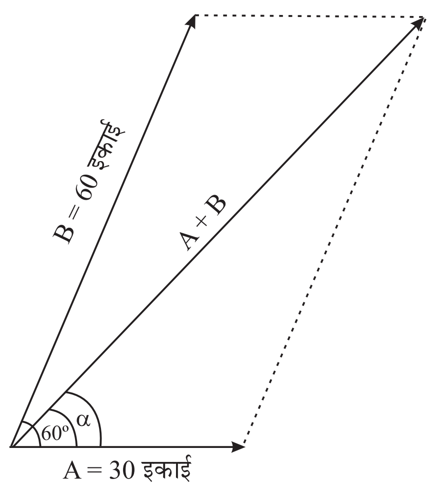
$$A + B = 10 + (-12)$$
$$= -2 \text{ units}$$

और

$A = 10$ इकाई $-B = +\ 12$ इकाई

$$\mathbf{A - B} = 22 \text{ इकाई}$$

3.



$$|A + B| = 77 \text{ इकाई}$$

1.4

1. यदि **A** और **B** समांतर हों तो उनके बीच का कोण θ शून्य होगा, अत: उनका क्रॉस गुणनफल

   $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin\theta = 0.$

   यदि वे विपरीत दिशा में समांतर हों तो उनके बीच का कोण 180°। अत:

   $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin\theta = 0$, क्योंकि $\sin 180^\circ = 0.$

2. यदि **B** का परिमाण आधा हो जाय और यह पूर्ववर्ती तल पर ही स्थित रहे तो सदिश गुणनफल $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ की दिशा अपरिवर्तित रहेगी।

3. क्योंकि सदिश **A** और **B** एक ही तल में घूमते हैं, अत: उनके सदिश गुणनफल $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ की दिशा अपरिवर्तित रहेगी।

4. मान लो आरंभ में **A** और **B** के बीच का कोण 0° व 180° के बीच में है, तब $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ की दिशा तल के ऊर्ध्वलंबवत् होगी। यादृच्छ परिमाण में घूर्णन के फलस्वरूप

यदि उनके बीच का कोण 180° से अधिक हो जाता है तो **C** की दिशा तल के अधोलंबवत् होगी।

5. यदि **A**, x-अक्ष के अनुदिश और **B**, y-अक्ष के अनुदिश है तो दोनों xy तल पर स्थित है। इनका सदिश गुणनफल $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, z-दिशा के अनुदिश होगा। यदि **A**, y-अक्ष के अनुदिश एवं **B**, x-अक्ष के अनुदिश हो तो **C** ऋणात्मक z-अक्ष के अनुदिश होगा।

6. (a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \cos\theta = 0$ यदि $\theta = 90^\circ$

   (b) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \sin\theta = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$ क्योंकि $\sin\theta = 1$ at $\theta = 90^\circ$

1.5

1. यदि **A** x-अक्ष से 60° का कोण बनाये तो

$$A_x = A\cos 60 = 50\ (½) = 25 \text{ इकाई}$$

$$A_y = A\sin 60 = 50\,(\sqrt{3}/2) = 50\,(0.866)$$
$$= 43.3 \text{ इकाई}$$

यदि **A** x-अक्ष से 30° का कोण बनाये तो

$$A_x = 50\cos 30 = 50\,(0.866) = 43.3 \text{ इकाईयाँ}$$

$$A_y = 50\sin 30 = 50\ (½) = 25 \text{ इकाईयाँ}$$

दोनों स्थितियों में घटकों के मान समान नहीं हैं।

2. निर्देशांक ग्रिड पर सदिशों की स्थिति चित्र 1.14 में दर्शायी गयी है

माना **A** x-अक्ष से θ कोण बनाता है, तब

$$\tan\theta = -4/3 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(-4/3)$$
$$= -53^\circ\ 6' \text{ or } 306^\circ\ 54'$$

यदि B x-अक्ष से ϕ कोण बनाता है तो

$$\tan\phi = 6/-2 = -3 \Rightarrow \phi = \tan^{-1}(-3)$$
$$= 108^\circ\ 24'$$

3. **A** और **B** का बिंदु गुणन (अदिश गुणन)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}).(-2\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}})$$

$$= -6(\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}}) - 24(\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{j}}) = -30$$

क्योंकि $\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{i}} = 0$, और $\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{j}} = 1$

A एवं **B** का क्रॉस गुणनफल

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}) \times (-2\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}})$$

समीकरण (1.14) और (1.15) का उपयोग करने पर,

$$= 18\,(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}) + 8\,(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}) = 18\,\hat{\mathbf{k}} - 8\,\hat{\mathbf{k}} = 10\,\hat{\mathbf{k}}$$

क्योंकि **A** एवं **B** xy तल में हैं, अत: क्रॉस गुणनफल z-अक्ष की दिशा में है।

पाठांत अभ्यास माला

1. $1\text{ ly} = 9.4673 \times 10^{15}\text{ m.}$

2. $$\frac{\text{उल्का की चाल}}{20^\circ\text{C पर वायु में ध्वनी की चाल}} = \frac{51}{340} = \frac{3}{20}$$

5. $15.84\text{ N and } \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

8. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 30$

   $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \left(5\,\hat{\mathbf{i}} - 3\,\hat{\mathbf{j}}\right) \times \left(3\,\hat{\mathbf{i}} - 5\,\hat{\mathbf{j}}\right)$ एक एकल सदिश **C** है जिसमें $|\mathbf{C}| = 16$ इकाई ऋणात्मक z-अक्ष के अनुदिश

2

सरल रैखिक गति

हम अपने चारों ओर अनेक वस्तुओं को चलते हुए देखते हैं। मनुष्यों, पशुओं, वाहनों को भूमि पर चलते हुए देख सकते हैं। मछली, मेंढक तथा अन्य जलीय पशु जल में तैरते हुए देखे जा सकते हैं। पक्षी एवं वायुयान हवा में गति करते हैं। यद्यपि हमें अनुभव नहीं होता पर जिस पृथ्वी पर हम रहते हैं वह भी अपने अक्ष पर घूमती हुई सूर्य की परिक्रमा करती है। अतः यह बिल्कुल स्पष्ट है कि हम एक गतिमान विश्व में रह रहे हैं। इसलिए अपने चारों ओर के भौतिक विश्व को समझने के लिए गति के बारे में अध्ययन करना बहुत आवश्यक है। यह गति एक रेखा में (1D), एक तल में (2D) या अंतरिक्ष में (3D) हो सकती है। यदि वस्तु की गति केवल एक दिशा में हो तो उसे 'सरल रेखीय गति' कहते हैं। उदाहरणार्थ, सीधी सड़क पर कार का चलना, सीधी रेल की पटरी पर रेल का चलना, मुक्त रुप से गिरती हुई वस्तु की गति, लिफ्ट का चलना तथा सीधे ट्रेक पर धावक का दौड़ना आदि।

इस पाठ में आप सरल रेखीय गति के बारे में अध्ययन करेंगे। आगामी पाठों में आप गति के नियमों, समतल में गति एवं अन्य प्रकार की गतियों का अध्ययन करेंगे। आप अवकलन और समाकलन की संकल्पनाओं के विषय में भी अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के पश्चात आप

- दूरी एवं विस्थापन तथा चाल एवं वेग में भेद कर सकेंगे;
- अवकलन एवं समाकलन की संकल्पनाओं का अध्ययन कर सकेंगे;
- तात्क्षणिक वेग, सापेक्ष वेग एवं औसत वेग की व्याख्या कर सकेंगे;
- त्वरण एवं तात्क्षणिक त्वरण को परिभाषित कर सकेंगे;
- एकसमान एवं असमान गतियों के वेग-समय आरेख की व्याख्या कर सकेंगे;
- एकसमान त्वरण के साथ गति संबंधी समीकरणों को व्युत्पन्न कर सकेंगे;
- गुरुत्व बल के अन्तर्गत गति का वर्णन कर सकेंगे, एवं
- गति के समीकरणों पर आधारित आंकिक प्रश्नों को हल कर सकेंगे।

2.1 चाल एवं वेग (Speed and Velocity)

आपने अपनी पूर्ववर्ती कक्षाओं में अध्ययन किया है कि किसी वस्तु द्वारा तय किये गए पथ की कुल लंबाई उसके द्वारा ***चलित दूरी*** कहलाती है जबकि वस्तु की आरंभिक और अन्तिम स्थिति के बीच का अंतर ***विस्थापन*** कहलाता है। विस्थापन मूलत: दो स्थितियों के बीच अल्पतम दूरी है, जिसकी एक निश्चित दिशा होती है। इस प्रकार विस्थापन एक सदिश राशि है जबकि दूरी अदिश राशि है। आपने यह भी सीखा होगा कि समय के साथ दूरी में होने वाले परिवर्तन की दर चाल कहलाती है जबकि वस्तु के विस्थापन की दर वेग कहलाती है। एक सरल रेखीय गति में सदिश राशि के दिशा संबंधी पहलूओं को + और – चिह्नों द्वारा दर्शाया जाता है। अत: एकविमीय गति में विस्थापन, वेग एवं त्वरण जैसी सदिश राशियों को निरुपित करने के लिए हमें सदिश संकेतों की आवश्यकता नहीं पड़ती है।

2.1.1 औसत वेग

जब कोई पिंड कोई दूरी अलग-अलग वेगों से चलता हुआ तय करता है तो इसकी गति को औसत वेग द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। किसी पिंड का औसत वेग विस्थापन-परिवर्तन की दर के रुप में परिभाषित किया जाता है। यदि x_1 एवं x_2 समय t_1 एवं t_2 में पिण्ड की स्थितियाँ हो तो गणितीय रुप से हम औसत वेग को निम्न प्रकार दिखा सकते हैं।

$$\bar{\upsilon} = \frac{\text{विस्थापन}}{\text{विस्थापन में लगा समय}}$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{t_1 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.1)$$

जहाँ स्थिति परिवर्तन $x_2 - x_1$ को Δx से एवं इसके संगत समय परिवर्तन $t_2 - t_1$ को Δt से इंगित किया गया है। यहाँ पर $\bar{\upsilon}$ (वेग के संकेत के ऊपर एक छोटी रेखा) वेग के औसत मान का एक मानक संकेत है। औसत वेग को υ_{av} भी लिखा जा सकता है। किसी वस्तु की औसत चाल प्राप्त करने के लिए उसके द्वारा चली गयी कुल दूरी को यह दूरी चलने में लिए गये कुल समय से विभाजित किया जाता है।

$$\text{अत: औसत चाल} = \frac{\text{तय की गयी कुल दूरी}}{\text{लिया गया कुल समय}} \qquad (2.2)$$

यदि सरल रेखीय गति एक दूरी तय करने में एक निश्चित दिशा में हो तो औसत चाल एवं औसत वेग के परिमाण का मान बराबर होते हैं। लेकिन सदैव ऐसा नहीं होता (देखिये उदाहरण 2.2) निम्न उदाहरणों की सहायता से आप औसत चाल और औसत वेग में अन्तर को समझ पायेंगे।

उदाहरण 2.1 : x-अक्ष के अनुदिश गति कर रहे किसी पिंड की स्थिति का समीकरण $x = 20t^2$ हैं, जहाँ t समय है और इसकी इकाई सेकंड है और स्थिति को x द्वारा निरुपित किया गया है। 3s से 4s के समय-अंतराल में वस्तु के औसत वेग का परिकलन कीजिए।

टिप्पणियाँ

हल : दिया है

$$x = 20t^2$$

ध्यान दें x का मात्रक मीटर और t का मात्रक सेकंड है। इसका अर्थ यह हुआ कि समानुपातांक (20) की विम m s^{-2} है।

हम जानते हैं कि औसत वेग निम्नलिखित संबंध द्वारा प्राप्त होता है।

$$\bar{\upsilon} = \frac{x_2 - x_1}{t_1 - t_1}$$

क्योंकि $t_1 = 3$s,

$$x_1 = 20 \times (3)^2$$

$$= 20 \times 9 = 180 \text{ m}$$

इसी प्रकार, $t_2 = 4$ s

$$x_2 = 20 \times (4)^2$$

$$= 20 \times 16 = 320 \text{ m}$$

$$\therefore \qquad \bar{\upsilon} = \frac{x_2 - x_1}{t_1 - t_1} = \frac{(320 - 180)\text{ m}}{(4 - 3)\text{ s}} = \frac{140 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 140 \text{ ms}^{-1}$$

अतः औसत वेग = 140 ms^{-1}

उदाहरण 2.2 : एक आदमी 300 मीटर के वृत्ताकार ट्रैक पर दौड़ता है तथा 200 सेकंड में वापस प्रारंभिक स्थान पर आ जाता है। व्यक्ति की औसत चाल और औसत वेग क्या है?

हल : दिया है

ट्रैक की लम्बाई = 300 m.

इस लंबाई को तय करने में लगा समय = 200 s

$$\text{अतः} \qquad \text{औसत चाल} = \frac{\text{कुल तय की गयी दूरी}}{\text{दूरी तय करने में लगा समय}}$$

$$= \frac{300}{200} \text{ ms}^{-1} = 1.5 \text{ ms}^{-1}$$

क्योंकि आदमी वापस उसी स्थान पर आ जाता है।

अतः विस्थापन = 0, इसलिए औसत वेग भी शून्य हुआ।

ध्यान दें कि उपरोक्त उदाहरण में औसत चाल परिमाण में औसत वेग के बराबर नहीं है। क्या आप कारण जानते हैं?

2.1.2 आपेक्षिक वेग

जब हम यह कहते हैं कि एक बैलगाड़ी 10 किलोमीटर प्रति घंटा की गति से दक्षिण की ओर जा रही है तो इसका अर्थ यह हुआ कि गाड़ी अपने प्रारंभिक स्थान से दक्षिण दिशा की

ओर चलती है और 1 घंटे में 10 किलोमीटर की दूरी तय करती है। इसके लिए हमें एक संदर्भ बिंदु की आवश्यकता होती हैं वास्तव में किसी वस्तु का वेग सदैव किसी दूसरी, वस्तु की तुलना में निश्चित किया जाता है। अत: वेग एक सापेक्ष राशि है।

एक वस्तु A एक दूसरी वस्तु B के सापेक्ष अपनी स्थिति बदल रही है। उदाहरण के लिए यदि υ_A और υ_B एक सरल रेखा में चल रहे दो निकायों (वस्तुओं) के वेग हों तो A की तुलना में B का आपेक्षिक वेग $(\upsilon_B - \upsilon_A)$ होगा।

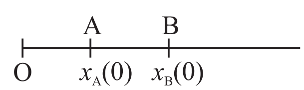
एक वस्तु की आपेक्षिक स्थिति में दूसरी वस्तु के सापेक्ष परिवर्तन दर को दूसरी वस्तु के सापेक्ष पहली वस्तु का आपेक्षिक वेग कहते हैं।

आपेक्षिक वेग का महत्व

एक वस्तु की स्थिति एवं वेग किसी दूसरी वस्तु के सापेक्ष निश्चित किया जाता है। यदि संदर्भ के लिए चुनी गई वस्तु स्थिर हो तो वस्तु की गति का वर्णन आसानी से किया जा सकता है। इस पाठ में आप शुद्धगतिक समीकरणों के बारे में जानेंगे। लेकिन यदि संदर्भ के लिए चुनी गई वस्तु भी गति कर रही हो तो ऐसी स्थिति में क्या होता है? इस प्रकार की गति एक स्थिर प्रेक्षक को द्विनिकाय तंत्र की गति प्रतीत होती है। आपेक्षिक गति की अवधारणा द्वारा इसे आसानी से समझा जा सकता है।

माना दो वस्तुओं A और B की प्रारंभिक स्थितियाँ $x_A(0)$ और $x_B(0)$ हैं। यदि धनात्मक x-अक्ष की ओर वस्तु A वेग υ_A एवं वस्तु B वेग υ_B से गति करती हैं तो t सेकन्ड के पश्चात उनकी स्थितियाँ निम्नवत् होंगी।

$$x_A(t) = x_A(0) + \upsilon_A t$$
$$x_B(t) = x_B(0) + \upsilon_B t$$



अत: B का A से आपेक्षिक पृथकन (दूरी)

$$x_{BA}(t) = x_B(t) - x_A(t) = x_B(0) - x_A(0) + (\upsilon_B - \upsilon_A)\, t$$
$$= x_{BA}(0) + \upsilon_{BA} t$$

जहाँ $\upsilon_{BA} = (\upsilon_B - \upsilon_A)$ A के सापेक्ष B का आपेक्षिक वेग कहलाता है। इस प्रकार आपेक्षिक वेग की अवधारणा के प्रयोग द्वारा द्विनिकायी समस्या को एकल निकायी समस्या में रुपान्तरित किया जा सकता है।

उदाहरण 2.3 : एक रेलगाड़ी A उत्तर से दक्षिण की ओर एक सीधी पटरी पर 60 km h^{-1} की गति से चल रही है। दूसरी रेलगाड़ी 70 km h^{-1} की गति से दक्षिण से उत्तर की ओर आ रही है। A के सापेक्ष B रेलगाड़ी का वेग क्या है?

हल : दक्षिण से उत्तर की दिशा को धनात्मक मान लेने पर हमें प्राप्त होगा

रेलगाड़ी B का वेग $(\upsilon_B) = +70$ km h^{-1}

और रेलगाड़ी A का वेग $(v_A) = -60 \text{ km h}^{-1}$

अतः रेलगाड़ी A के सापेक्ष रेलगाड़ी B का वेग

$$= v_B - v_A$$
$$= 70 - (-60) = 130 \text{ km h}^{-1}.$$

उपरोक्त उदाहरण में आपने देखा कि एक रेलगाड़ी के सापेक्ष दूसरी रेलगाड़ी आपेक्षिक वेग उनके संबंधित वेगों के योग के बराबर होता है। इसलिए आपकी रेलगाड़ी से विपरीत दिशा में चलने वाली रेलगाड़ी बहुत तेजी से चल रही प्रतीत होती है। लेकिन यदि दूसरी रेलगाड़ी समान दिशा में चल रही हो तो उसकी गति बहुत धीमी प्रतीत होती है।

2.1.3 त्वरण

बस या कार में यात्रा करते समय आपने ध्यान दिया होगा कि उसकी चाल कभी तेज व कभी धीमी हो जाती है। यानि उसके वेग में परिवर्तन होता रहता है। जैसा कि वेग को स्थिति के परिवर्तन की समय दर से परिभाषित किया जाता है, वैसे ही त्वरण को वेग के परिवर्तन की समय दर से परिभाषित किया जाता है। त्वरण एक सदिश राशि है और इसका मात्रक ms^{-2} है। एक-विमीय गति में त्वरण के लिये किसी सदिश अंकन की आवश्यकता नहीं होती जैसा कि वेग के संदर्भ में बताया जा चुका है।

किसी वस्तु का औसत त्वरण निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$\text{औसत त्वरण } (\overline{a}) = \frac{\text{अंतिम वेग} - \text{आरंभिक वेग}}{\text{वेग परिवर्तन के लिये लिया गया समय}}$$

$$\overline{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_1 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (2.3)$$

एक विमीय गति में जबकि त्वरण उसी दिशा में हो जिसमें कि गति या वेग है तो त्वरण की दिशा धनात्मक होती है। त्वरण गति की विपरीत दिशा में भी हो सकता है ऐसी स्थिति में त्वरण को ऋणात्मक माना जाता है। जिसे प्रायः मंदन (retardation) कहा जाता है। अतः हम कह सकते हैं कि त्वरण वेग वृद्धि की समय दर है और मंदन वेग ह्रास की समय दर है।

उदाहरण 2.4 : पूर्व की ओर गतिशील कार का वेग 3s में 0 से 12 ms^{-1} हो जाता है। औसत त्वरण की गणना कीजिए।

हल : दिया है,

$$v_1 = 0 \text{ m s}^{-1}$$
$$v_2 = 12 \text{ m s}^{-1}$$
$$t = 3.0 \text{ s}$$

$$a = \frac{(12.0 \text{ ms}^{-1})}{3.0\text{s}}$$
$$= 4.0 \text{ m s}^{-2}$$

पाठगत प्रश्न 2.1

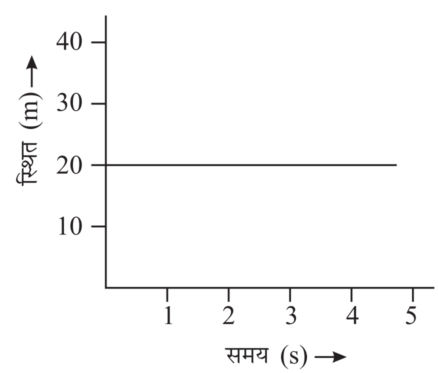
1. क्या यह संभव है कि किसी दिये गये समय अंतराल में किसी गतिशील वस्तु की औसत चाल शून्य न हो लेकिन औसत वेग शून्य हो? यदि हाँ तो इस को उदाहरण द्वारा समझाइये।
2. एक महिला 8 किलोमीटर प्रति घंटा की चाल से बाजार गई। बाजार को बंद पाकर वह अपने घर 10 किलोमीटर प्रति घंटा की चाल से लौट आयी। यदि उसके घर से बाजार 2 किलोमीटर दूर हो उसकी औसत चाल और औसत वेग ज्ञात कीजिए।
3. क्या एक गतिशील वस्तु का दूसरी गतिशील वस्तु की तुलना में आपेक्षिक वेग शून्य हो सकता है? एक उदाहरण दीजिए।
4. एक व्यक्ति एक रेलगाड़ी के अन्दर 1.0 m s^{-1} के वेग से रेलगाड़ी की गति की दिशा में चल रहा है। यदि रेलगाड़ी का वेग 3.0 m s^{-1} हो तो

   (a) रेलगाड़ी में बैठे को व्यक्ति को उसका वेग कितना प्रतीत होगा?

   (b) प्लेटफार्म पर बैठे व्यक्ति के सापेक्ष उस का वेग क्या होगा?

2.2 स्थिति समय ग्राफ (Position - Time Graph)

यदि आप एक गेंद को जमीन पर लुढ़काते हैं तो आप देखेगें कि विभिन्न समय पर गेंद की विभिन्न स्थितियाँ होती हैं। विभिन्न क्षणों और तदनुसार गेंद की विभिन्न स्थितियों की मूल बिंदु से दूरियों को ग्राफ पर प्रकट करने से हमें एक निश्चित रेखा प्राप्त होती है। इस प्रकार की रेखा को स्थिति-समय ग्राफ कहते हैं। सामान्यत: समय x–अक्ष पर दर्शाते हैं और वस्तु की स्थिति y–अक्ष पर दर्शाते हैं।



चित्र. 2.1 : विराम अवस्था में वस्तु का स्थिति-समय ग्राफ

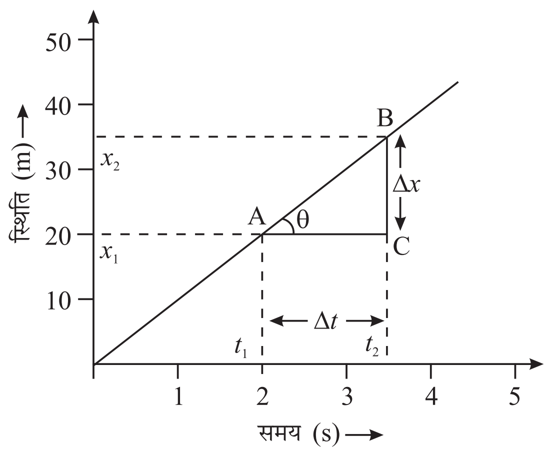
अब हम मूल बिंदु से 20 मीटर दूर विराम अवस्था में वस्तु के लिये एक स्थिति-समय ग्राफ खींचते हैं। वस्तु की स्थिति 1s, 2s, 3s, 4s और 5s के बाद क्या होगी? आप पायेंगे कि आलेख समय अक्ष के समान्तर सीधी रेखा है जैसा चित्र 2.1 में दिखाया गया है।

2.2.1 एकसमान गति के लिये 'स्थिति-समय ग्राफ'

आइये अब हम एक अन्य परिस्थिति पर विचार करें। जिसमें एक वस्तु समान समय अंतराल में समान दूरी तय करती है। उदाहरण के लिये यदि वस्तु प्रत्येक 1 सेकंड में 10 m की दूरी तय करती हैं। यदि हम 5 सेकंड तक हुई गति का अध्ययन करें तो विभिन्न समय पर वस्तु की स्थिति निम्न सारणी के अनुसार दर्शायी जायेगी।

समय (t) सेकन्ड में	1	2	3	4	5
स्थिति (x) मीटर में	10	20	30	40	50

इन आंकड़ों का आलेख बनाने के लिए x–अक्ष पर समय लीजिए जिसमें 1cm को 1 सेकंड मानिए और स्थिति को y–अक्ष पर लीजिए जिसमें 1cm को 10 मीटर के बराबर मानिए। 'स्थिति-समय ग्राफ' चित्र 2.2 के समान होगा।



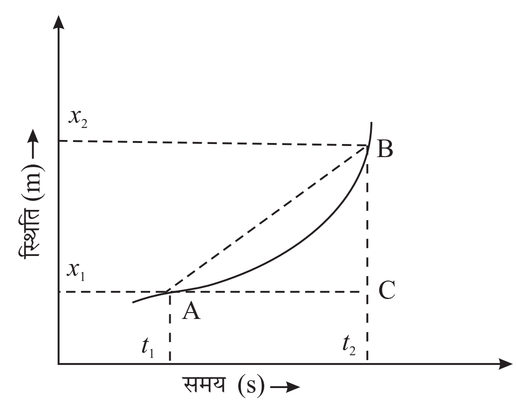
चित्र 2.2 : एक समान गति के लिये स्थिति-समय-ग्राफ

ग्राफ एक सीधी रेखा है जो कि x–अक्ष से एक कोण θ बनाती है। ऐसी गति जिसमें गतिशील वस्तु का वेग अचर रहे एकसमान गति कहलाती है। इसका स्थिति समय ग्राफ समय अक्ष पर झुकी हुई (एक कोण बनाती हुई) सरल रेखा के रुप में होता है।

दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि जब गतिशील वस्तु समान समय अंतराल में समान दूरियाँ तय करती है तो उसकी गति एकसमान गति कहलाती है।

2.2.2 असमान गति के लिये 'स्थिति-समय ग्राफ'

आइये अब हम एक रेलगाड़ी का उदाहरण लें जो एक स्टेशन से चलती है, गति पकड़ती है तथा कुछ अवधि तक एकसमान वेग से चलती है और दूसरे स्टेशन पर रुकने से पूर्व धीमी हो जाती है। इस उदाहरण में आप देखेंगे कि समय के समान अंतरालों में तय की गयी दूरियाँ समान नहीं हैं। इस प्रकार की वस्तुओं के लिये 'स्थिति-समय' ग्राफ' चित्र 2.3 में दिखाया गया है।



चित्र 2.3 : त्वरित गति का सततवक्र के रुप में स्थिति समय ग्राफ

ध्यान दें कि त्वरित गति के लिये 'स्थिति-समय ग्राफ' एक सतत वक्र है। अतः वस्तु वेग में निरंतर परिवर्तन हो रहा है। ऐसी स्थिति में अत्यंत छोटे समय अंतराल में औसत या तात्क्षणिक वेग को परिभाषित करना उपयुक्त है। आइये ऐसा करना सीखें।

टिप्पणियाँ

2.2.3 'स्थिति-समय ग्राफ की व्याख्या

जैसा कि आपने देखा कि विभिन्न गतिशील वस्तुओं का 'स्थिति-समय ग्राफ' विभिन्न हो सकता है। यदि यह समय अक्ष के समान्तर सीधी रेखा है तो आप कह सकते हैं कि वस्तु विराम अवस्था में है। (चित्र 2.1)। लेकिन यदि सीधी रेखा समय अक्ष की ओर झुकी है तो यह दर्शाता है कि चाल एकसमान है (चित्र 2.2)

(a) स्थिति-समय ग्राफ से वेग : 'स्थिति समय ग्राफ की सीधी रेखा का ढाल गतिशील वस्तु का वेग बताता है। ढाल का निर्धारण करने के लिये सरल रेखा पर (चित्र 2.2) कोई दो बिंदु (A और B) चुनिए तथा y–अक्ष तथा x–अक्ष के समान्तर रेखा खींच कर त्रिभुज बनाइये। इस प्रकार वस्तु का औसत वेग निम्नलिखित है।

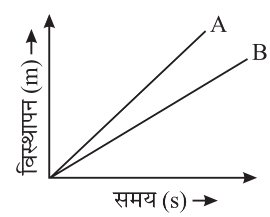
$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{BC}{AC} \qquad (2.4)$$

अत: वस्तु का वेग सरल रेखा AB के ढाल के बराबर है।

इससे पता चलता है कि 'स्थिति-समय ग्राफ दर्शाने वाली सीधी रेखा का जितना ढाल ($\Delta x/\Delta t$) होगा उतना ही अधिक वस्तु का वेग होगा। ध्यान रहे कि क्षैतिज रेखा के साथ सरल रेखीय ग्राफ द्वारा बनाए गये कोण की स्पर्शज्या (tangent) उसके ढाल का माप है।

अर्थात् $$\tan\theta = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

ग्राफ पर किन्हीं दो स्थितियों के अन्तराल Δx व संगत समयों के अन्तराल Δt का उपयोग ढाल निकालने और इस प्रकार इस समय अंतराल में औसत वेग का मान प्राप्त करने में किया जा सकता है।

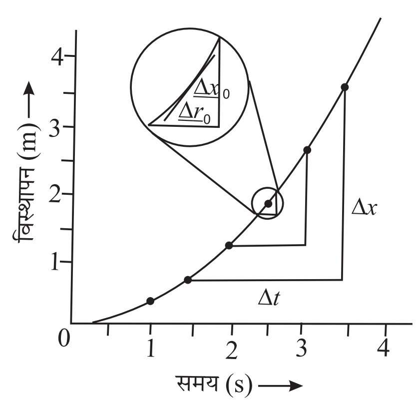


चित्र 2.4 :

उदाहरण 2.5 : दो वस्तुओं A और B का स्थिति-समय ग्राफ चित्र 2.4 में दर्शाया गया है। इनमें से किसका वेग अधिक है?

हल : वस्तु A का वेग अधिक है क्योंकि वस्तु A के लिये ग्राफ का ढाल अधिक है।

(ख) तात्क्षणिक वेग (Instantaneous velocity) : जैसा कि आपने सीखा कि सीधी रेखा में वेग प्रत्येक क्षण समान रहता है लेकिन असमान गति के प्रकरण में 'स्थिति-समय-ग्राफ' वक्र रेखा के रुप में आता है जैसा कि चित्र 2.5 में दर्शाया गया है। चयन किये गये समय अन्तरालों के आकार पर ढाल या औसत वेग भिन्न-भिन्न होता है। इस प्रकार के प्रकरणों में किसी समय या स्थिति में वस्तु का वेग तात्क्षणिक वेग कहलाता है।

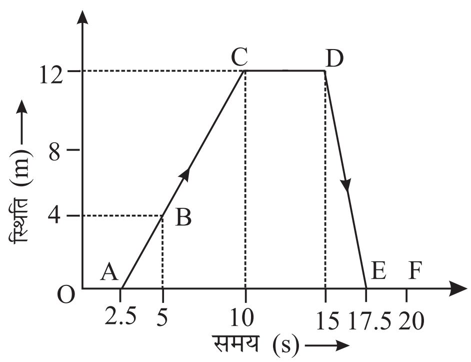


चित्र 2.5 : असमान गति के लिये स्थिति समय वक्र

ध्यान दें कि Δt समय अन्तराल में औसत वेग $\bar{v}$ निम्नवत होता है। $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. जब Δt का मान न्यून से न्यून किया जाता है तो औसत वेग क्रमशः तात्क्षणिक वेग के बराबर हो जाता है। $\Delta t \to 0$ सीमा लेने पर उस रेखा का ढाल $\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$ जो उस बिंदु पर वक्र की स्पर्शज्या होती है तात्क्षणिक वेग बताता है। तथापि एक समान गति के लिये औसत और तात्क्षणिक बराबर होता है।

उदाहरण 2.6 : एक वस्तु की 20 सेकंड तक गति के लिये 'स्थिति समय ग्राफ' चित्र 2.6 में दर्शाया गया हैं बतलाइए कि वस्तु द्वारा निम्नलिखित समय अन्तरालों में कितनी गति से कितनी दूरी तय की गयी?

(i) 0 सेकंड से 5 सेकंड, (ii) 5 सेकंड से 10 सेकंड, (iii) 10 सेकंड से 15 सेकंड, (iv) 15 सेकंड से 17.5 सेकंड? 20 सेकंड के सम्पूर्ण समय काल में वस्तु की औसत चाल क्या होगी?



चित्र 2.6: स्थिति-समय ग्राफ

हल :

i) 0 सेकंड से 5 सेकंड के दौरान तय की गयी दूरी = 4 m

$$\text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \frac{4}{5-0} = 0.8\ \text{ms}^{-1}$$

ii) 5 सेकंड से 10 सेकंड के दौरान तय की गयी दूरी = 12 – 4 = 8 m

$$\text{चाल} = \frac{12-4}{10-5} = \frac{8}{5} = 1.6\ \text{ms}^{-1}$$

iii) 10 से 15 सेकंड के दौरान तय की गयी दूरी = 12 – 12 = 0

$$\therefore \text{चाल} = \frac{0}{5} = 0$$

iv) 15 सेकंड से 17.5 सेकंड के दौरान तय की गयी दूरी = 12 m

$$\therefore \text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \frac{12\ \text{m}}{2.5\ \text{s}} = 4.8\ \text{m s}^{-1}$$

अब आप अपनी प्रगति जाँचने के लिये निम्न प्रश्नों को हल कीजिए।

पाठगत प्रश्न 2.2

1. शून्य त्वरण की गति के लिये 'स्थिति-समय ग्राफ' बनाइए।
2. निम्नलिखित चित्र में दो विद्यार्थियों A और B का विस्थापन-समय ग्राफ दर्शाया गया है जो अपने विद्यालय से चलते हैं और अपने घर पहुँचते हैं। ग्राफों को ध्यान से देखें और निम्न प्रश्नों के उत्तर दें।

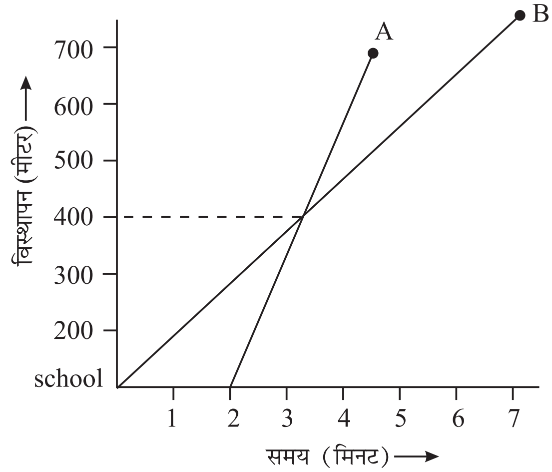
(i) क्या वे एक ही समय विद्यालय से चलते हैं?

(ii) कौन विद्यालय से अधिक दूरी पर रहता है?

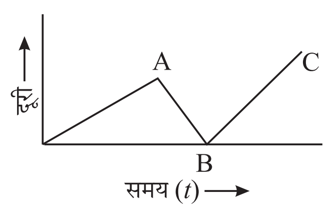
(iii) क्या दोनों अपने-अपने घर एक ही समय पर पहुँचते हैं?

(iv) कौन अधिक तेज चलता है?

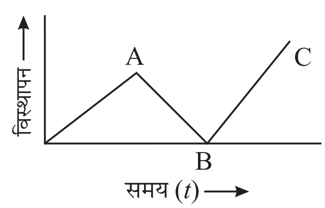
(v) वे विद्यालय से कितनी दूरी पर एक दूसरे को पार करते हैं?



3. किन परिस्थितियों में औसत वेग तात्क्षणिक वेग के बराबर होता है?
4. निम्न ग्राफ में से कौन सा संभव नहीं है? कारण सहित उत्तर दीजिए।



(a)



(b)

2.3 वेग-समय ग्राफ

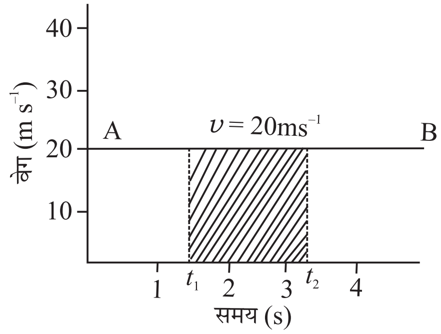
स्थिति-समय ग्राफ की भाँति हम वेग-समय ग्राफ बना सकते हैं? वेग-समय ग्राफ बनाने के लिए सामान्यत: समय को x–अक्ष तथा वेग को y–अक्ष पर लिया जाता है।

2.3.1 एकसमान गति के लिये वेग-समय ग्राफ

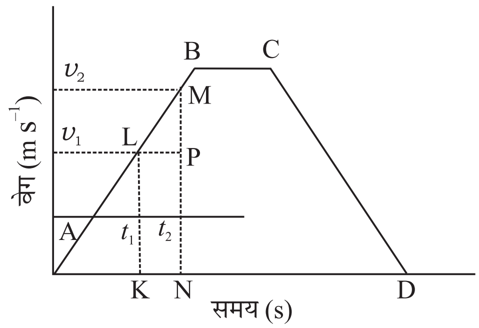
जैसा कि आप जानते हैं कि सरल रखीय एकसमान गति में वस्तु का वेग अचर रहता है अर्थात् समय में परिवर्तन के साथ वेग में कोई परिवर्तन नहीं होता। इस प्रकार की एकसमान गति

टिप्पणियाँ

के लिये वेग-समय ग्राफ समय अक्ष के समान्तर सरल रेखा के रुप में होता है। जैसा कि चित्र 2.6 में दर्शाया गया है।



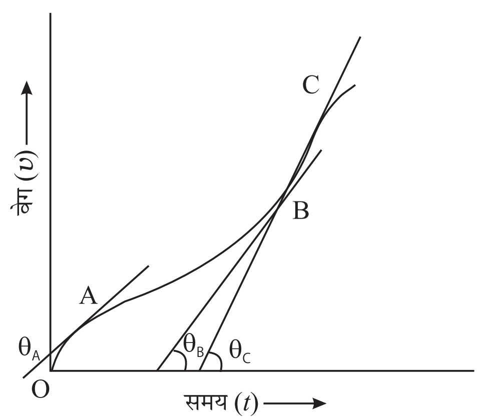
चित्र 2.6 : समान गति के लिये वेग समय ग्राफ



चित्र 2.7 : अचर त्वरण वाली तीन स्थितियों के लिये वेग-समय ग्राफ

2.3.2 असमान गति के लिये वेग-समय आलेख

यदि समय के साथ वस्तु का वेग समान रुप से बदलता है तो त्वरण एकसमान रहता है। इस प्रकार की गतिशील वस्तु के लिये वेग-समय ग्राफ सरल रेखा के रुप में होता है जैसा कि समय अक्ष की ओर झुका रहता है जैसा कि चित्र 2.7 में सरल रेखा AB द्वारा दर्शाया गया है। ग्राफ से स्पष्ट है कि एकसमान समय अंतरालों में समान परिमाणों से वेग बढ़ता है। वस्तु का औसत त्वरण निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।



चित्र 2.8 : विभिन्न त्वरण के साथ गति के लिये वेग-समय ग्राफ

$$\overline{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\text{MP}}{\text{LP}}$$

= सरल रेखा का ढाल

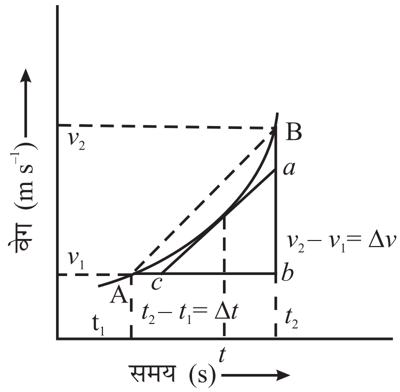
क्योंकि सरल रेखा का ढाल स्थिर रहता है। अत: वस्तु का त्वरण अचर रहता है। यद्यपि असमान गति के ऐसे प्रकरण हो सकते हैं जिनमें वेग परिवर्तन की दर अचर न हो। इस प्रकार की स्थिति में वेग-समय ग्राफ का ढाल प्रत्येक क्षण भिन्न होगा जैसा कि चित्र 2.8 में दिखाया गया है। यह देखा जा सकता है कि विभिन्न बिंदुओं A, B और C पर θ_A, θ_B और θ_C के मान अलग-अलग हैं।

2.3.3 वेग-समय ग्राफ की व्याख्या

वेग-समय ग्राफ की सहायता से हम वस्तु द्वारा तय की गयी दूरी और विभिन्न क्षणों में वस्तु का त्वरण भी निर्धारित कर सकते हैं। आईए देखें हम ऐसा किस प्रकार कर सकते हैं।

टिप्पणियाँ

(a) वस्तु द्वारा तय की गयी दूरी का निर्धारण: चित्र 2.7 में दर्शाये गये वेग-समय ग्राफ पर पुनः विचार करें। इस ग्राफ में AB भाग अचर त्वरण के साथ गति दर्शाता है जबकि CD भाग अचर मंदित-गति दर्शाता है। भाग BC एकसमान गति दर्शाता है।



चित्र. 2.9 : असमान त्वरण की गति का वेग-समय ग्राफ

समान गति से चलती हुई वस्तु द्वारा t_1 से t_2 समय के बीच चली गयी दूरी $s = \upsilon\,(t_2 - t_1) = t_1$ व t_2 अंतराल के बीच वक्र तथा समय अक्ष के बीच का क्षेत्रफल (चित्र 2.6)।

इस परिणाम के व्याप्तिकरण द्वारा चित्र 2.7 के लिये हम पाते हैं कि t_1 व t_2 के बीच के समय-अंतराल में चली गयी दूरी

s = समलम्ब चतुर्भुज KLMN का क्षेत्रफल

$$= (½) \times (\mathrm{KL} + \mathrm{MN}) \times \mathrm{KN}$$

$$= (½) \times (\upsilon_1 + \upsilon_2) \times (t_2 - t_1)$$

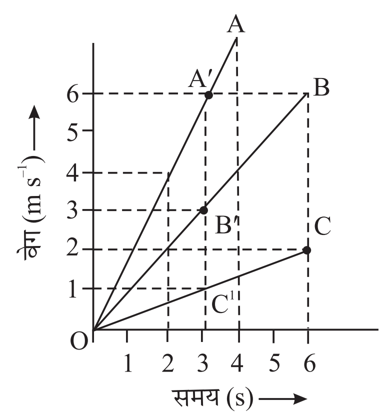
(b) वस्तु के त्वरण का निर्धारण : हम जानते हैं कि किसी वस्तु की समय के साथ वेग परिवर्तन की दर को त्वरण कहते हैं। यदि आप चित्र 2.9 में वेग समय ग्राफ का अवलोकन करें तो AB चाप की ढाल द्वारा औसत त्वरण दर्शाया गया है। जो निम्न प्रकार व्यक्त किया गया है।

औसत त्वरण $(\bar{a}) = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$.

यदि समय-अंतराल को अत्यधिक न्यून कर दिया जाय तो औसत त्वरण तात्क्षणिक त्वरण बन जाता है। अतः तात्क्षणिक त्वरण,

$a = \displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$ = समय t के संगत बिन्दु पर स्पर्श रेखा का ढाल

अतः वेग-समय आलेख के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा का ढाल $= \dfrac{ab}{bc}$, उस बिंदु या समय पर त्वरण का परिमाण प्रदान करता है।



चित्र. 2.9(a) : सम त्वरण युक्त तीन भिन्न वस्तुओं की गति का वेग-समय ग्राफ

उदाहरण 2.7 : तीन वस्तुओं A, B और C के लिये वेग समय ग्राफ चित्र 29.a में दर्शाये गये हैं।

(i) इनमें से किसका सबसे अधिक त्वरण है तथा वह कितना है?

(ii) पहले 3 सेकंड में इन वस्तुओं द्वारा तय की गयी दूरी की गणना कीजिए।

(iii) इन तीन वस्तुओं में से कौन अपनी पूरी यात्रा में अधिकतम दूरी तय करता है?

(iv) 2 सेकंड के क्षण में तीनों वस्तुओं के वेग क्या-क्या हैं।

हल :

(i) क्योंकि $\upsilon - t$ ग्राफ का ढाल त्वरण प्रदान करता है और वस्तु A के लिये $\upsilon - t$ ग्राफ का ढाल अधिकतम है। अत: इसका त्वरण अधिकतम है और इसका मान

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6-0}{3-0} = \frac{6}{3} = 2 \text{ m s}^{-2}.$$

(ii) वस्तु द्वारा तय की गयी दूरी υ-t ग्राफ के क्षेत्रफल के बराबर होती है। पहले 3 सेकन्ड में

A द्वारा तय की गयी दूरी = Area OA′L

$= (½) \times 6 \times 3 = 9$ m.

B द्वारा तय की गयी दूरी = क्षेत्रफल OB′L

$= (½) \times 3 \times 3 = 4.5$ m.

C द्वारा तय की गयी दूरी $= (½) \times 1 \times 3 = 1.5$ m.

(iii) यात्रा पूरी होने पर B द्वारा तय की गयी अधिकतम दूरी

$= (½) \times 6 \times 6 = 18$ m.

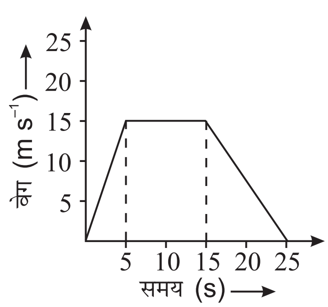
(iv) क्योंकि प्रत्येक वस्तु के लिए υ-t ग्राफ सरल रेखा है, अत: तात्क्षणिक त्वरण औसत त्वरण के बराबर है। दो सेकंड पर,

A का वेग $= 4 \text{ m s}^{-1}$

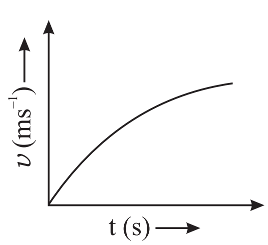
B का वेग $= 2 \text{ m s}^{-1}$

C का वेग $= 0.80 \text{ m s}^{-1}$ (लगभग)

पाठगत प्रश्न 2.3

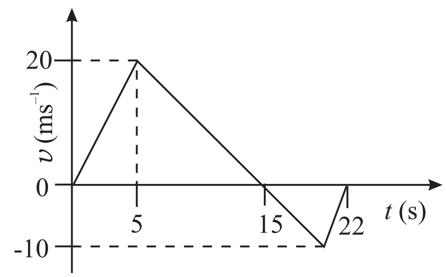


1. एक सरल रेखा में चलते हुए कण की गति संलग्न $\upsilon - t$ ग्राफ में दर्शायी गयी है। (i) वेग, त्वरण एवं चली गयी दूरी के संदर्भ में ग्राफ का वर्णन करो (ii) औसत चाल का मान ज्ञात करो।



2. संलग्न वक्र किस प्रकार की गति को दर्शाता है– एकसमान गति, त्वरित गति या मंदित? व्याख्या करें।

3. संलग्न $v-t$ ग्राफ को प्रयोग करते हुए 0.22 सेकन्ड समय अन्तराल के लिये (i) कण का औसत वेग (ii) कण की औसत चाल ज्ञात करें। कण सतत रुप से सरल रेखीय गति कर रहा है।



2.4 गति के समीकरण

जैसा कि आप जानते हैं कि वस्तु की गति का वर्णन करने के लिए हम भौतिक राशियों जैसे दूरी, वेग और त्वरण का उपयोग करते हैं। गति के समीकरणों की सहायता से स्थिर त्वरण की स्थिति में वेग व तय की गयी दूरी संबंधी गणनाएं की जा सकती हैं। ये उपयोग में आसान हैं और इनके अनेक अनुप्रयोग हैं।

2.4.1 एक समान गति का समीकरण

इस समीकरण की व्युत्पत्ति के लिये हम प्रारंभिक समय t_1 को शून्य लेते हैं, अर्थात् $t_1 = 0$ अब हम यह मान सकते हैं कि $t_2 = t$ बीता हुआ समय है। वस्तु की प्रारंभिक स्थिति ($x_1 = x_0$) और समय t पर वे x_2 व v_2 के बजाय x व v कहलाये जायेंगे। समीकरण 2.1 के अनुसार समय t के दौरान औसत वेग निम्नलिखित होगा

$$\bar{v} = \frac{x - x_0}{t}. \tag{2.4}$$

2.4.2 एक समान त्वरण युक्त गति का पहला समीकरण

यदि त्वरण ज्ञात हो तो गति का पहला समीकरण एक निश्चित समय के बाद वस्तु के वेग को निर्धारित करने में सहायता करता है। जैसा आपको परिभाषा द्वारा ज्ञात है कि

$$\text{त्वरण } (a) = \frac{\text{वेग में परिवर्तन}}{\text{लिया गया समय}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$a = \frac{v - v_0}{t} \tag{2.5}$$

अथवा
$$v = v_0 + at \tag{2.6}$$

यह गति का पहला समीकरण कहलाता है। यहाँ v_0 वस्तु का प्रारंभिक ($t = 0$ पर) वेग है एवं v क्षण t पर वेग है।

उदाहरण 2.8 : यदि एक कार विश्रामावस्था से 10 m s^{-2} के त्वरण के साथ चलती है तो 5 सेकंड बाद इसका वेग कितना होगा?

हल : दिया है

प्रारंभिक वेग $v_0 = 0$

त्वरण $a = 10 \text{ m s}^{-2}$

समय $t = 5 \text{ s}$

गति के पहले समीकरण का उपयोग करने पर,

$$v = v_0 + at$$

समय $t = 5\text{s}$ के बाद वेग

$$v = 0 + (10 \text{ m s}^{-2}) \times (5 \text{ s})$$

$$= 50 \text{ m s}^{-1}$$

2.4.3 स्थिर (अचर) त्वरण वाली गति का दूसरा समीकरण

गति के दूसरे समीकरण का उपयोग अचर त्वरण a से चल रही वस्तु की समय t के बाद की स्थिति का परिकलन करने के लिए किया जाता है।

माना $t = 0$ पर $x_1 = x_0$;

$v_1 = v_0$ और $t = t$ पर $x_2 = x$ और $v_2 = v$

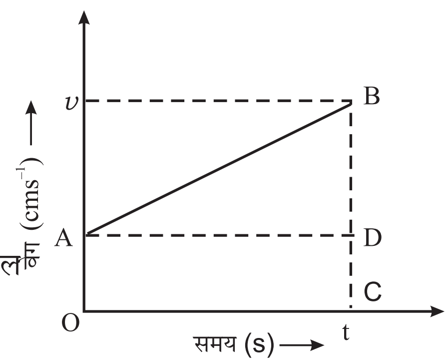
अत: तय की गयी दूरी

$= v - t$ ग्राफ के नीचे का क्षेत्रफल

= समलम्ब चतुर्भुज OABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}(\text{CB} + \text{OA}) \times \text{OC}$$

$$x - x_0 = ½\,(v + v_0)\,t \text{ .... } (2.7)$$



चित्र 2.10 : समान रुप से त्वरित गति के लिये v–t ग्राफ

क्योंकि $v = v_0 + at$ औसत $v = \dfrac{v - v_0}{2}$ .... (2.8)

$$= v_0 t + ½\, at^2$$

अथवा $\qquad x = x_0 + v_0 t + ½\, at^2 \qquad (2.9)$

उदाहरण 2.9 : एक कार A सीधी सड़क पर 60 km h^{-1} की एकसमान चाल से जा रही है। दूसरी कार उसके पीछे 70 km h^{-1} के एकसमान के वेग से चल रही है। इन दोनों के बीच जब 2.5 km की दूरी रह गयी तो कार B में 20 km h^{-1} का मंदन किया गया। कितनी दूरी और कितने समय में कार B कार A को पकड़ लेगी?

हल : मान लो B कार A कार को t– समय के बाद x–दूरी पर पकड़ लेती है। तब

कार A द्वारा t–समय में तय की गयी दूरी $x' = 60 \times t$.

टिप्पणियाँ

कार B द्वारा t समय में तय की गयी दूरी

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + ½\, at^2$$
$$= 0 + 70 \times t + ½\,(-20) \times t^2$$
$$x' = 70\,t - 10\,t^2$$

लेकिन दो कारों के बीच की दूरी $x - x' = 2.5$

$$(70\,t - 10\,t^2) - (60\,t) = 2.5$$

या $$10\,t^2 - 10\,t + 2.5 = 0$$

इससे t का मान

$t = ½$ मान रखकर ½ घंटा प्राप्त होता है। समीकरण हल करने पर

$$x = 70t - 10t^2$$
$$= 70 \times ½ - 10 \times (½)^2$$
$$= 35 - 2.5 = 32.5 \text{ km.}$$

2.4.4 अचर त्वरण वाली गति का तीसरा समीकरण

इस समीकरण का उपयोग उस स्थिति में किया जाता है जब वस्तु का त्वरण, स्थिति और प्रारंभिक वेग ज्ञात हो तथा अंतिम वेग अपेक्षित हो, लेकिन समय t ज्ञात न हो,

समीकरण (2.7) को हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं।

$$x - x_0 = ½\,(\upsilon + \upsilon_0)\,t$$

समीकरण (2.6) के अनुसार

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

समीकरण 2.7 में t का मान प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$x - x_0 = ½\,(\upsilon + \upsilon_0)\left(\frac{v - v_0}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2a\,(x - x_0) = \upsilon^2 - \upsilon^0$$

$$\Rightarrow \quad \upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a\,(x - x_0) \qquad (2.8)$$

यह गति का तीसरा समीकरण है।

अतः अचर त्वरण के लिये गति के तीन समीकरण इस प्रकार हैं।

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$
$$x = x_0 + \upsilon_0 t + ½\, at^2$$

और $$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a\,(x - x_0)$$

उदाहरण 2.10 : एक मोटर साइकिल सवार एक सीधी सड़क पर 4 m s^{-2} के अचर त्वरण से जा रहा है। प्रारंभ में वह 5 मीटर की दूरी पर था और उसका वेग 3 m s^{-1} था तो

(i) समय $t = 2s$ पर स्थिति और वेग बताइए

(ii) मोटर साइकिल सवार की स्थिति बताइए जब उसका वेग 5 m s^{-1} हो।

हल : दिया गया है

$$x_0 = 5\text{m}, \upsilon_0 = 3\text{m s}^{-1}, a = 4 \text{ m s}^{-2}.$$

समीकरण (2.7) का उपयोग करने पर

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + ½\, at^2 = 5 + 3 \times 2 + ½ \times 4 \times (2)^2 = 19 \text{ m}$$

समीकरण 2.6 से

$$\upsilon = \upsilon_0 + at = 3 + 4 \times 2 = 11 \text{ m s}^{-1}$$

$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a\,(x - x_0)$ का उपयोग करने पर

$$(5)^2 = (3)^2 + 2 \times 4 \times (x - 5) \text{ से हमें}$$

$$x = 7 \text{ मीटर प्राप्त होता है।}$$

अतः मोटरसाइकिल सवार की स्थिति $(x) = 7$ m.

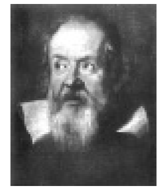
2.5 गुरुत्वाधीन गति

आपने देखा होगा कि जब हम किसी वस्तु को ऊपर की दिशा में फेंकते हैं या किसी ऊँचाई से पत्थर गिराते हैं तो दोनों ही स्थितियों में वे पृथ्वी की ओर आते हैं। क्या आप जानते हैं कि वे पृथ्वी पर क्यों आ जाते हैं और वे किस प्रकार का पथ अपनाते हैं। यह उन वस्तुओं पर लगने वाले पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण बल के कारण होता है। गुरुत्व के प्रभाव के अन्तर्गत होने वाली इस प्रकार की गतियाँ एक सीधी दिशा या सीधी रेखा में होती हैं। पृथ्वी की ओर किसी वस्तु का स्वतंत्र रुप से गिरना अचर त्वरण (लगभग) के साथ गति का एक सर्वाधिक सामान्य उदाहरण हैं। वायु प्रतिरोध की अनुपस्थिति में यह देखा गया है कि सभी वस्तुएँ चाहे उनका साइज या द्रव्यमान कुछ भी हो पृथ्वी की सतह पर समान त्वरण के साथ गिरती हैं। यद्यपि गुरुत्व जनित त्वरण का मान ऊँचाई के साथ परिवर्तित होता है लेकिन पृथ्वी की त्रिज्या की तुलना में नगण्य दूरियों के लिये इस परिवर्तन को नगण्य मान लिया जाता है और गति की अवधि में इसका मान स्थिर रहता है। इसके व्यावहारिक उपयोग के लिये वायु प्रतिरोधकता एवं ऊँचाई के साथ त्वरण में भिन्नता का प्रभाव नगण्य लिया जाता है।

गुरुत्व के कारण स्वतंत्र रुप से गिरती वस्तु के त्वरण को 'g' से दर्शाते हैं। पृथ्वी की सतह पर इसका परिमाण लगभग 9.8 m s^{-2} ऊँचाई और अक्षांशों में परिवर्तन के कारण इसकी भिन्नता और अधिक परिशुद्ध मानों का विस्तृत विवेचन इस पुस्तिका के पाठ 5 में किया जायेगा।

टिप्पणियाँ

गैलीलियो (1564-1642)



इनका जन्म पीसा, इटली में 1564 में हुआ था, इन्होंने गिरती हुई वस्तुओं के नियमों का प्रतिपादन किया। इन्होंने एक दूरबीन बनाई तथा उसे खगोलीय प्रेक्षणों के लिए उपयोग किया। "डायलॉग्स अबाउट टू ग्रेट सिस्टम ऑफ दि वर्ल्ड " और "कन्वर्सेसन्स कंसरनिंग द न्यू साइंसेज" इनकी महान कृतियाँ हैं। इन्होंने इस विचार का अनुमोदन किया कि पृथ्वी सूर्य की परिक्रमा करती है।

उदाहरण 2.11 : एक पत्थर को 50 m की ऊँचाई से गिराया जाता है और यह स्वतंत्र रुप से गिरता है। निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए:

(i) 2s में तय की गयी दूरी

(ii) पृथ्वी पर पहुँचने पर पत्थर का वेग

(iii) गिरने के 3 सेकन्ड बाद वेग

हल : दिया गया है

ऊँचाई (h) = 50 m और प्रारंभिक वेग $\upsilon_0 = 0$

प्रारंभिक स्थिति (y_0) को शून्य तथा मूल बिंदू '0' पर मानें। अतः इसके नीचे y–अक्ष (ऊर्ध्वाधर अक्ष) ऋणात्मक होगी। चूँकि त्वरण ऋणात्मक y–अक्ष की दिशा में नीचे की ओर है।

अतः $a = -g = -9.8\ \text{ms}^{-2}$.

(i) समीकरण 2.9 का उपयोग करने पर

$$y = y_0 + \upsilon_0 t + \tfrac{1}{2} at^2$$

हमें प्राप्त होता है:

$$y = 0 + 0 - \tfrac{1}{2} gt^2 = -\tfrac{1}{2} \times 9.8 \times (2)^2$$
$$= -19.6 \text{ m.}$$

ऋणात्मक चिन्ह दर्शाता है कि दूरी मूल बिंदु से नीचे की ओर अधोगामी दिशा में है।

(ii) पृथ्वी पर $y = -50$ m

समीकरण 2.9 को उपयोग करने से

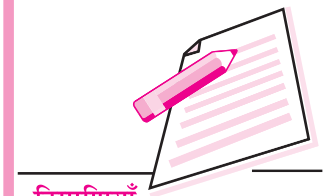
$$\upsilon^2 = v_0^2 + 2a\,(y - y_0)$$
$$= 0 + 2\,(-9.8)\,(-50 - 0)$$
$$\upsilon = 9.9 \text{ m s}^{-1}$$

(iii) समीकरण $\upsilon = \upsilon_0 + at$ का उपयोग करने पर, जहाँ t = 3s है

$$\therefore \quad \upsilon = 0 + (-9.8) \times 3$$
$$\upsilon = -29.4 \text{ m s}^{-1}$$

यह दर्शाता है कि $t = 3$ s पर पत्थर का वेग 29.4 m s^{-1} है और यह अधोगामी दिशा में है। अब एक विराम के बाद निम्नलिखित प्रश्नों को हल करें।

टिप्पणी : यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि गति के समीकरणों में हम चिह्नों की एक परिपाटी का उपयोग करते हैं जिसके अनुसार ऊर्ध्व एवं दक्षिणवर्ती दिशाओं में राशियों को धनात्मक एवं अधोमुखी एवं वामवर्ती दिशाओं में राशियों को ऋणात्मक मान लिया जाता है।



टिप्पणियाँ

2.6 अवकलन एवं समाकलन की संकल्पनाएं

भौतिकी के नियमों की व्याख्या और बोध के लिए तथा विभिन्न भौतिक राशियों के बीच संबंध प्राप्त करने में गणित की सभी शाखाओं ने अत्यन्त उपयोगी साधनों का काम किया है। इस संबंध में बीजगणित ओर त्रिकोणमिति के उपयोग से आप पहले से ही परिचित हैं। भौतिकी के आगे के अध्ययन में आपको अवकलन एवं समाकलन के उपयोग से संबंधित समस्याएं मिलेंगी। इसलिए अवकलन एवं समाकलन की संकल्पनाओं का एक संक्षिप्त विवरण दिया जा रहा है। इन संकल्पनाओं के और गहन अध्ययन के लिए आप गणित की पुस्तकों का अवलोकन कर सकते हैं।

इस विषय का अध्ययन करते समय आपको निम्नलिखित पद मिलेंगे। आइए इनकी परिभाषा जानें

अचरांक: यह एक ऐसी राशि है जिसका मान गणितीय संक्रियाओं के दौरान नहीं बदलता। उदाहरण: 1, 2, 3....जैसे पूर्णांक, भिन्नें, π, e, आदि।

चर: यह एक ऐसी राशि है जो गणितीय संक्रियाओं के दौरान अलग-अलग मान ग्रहण कर सकती हैं। चर को प्राय: x, y, z आदि द्वारा निरूपित किया जाता है।

फलन: यदि 'x' के प्रत्येक मान के संगत 'y' का एक निश्चित मान हो तो 'y' को हम 'x' का फलन कहते हैं।

गणित में हम इसे नीचे दिए अनुसार निरूपित करते हैं–

$$y = f(x)$$

अर्थात y चर x का फलन है।

अवकलन गुणांक–किसी चर 'x' के सापेक्ष चर 'y' का अवकलन गुणांक 'y' में 'x' के सापेक्ष आने वाले तात्क्षणिक परिवर्तन की दर है।

माना कि 'y' चर 'x' का फलन है, अर्थत $y = f(x)$, माना कि x के मान में अत्यल्प वृद्धि δx की जाती है तो y में इसके संगत अत्यल्प वृद्धि δy होती है। तब $y + \delta y$ भी $(x + \delta x)$ का फलन होगा।

अथवा $$y + \delta y = f(x + \delta x)$$

अथवा $$\delta y = f(x + \delta x) - y$$

टिप्पणियाँ

अथवा $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

राशि $\frac{\delta y}{\delta x}$ संवृद्धि अनुपात कहलाता है तथा x एंव $(x + \delta x)$ के परिसर में x के सापेक्ष y में परिवर्तन की औसत दर को निरूपित करता है। x के सापेक्ष y में परिवर्तन की तात्क्षणिक दर ज्ञात करने के लिए हमें $\frac{\delta y}{\delta x}$ का सीमान्त मान δx के शून्य होते हुए $(\delta x \to 0)$ मान के लिए ज्ञात करना होगा।

अर्थात् $$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

अतः x के सापेक्ष y में परिवर्तन की दर का तात्क्षणिक मान होगा $\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$. यह x के सापेक्ष y का अवकलन गुणांक कहलाता है और इसे हम $\frac{dy}{dx}$ से निरूपित करते हैं।

समाकलन

समाकलन अवकलन की व्युत्क्रम गणितीय संक्रिया है। इस संकल्पना को समझने के लिए, माना कि पिंड पर एक नियत बल **F** लगता है जिसके कारण यह x दूरी तय करता है। तब बल द्वारा किया गया कार्य गुणनफल $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$ द्वारा ज्ञात किया जाता है।

परन्तु यदि बल परिवर्तनशील हो तो साधारण बीजगणित का उपयोग करके किए गए कार्य का परिकलन नहीं किया जा सकता।

उदाहरण के लिए यदि किसी पिंड को पृथ्वी की सतह से बहुत ऊपर ले जाना हो तो जैसे-जैसे पिंड ऊपर जाता है इस पर गुरुत्व का बल परिवर्तित होता है। इस तरह के प्रकरण में कार्य के परिकलन के लिए समाकलन विधि का उपयोग करते हैं।

परिवर्तनशील बल द्वारा किए गए कार्य के परिकलन के लिए (देखिए, अनुभाग 6.2 परिवर्ती बल द्वारा किया गया कार्य)

कृत कार्य, $$W = \Sigma F(x) \Delta x$$

Δx के अत्यल्प मान के लिए

$$W = \sum_{\lim \Delta x \to 0} F(x)\, dx$$

इसको लिख सकते हैं

$$W = \int F(x)\, dx$$

यह व्यंजक x के सापेक्ष फलन $F(x)$ का समाकल कहलाता है। संकेत '$\int$' समाकलन निर्दिष्ट करता है।

प्रायः उपयोग में आने वाले समाकलन एवं अवकलन के कुछ सूत्र

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (for n $\neq 1$)	(i) $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
(ii) $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \log x$	(ii) $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$
(iii) $\int dx = \int x^0 dx = \frac{x^1}{1} = x$	(iii) $\frac{d}{dx}(x) = 1$
(iv) $\int cxdx = c\int xdx$ (c अचरांक है)	(iv) $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{d}{dx}(u)$
(v) $\int (u \pm v \pm w)dx = \int udx \pm \int vdx \pm \int wdx$	(v) $\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx}$
(vi) $\int e^x dx = e^x$	(vi) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
(vii) $\int \sin xdx = -\cos x$	(vii) $\frac{d}{dx}\{\sin(x)\} = +\cos x$
(viii) $\int \cos xdx = \sin x$	(viii) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
(ix) $\int \sec^2 xdx = \tan x$	(ix) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec x$
(x) $\int \mathrm{cosec}^2 xdx = -\cot x$	(x) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\mathrm{cosec}^2 x$

इस सारणी को ध्यान से देखेंगे तो आपको यह स्पष्ट हो जाएगा कि समाकलन और अवकलन एक दूसरे की व्युत्क्रम संक्रियाएं हैं।

कुछ देर रुकिए और नीचे लिखे प्रश्नों को हल कीजिए।

पाठगत प्रश्न 2.4

1. एक वस्तु विराम अवस्था से प्रारंभ करके अचर त्वरण के साथ 4 सेकन्ड में 40 मीटर की दूरी तय करती है। इसका अंतिम वेग ज्ञात कीजिये तथा कुल दूरी का आधा भाग तय करने के लिये आवश्यक समय बताइए।

2. एक कार एक सड़क पर 5 मीटर/सेकन्ड के अचर त्वरण के साथ चल रही है। प्रारंभ में 5 मीटर पर उसका वेग 3 मीटर/सेकंड था। 2 सेकंड के बाद इसकी स्थिति और वेग की गणना कीजिए।

3. एक वस्तु को ऊर्ध्वाधर दिशा में किस वेग से फेंका जाय कि वह 25 मीटर की ऊँचाई तक पहुँचे। यह भी बताइए कि वह कितने समय तक वायु में रहेगी।

4. एक गेंद ऊपर की ओर हवा में फेंकी गयी। उसका त्वरण फेंकते समय अधिक होगा या फेंकने के कुछ समय बाद।

आपने क्या सीखा

- एक वस्तु के विस्थापन एवं तदनुरुप समय अंतराल का अनुपात औसत वेग कहलाता है।
- तय की गयी दूरी को, दूरी तय करने में लिये गये समय से भाग देने पर औसत चाल प्राप्त होती है।
- एक वस्तु की आपेक्षिक स्थिति में दूसरी वस्तु के सापेक्ष परिवर्तन की दर दूसरी वस्तु के सापेक्ष पहली वस्तु का आपेक्षिक वेग कहलाता है।
- एकांक समय में वेग में परिवर्तन त्वरण कहलता है।
- विराम स्थिति में वस्तु का स्थिति-समय ग्राफ, समय अक्ष की ओर झुकी हुई रेखा के रुप में होता है।
- एकसमान चाल के लिये स्थिति-समय ग्राफ, समय अक्ष की ओर झुकी हुई रेखा के रुप में होता है।
- वस्तु द्वारा समान समय अंतराल में समान दूरी तय करने को एकसमान चाल कहते हैं।
- समय के किसी एक क्षण या उसके पथ के किसी एक बिंदु पर वस्तु का वेग उसका तात्क्षणिक वेग कहलाता है।
- 'स्थिति-समय आलेख का ढाल वेग बतलाता है।
- सतत त्वरण के साथ गतिशील वस्तु के लिये वेग समय ग्राफ समय अक्ष पर झुकी हुई सीधी रेखा के रुप में होता है।
- वेग समय ग्राफ के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल तय की गयी दूरी बताता है।
- वस्तु के त्वरण का परिकलन वेग समय आलेख के ढाल द्वारा किया जा सकता है।
- वस्तु की गति की व्याख्या के लिये निम्नलिखित तीन समीकरण उपयोग किये जाते हैं।

  (i) $v = v_0 + at$

  (ii) $x = x_0 + v_0 t + ½\, at^2$

  (iii) $v^2 = v_0^2 + 2a.(x - x_0)$

- अवकलन एवं समाकलन की संकल्पनाओं सम्बन्धी प्रारम्भिक ज्ञान।

पाठांत प्रश्न

1. औसत चाल और औसत वेग में अंतर बताइए।
2. एक कार "A" 65 किलामीटर प्रति घण्टे की चाल से सीधी सड़क पर जा ही है। उसी दिशा में एक मोटर साइकिल "B" भी उससे आगे 80 किलोमीटर/प्रतिघंटे की चाल से जा रही है। "A" के सापेक्ष "B" का वेग क्या है?
3. एक कार 30 m की दूरी तय करने में कितना समय लेगी यदि वह विराम की अवस्था से 2.0 m s^{-2} की दर से त्वरण करती है?
4. एक मोटर साइकिल चालक दो स्थानों के बीच की आधी दूरी 30 km h^{-1} की चाल से और शेष आधा भाग 60 km h^{-1} की चाल से तय करता है। मोटर साइकिल की औसत चाल ज्ञात कीजिए।
5. एक जल पक्षी सीधे दक्षिण की ओर 25 किलोमीटर दूरी जाने के लिये 20 किलोमीटर प्रति घंटे के अचर वेग से उड़ता है। यह जल पक्षी वह दूरी तय करने में कितना समय लेगा?
6. बंगलौर-नई दिल्ली की वायुयान यात्रा में सरल रेखीय दूरी 1200 किलोमीटर है और ट्रेन से दूरी 1500 किलोमीटर है। यदि वायुयान द्वारा यात्रा 2 घंटे में पूरी होती है और रेल द्वारा 20 घंटे में तो दोनो यात्राओं की औसत चाल का अनुपात बताइए।
7. एक कार विरामवस्था से सीधी सड़क पर गति करती हुई 5 सेकन्ड में 50 किलोमीटर प्रति घंटे का वेग प्राप्त करे तो उसका औसत त्वरण बताइए।
8. एक वस्तु 2.1 मीटर/सेकंड के प्रारंभिक वेग से शुरु करके 3 सेकन्ड के लिए 8.0 मीटर/सेकन्ड^2 त्वरण से गति करती है।

   (a) वस्तु त्वरण की अवधि में कितनी दूरी तय करेगी।

   (b) यदि वस्तु प्रारंभ में विराम अवस्था में होती तो वह कितनी दूरी तय करती?
9. एक गेंद एक चट्टान के शिखर से विराम अवस्था से छोड़ी जाती है। चट्टान के शीर्ष को शून्य स्तर पर लेते हुए और ऊपर की स्थिति को धनात्मक दिशा लेते हुए निम्न ग्राफ खींचिऐ।

   (i) विस्थापन-समय ग्राफ; (ii) वेग-समय ग्राफ; (iii) चाल समय ग्राफ
10. एक गेंद h ऊँचाई वाली चट्टान के शिखर से वेग v_0 से ऊर्ध्वाधर दिशा में ऊपर की ओर फेंकी जाती है और चट्टान तल पर आ गिरती है। तल को संदर्भ स्थल (शून्य तल) लेते हुए और ऊपर की दिशा को धनात्मक मानते हुए निम्नलिखित ग्राफ बनाइए।

    (i) दूरी-समय ग्राफ; (ii) वेग-समय ग्राफ; (iii) विस्थापन-समय ग्राफ; (iv) चाल-समय ग्राफ
11. एक वस्तु 10 मीटर/सेकन्ड के वेग से ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंकी जाती है। उच्चतम बिंदु पर वस्तु के त्वरण और वेग का क्या मान होगा?

12. 10 ग्राम एवं 100 ग्राम द्रव्यमान की दो वस्तुएँ एकसमान ऊँचाई से गिराई जाती हैं। क्या वे एक समय पर भूमि पर पँहुचेंगी? व्याख्या कीजिए।

13. एकसमान गति करते पिंड में उसकी गति की दिशा से समकोण पर त्वरण दिया जाता है। इससे उसकी गति किस प्रकार प्रभावित होगी?

14. किसी क्षण पर वेग–समय ग्राफ का ढाल क्या बतलाता है?

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

2.1

1. हाँ। जब वस्तु अपनी प्रारंभिक स्थिति पर वापस आती है तो उसका वेग शून्य होता है लेकिन उसकी चाल शून्य नहीं होती।

2. औसत चाल $= \dfrac{2+2}{\dfrac{2}{8}+\dfrac{2}{10}} = \dfrac{4}{9} \times 20 = 8.89 \text{ km h}^{-1}$, तथा औसत वेग = 0

3. हाँ, जब दो कारें समान वेग से समान दिशा में गति कर रही हों तो उनका आपेक्षिक वेग शून्य होगा।

4. (a) 1 मीटर/सेकंड

   (b) 2 मीटर/सेकंड

2.2

1. चित्र 2.2 देखें

2. (i) A, (ii) B अधिक दूरी तय करता है।

   (iii) B (iv) A

   (v) जब वे प्रारंभिक बिंदु से 3 किलोमीटर दूरी पर हैं।

3. एक समान गति में

4. (a) संभव नहीं है, क्योंकि चली गयी दूरी शून्य नहीं हो सकती।

2.3

1. (i) (a) वस्तु शून्य वेग से चलना प्रारंभ करती है।

   (b) प्रारंभ से लेकर 5 वें सेकंड तक गति समान रुप से त्वरित है। इसे रेखा OA द्वारा दर्शाया गया है।

$$a = \frac{15-0}{5-0} = 3 \text{ m s}^{-2}$$

(c) 5वें एवं 10वें सेकंड के बीच वस्तु एकसमान गति करती है। इसे AB द्वारा दर्शाया गया है।

$$a = \frac{15-15}{15-5} = \frac{0}{10} = 0 \text{ m s}^{-2}.$$

(d) 15वें सेकंड से 25वें सेकंड तक गति समानरुप से मंदित है। इसे रेखा BC द्वारा दर्शाया गया है।

$$a = \frac{0-15}{25-15} = -1.5 \text{ m s}^{-2}.$$

(ii) (a) $\text{औसत चाल} = \dfrac{\text{तय की गयी दूरी}}{\text{लिया गया समय}} = \dfrac{\text{OABC का क्षेत्रफल}}{(25-0)}$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\times 15\times 5\right) + (15\times 10) + \left(\frac{1}{2}\times 15\times 10\right)}{25} = \frac{525}{50} = 10.5 \text{ m s}^{-1}.$$

(b) मंदित-वेग समय के साथ घटता है।

(c) $\text{कुल चली गयी दूरी} = \left(\dfrac{20\times 15}{2}\right)\text{m} + \left(\dfrac{10\times 7}{2}\right)\text{m} = 185 \text{ m}.$

$\therefore \text{ औसत चाल} = \left(\dfrac{185}{22}\right)\text{ms}^{-1} = 8.4 \text{ m s}^{-1}.$

$\text{कुल विस्थापन} = \left(\dfrac{20\times 15}{2}\right)\text{m} - \left(\dfrac{10\times 7}{2}\right)\text{m} = 115 \text{ m}.$

$\therefore \text{ औसत वेग} = \dfrac{115}{22}\text{ms}^{-1} = 5.22 \text{ m s}^{-1}.$

2.4

1. समीकरण $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ का प्रयोग करते हुए

$$40 = \frac{1}{2} \times a \times 16$$

$$\Rightarrow a = 5 \text{ m s}^{-2}$$

अब $v^2 = v_0^2 + 2a\,(x - x_0)$ का प्रयोग करने पर

$v = 20\ \text{m s}^{-1}$

पुनः आधी दूरी तय करने में लगा समय t का मान निम्न समीकरण द्वारा ज्ञात किया जायेगा।

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\text{at}^2$$

$$\Rightarrow\ 20 = 0 + \frac{1}{2} \times 5 \times \text{t}^2$$

$$\Rightarrow\ t^2 = 8 \text{ or } t = 2\sqrt{2}\ \text{s}$$

2. समीकरण (2.9) के उपयोग द्वारा

   $x\ = 21\ \text{m}$

   और समीकरण (2.6) के उपयोग द्वारा

   $v = 13\ \text{m s}^{-1}$

3. अधिकतम ऊँचाई पर $v = 0$,

   समीकरण (2.10) का उपयोग करने पर

   $v_0 = 7\sqrt{10}\ \text{m s}^{-1} = 22.6\ \text{m s}^{-1}$.

   वस्तु अधिकतम ऊँचाई पर पहुँचने में लिए गए समय के दो गुने समय तक हवा में रहेगी।

4. फेंकते समय गेंद का त्वरण अधिक होता है।

पाठांत प्रश्नों के उत्तर

2. $15\ \text{km h}^{-1}$
3. 5.47 s
4. $40\ \text{m s}^{-1}$
5. 1.25 h
6. 8 : 1
7. $2.8\ \text{m s}^{-2}$ (या $3000\ \text{km h}^{-2}$)
8. (i) 42 m (ii) 36 m
11. O और $9.8\ \text{m s}^{-2}$.

3

गति के नियम

पूर्व अध्याय में आपने विस्थापन, वेग एंव त्वरण के पदों में किसी पिंड की गति का वर्णन करना सीखा। परन्तु एक महत्वपूर्ण प्रश्न यह उठता है कि वह क्या है जो किसी पिंड को गतिमान करता है? अथवा यह कि जमीन पर लुढ़कती हुई कोई गेंद किस कारण रुक जाती है? अपने दिन प्रतिदिन के अनुभव से हम जानते हैं कि यदि हम कमरे में रखी किसी वस्तु की स्थिति में परिवर्तन करना चाहें तो हमें उसे खींचना या धकेलना पड़ता है। इसी प्रकार फुटबॉल को दूर भेजने के लिये उस पर ठोकर मारनी पड़ती है। छक्का लगाने के लिये क्रिकेट बॉल पर बल्ले को जोर से मारना पड़ता है। आप मानेंगे कि इस प्रकार की गतिविधियों में मांसपेशियों की क्रियाएं सन्निहित हैं और उनका प्रभाव स्पष्ट दृष्टिगोचर होता है।

तथापि, ऐसी अनेक घटनाएं होती हैं जिनके कारक बल दृष्टिगोचर नहीं होते। उदाहरणार्थ– वर्षा की बूँदों के जमीन पर गिरने का क्या कारण है? पृथ्वी द्वारा सूर्य के चारों तरफ घूमने का क्या कारण है? इस पाठ में आप गति के मूल सिद्धांतों का अध्ययन करेंगे और गति के कारणों की खोज करेंगे। इस पाठ में विकसित बल की अवधारणा भौतिकी की विभिन्न शाखाओं में उपयोगी सिद्ध होगी। न्यूटन ने बल व गति के अंतरंग संबंधों को दर्शाया। गति के नियम प्रकृति के मूलभूत नियम हैं और दैनिक जीवन की घटनाओं को समझने में हमारी सहायता करते हैं।

उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के पश्चात आप

- *जड़त्व के महत्व को समझा सकेंगे;*
- *न्यूटन के गति के नियमों को बता पायेंगे और उनको समझाने के लिए उदाहरण दे सकेंगे*
- *संवेग संरक्षण के नियम की व्याख्या कर पायेंगे और उदाहरणों द्वारा इसको समझा सकेंगे।*
- *संगामी बलों के संतुलन की संकल्पना को समझ पाएंगे;*
- *घर्षण गुणांक को परिभाषित कर पायेंगे और स्थैतिक घर्षण, गतिज घर्षण एंव लोटनिक घर्षण में भेद स्पष्ट कर सकेंगे;*

- *घर्षण कम करने की विभिन्न विधियाँ बता सकेंगे और दैनिक जीवन में घर्षण की भूमिका पर प्रकाश डाल पायेंगे; एवं*
- *दी गयी परिस्थिति का विश्लेषण कर पायेंगे ओर बल निर्देशक आरेख* (Free body diagrams) का उपयोग करके न्यूटन के नियमों को लागू कर सकेंगे।

3.1 बल और जड़त्व की अवधारणाएं

हम सभी जानते हैं कि स्थिर वस्तुएं अपने स्थान पर ही बनी रहती हैं। ये स्वयं एक स्थान से दूसरे स्थान पर नहीं जा सकती जब तक कि बल के उपयोग द्वारा इनकी स्थिति को न बदला जाए। इसी प्रकार नियत वेग से गतिशील किसी वस्तु की गति में परिवर्तन करने के लिये बल लगाने की आवश्यकता होती है।

किसी वस्तु की स्थिरता अथवा एकसमान रेखीय गति की अवस्था में बने रहने की प्रवृति को **जड़त्व** कहा जाता है। **किसी पिंड का द्रव्यमान उसके जड़त्व का माप है।**

एक प्रकार से जड़त्व एक विलक्षण गुण है। यदि यह न होता तो आपकी किताबें, सामान आदि इधर से उधर पहुँचकर अस्तव्यस्त हो जाते। याद रखें कि किसी वस्तु की स्थिरता या समान रुप से गतिशील अवस्था निरपेक्ष नहीं होती है। पिछले पाठ में आप पढ़ चुके हैं कि किसी प्रेक्षक को एक वस्तु स्थिर दिखायी पड़ सकती है जबकि दूसरे प्रेक्षक को वह गतिशील प्रतीत हो सकती है। प्रेक्षणों से पता चलता है कि किसी वस्तु के वेग में तभी परिवर्तन लाया जा सकता है जबकि उस पर एक नेट बल कार्य करे।

आप बल शब्द से सुपरिचित हैं इसे हम दैनिक जीवन में विभिन्न संदर्भो में उपयोग करते हैं। किसी वस्तु को खींचने, धकेलने, ठोकर मारने या पीटने में बल आरोपित होता है। हालाँकि बल दिखायी नहीं पड़ता इसके प्रभाव दृष्टिगोचर होते हैं और अनुभव किये जा सकते हैं। बलों के प्रभाव दो प्रकार के होते हैं।

(a) ये वस्तु की आकृति एंव साइज बदल सकते हैं। उदाहरण के लिए एक गुब्बारे की आकृति उस पर लगाये गये बल के परिमाण के अनुसार बदलती है।

(b) बल किसी वस्तु की गति को भी प्रभावित करते हैं–

बल किसी स्थिर वस्तु को गति प्रदान कर सकता है अथवा गतिशील वस्तु को विराम अवस्था में ला सकता है। बल किसी वस्तु की गति की दिशा अथवा चाल को भी परिवर्तित कर सकता है।

(c) बल किसी वस्तु को किसी अक्ष के परित: घूर्णन करा सकते हैं। सातवें पाठ में आप इस सम्बंध में पढ़ेंगे।

3.1.1 बल एवं गति

बल एक सदिश राशि है इसलिये जब कई बल एक साथ किसी वस्तु पर लगे होते हैं तो इनका परिणामी बल, सदिश योग द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। जैसा कि पाठ 1 में बताया जा चुका है।

किसी पिंड की गति उसके विस्थापन, वेग आदि से अभिलक्षित होती है। हम ऐसी कई स्थितियों से गुजरते हैं जिनमें पिंड का वेग निरतंर बढ़ता जाता है जब तक कि यह जमींन से टकराकर रुक न जाय। इसी प्रकार एक क्षैतिज तल में लुढ़कती गेंद का वेग धीरे–धीरे कम होकर शून्य हो जाता है।

अनुभव के आधार पर हम यह जानते हैं कि किसी वस्तु की स्थिति परिवर्तित करने के लिये एक शून्येत्तर बल की आवश्यकता पड़ती है। किसी गतिशील वस्तु के वेग में परिवर्तन उस पर आरोपित बल की दिशा पर निर्भर करता है। यदि किसी वस्तु पर लगाया गया बल उसकी गति की दिशा में कार्य करता है तो वस्तु के वेग का परिमाण अधिक हो जायेगा। यदि वस्तु पर लगे बल की दिशा गति की दिशा के विपरीत हो तो वेग का परिमाण कम हो जायेगा। यदि किसी वस्तु पर बल इसके वेग के लम्बवत लगा हो तो वस्तु के वेग का परिमाण अचर रहता है देखिए अनुच्छेद (4.3)। इस प्रकार लगा बल केवल वस्तु की दिशा परिवर्तित कर सकता है।

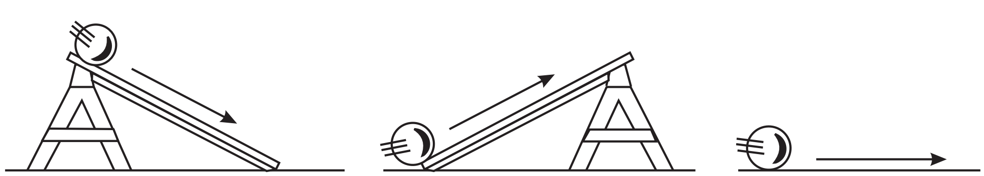
अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि वस्तु के वेग में उतने समय तक ही परिवर्तन होता है जब तक उस पर नेट बल कार्य करता है।

3.1.2 गति का प्रथम नियम

जब हम काँच की गोली को किसी चिकने फर्श पर लुढ़काते हैं तो यह कुछ समय पश्चात रुक जाती है। स्पष्टतः यदि हम इसे निरन्तर समान वेग से गतिशील करना चाहें तो इस पर सतत रुप से एक बल लगाना पड़ेगा। इसी प्रकार एक ट्रॉली को निश्चित वेग से गतिशील रखने के लिये इसे लगातार खींचना या धकेलना पड़ेगा। क्या यहाँ उल्लिखित स्थितियों में ट्रॉली या गोली पर कोई नेट बल कार्य कर रहा है?

गति एवं जड़त्व

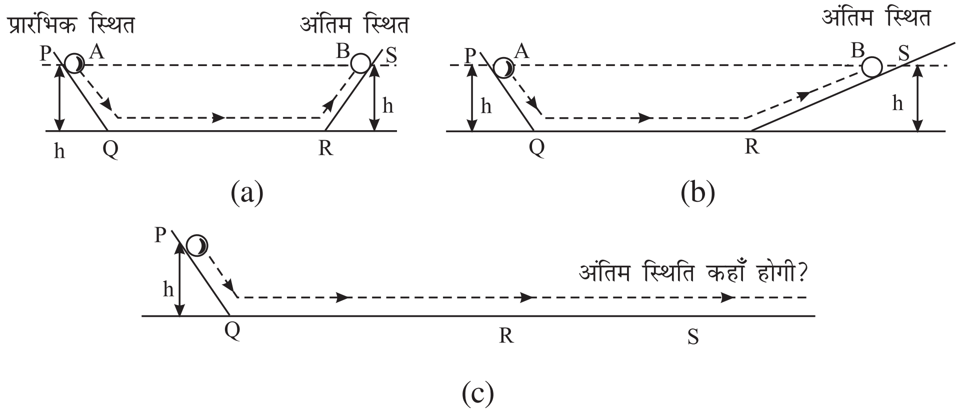
गैलीलियों ने इस बात को सिद्ध करने के लिये कि किसी बाह्य बल की अनुपस्थिति में कोई वस्तु अपनी स्थिर अवस्था या एक सरल रेखीय समगति अवस्था में यथावत बनी रहती है कुछ प्रयोग किए। गैलीलियो ने पाया कि एक नत तल पर नीचे की ओर गतिशील वस्तु में त्वरण (चित्र 3.1 (a) और ऊपर की ओर गतिशील वस्तु में मंदन होता है (चित्र 3.1 (b))। उन्होंने तर्क दिया कि यदि तल न नीचे की ओर आनत हो न ऊपर की ओर (अर्थात यदि यह क्षैतिज हो) तो वस्तु में न त्वरण होगा न मंदन। क्षैतिज तल में यह वस्तु एकसमान वेग से गतिशील रहेगी। शर्त यह है कि इस पर कोई बाह्य बल आरोपित न हो।



(a) (b) (c)

चित्र 3.1 : नत और क्षैतिज तलों में किसी पिंड की गति

एक दूसरे मानसिक प्रयोग में उन्होंने दो परस्पर अभिमुख नत तल लिये जैसा चित्र 3.2 में दिखाया गया है। तल PQ का झुकाव तीनों स्थितियों में समान है जबकि तल RS का झुकाव (a) में (b) और (c) की अपेक्षा अधिक है।



चित्र 3.2: एक दूसरे की ओर अभिमुख नत तलों पर किसी पिंड की गति

तल PQRS बहुत चिकना तल है और गोली काँच की हैं जब तल PQ पर गोली लुढ़काई जाती है तो वह RS तल में लगभग समान ऊँचाई तक ऊपर जाती है। जब RS तल का झुकाव कम करते हैं तो इसे समान ऊँचाई तक ऊपर जाने के लिये अधिक दूरी तय करनी पड़ती है (चित्र 3.2)। जब तल क्षैतिज हो जाता है (चित्र 3.2c) तो गोली को PQ के समान ऊँचाई प्राप्त करने के लिये लगातार चलते रहना पड़ेगा। (यहाँ यह मान लिया गया है कि गोली और तल के बीच कोई घर्षण नहीं हो रहा है।)

सर इसाक न्यूटन
(1642–1727)

न्यूटन का जन्म वोल्सथोर्प, इंगलैण्ड में, 1642 में हुआ। उनकी शिक्षा ट्रिनिटी कॉलेज, कैंब्रिज में हुई और वे एक पारंगत वैज्ञानिक बन गए। पृथ्वी की ओर गिरते हुए सेब को देखकर उन्होंने गुरुत्व के मूल नियम का निरुपण किया। उन्होंने गति के नियम एंव गुरुत्व के नियमों का प्रतिपादन किया। न्यूटन मेधावी थे और उन्होंने विज्ञान के सभी क्षेत्रों में योगदान दिया। उनका योगदान उच्च कोटि का है और आधुनिक वैज्ञानिक विचारधारा की आधारशिला है। उन्होंने अपनी पुस्तक ''प्रिंसपिया'' लेटिन में लिखी और प्रकाशिकी पर लिखी उनकी पुस्तक अंग्रजी भाषा में प्रकाशित की गई है।

तार्किक दृष्टि से आप प्रश्न कर सकते हैं कि तब ट्रॉली की समान गति को बनाये रखने के लिये निरन्तर एक बल का प्रयोग आवश्यक क्यों है? इसका उत्तर यह है कि ट्रॉली की गति की दिशा में सतत बल लगाने की आवश्यकता घर्षण के कारण विपरीत दिशा में लग रहे बल को संतुलित करने के लिए होती है। अर्थात ट्रॉली को लगातार धकेल कर या खींच कर उस पर कार्य कर रहे घर्षण बल पर पार पाया जा सकता है।

न्यूटन ने गैलीलियो के निष्कर्ष को एक सामान्य रुप दिया जिसे न्यूटन का गति का प्रथम नियम भी कहते हैं। इस नियम के अनुसार कोई वस्तु विराम या सरल रेखीय समान गति की अवस्था में तब तक बनी रहती है जब तक उस पर एक नेट बाह्य बल प्रयोग न किया जाय।

जैसा कि आप जानते हैं, किसी वस्तु की विराम या गति की अवस्था, प्रेक्षक के संदर्भ में उसकी सापेक्ष स्थिति पर निर्भर करती है। चलती हुई कार में बैठा एक व्यक्ति उसी कार में बैठे सड़क पर खड़े व्यक्ति की तुलना में गतिमान होगा। इस कारण स्थिति, वेग, त्वरण और बल में परिवर्तन के मापन के लिये निर्देश तंत्र (frame of reference) का चयन आवश्यक हो जाता है।

एक ऐसा निर्देश तंत्र जिसके सापेक्ष सरल रेखा में गतिशील वस्तु का वेग नेट बाह्य बल के अभाव में सदैव अचर बना रहता है जड़त्वीय निर्देश तंत्र (inertial frame of reference) कहलाता है। इसे यह नाम सभी वस्तुओं में विद्यमान जड़त्व के उस गुण के कारण दिया गया है जिसके होते हुए वे अपनी विराम या ऋजुरेखीय एक समान गति की अवस्था को बनाये रखना चाहते हैं। (सभी प्रायोगिक उद्देश्यों के लिये) पृथ्वी से जुड़ा निर्देश तंत्र जड़त्वीय निर्देश तंत्र माना जा सकता है।

अब आप थोड़ा विराम लें और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दें।

पाठगत प्रश्न 3.1

1. क्या यह कहना सही है कि कोई वस्तु हमेशा उस पर कार्य कर रहे नेट बाह्य बल की दिशा में चलती है?
2. कौन सी भौतिक राशि किसी पिंड के जड़त्व की माप के लिए उपयोग की जाती है?
3. क्या किसी बल द्वारा एक वस्तु के वेग के परिमाण को अचर रखते हुए केवल उसकी दिशा को बदला जा सकता है?
4. उन विविध परिवर्तनों का उल्लेख कीजिए जो किसी पिंड में बल आरोपित करने पर होते हैं।

3.2 संवेग की परिकल्पना

आपने देखा होगा कि एक क्षेत्ररक्षक के लिये उच्च वेग से आती हुई गेंद को रोकना कठिन होता है यद्यपि इसका द्रव्यमान कम है। इसी प्रकार एक धीमी गति से चलते हुए ट्रक को भी रोकना कठिन होता है क्योंकि इसका द्रव्यमान अधिक है। ये उदाहरण संकेत देते हैं कि बल द्वारा किसी वस्तु की गति में प्रभाव के अध्ययन के लिये इसका द्रव्यमान एंव वेग दोनों महत्वपूर्ण हैं।

एक वस्तु के द्रव्मान m और इसके वेग $\boldsymbol{v}$ का गुणनफल इसका रैखिक संवेग $\mathbf{p}$ कहलाता हैं इसका गणितीय सूत्र है

$$\mathbf{p} = m\boldsymbol{v}$$

SI पद्धति में संवेग को $kgms^{-1}$ में मापा जाता है। संवेग सदिश राशि है। संवेग की दिशा वही होती है जो वेग की होती है। अत: एक वस्तु के संवेग में परिवर्तन केवल इसके परिमाण में या केवल दिशा में अथवा दोनों में परिवर्तन से हो सकता है। निम्न उदाहरणों से इस बात को स्पष्ट किया जा सकता है।

उदाहरण 3.1 अमन का द्रव्यमान 60 kg है और वह 1.0 m s^{-1} के वेग से 40 kg द्रव्यमान के मनोज की ओर चल रहा है जो स्वयं 1.5 m s^{-1} के वेग से अमन की ओर गतिमान है। उनके संवेगों की गणना कीजिए।

Solution : अमन के लिए

$$\text{संवेग} = \text{द्रव्यमान} \times \text{वेग}$$

$$= (60 \text{ kg}) \times (1.0 \text{ m s}^{-1})$$

$$= 60 \text{ kg ms}^{-1}$$

मनोज के लिये

$$\text{संवेग} = 40 \text{ kg} \times (-1.5 \text{ m s}^{-1})$$

$$= -60 \text{ kg m s}^{-1}$$

ध्यान दें कि हालांकि अमन और मनोज का संवेग समान है, लेकिन उनकी दिशा एक दूसरे के विपरीत हैं।

उदाहरण 3.2 एक 2 kg की वस्तु $t = 0$s पर स्वतंत्रतापूर्वक गिरती है। गिरने के दौरान (a) $t = 0$s, (b) $t = 1$s और (c) $t = 2$s पर इसका संवेग कितना होगा?

हल : (a) $t = 0$s पर वस्तु का वेग शून्य होगा, वस्तु का संवेग भी शून्य होगा।

(b) $t = 1$s, पर वस्तु का वेग नीचे की ओर 9.8 ms^{-1} होगा [$v = v_0 + at$ का उपयोग करने पर]

अत: वस्तु का संवेग होगा।

$$p_1 = (2 \text{ kg}) \times (9.8 \text{ m s}^{-1}) = 19.6 \text{ kg m s}^{-1} \text{ नीचे की ओर}$$

(c) $t = 2$s पर वस्तु का वेग 19.6 m s^{-1} नीचे की ओर होगा ($v = v_0 + at$ का उपयोग करने पर) अत: वस्तु का संवेग होगा

$$p_2 = (2 \text{ kg}) \times (19.6 \text{ m s}^{-1})$$

$$= 39.2 \text{ kg m s}^{-1}$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि नीचे की ओर मुक्त रुप से गिरती हुई वस्तु का संवेग केवल परिणाम में बदलता है और सदैव एक ही दिशा की ओर इंगित करता है। विचार करें कि मुक्त रुप से गिरती हुई वस्तु के संवेग– परिमाण में परिवर्तन का कारण क्या है?

उदाहरण 3.3 द्रव्यमान 0.2 kg की एक रबड़ की गेद दृढ़ खड़ी दीवार से 10 ms^{-1} की चाल से अभिलम्ब के अनुदिश टकराती है और मूल मार्ग पर उसी गति से प्रतिक्षेप (rebound) करती है। गेंद के संवेग परिवर्तन की गणना करें।

हल : यहाँ गेंद के संवेग का परिमाण टकराने से पहले व बाद में समान रहेगा लेकिन इसकी दिशा विपरीत होगी। संवेग का परिमाण $(0.2\ kg)\times(10\ m\ s^{-1}) = 2\ kg\ m\ s^{-1}$ है।

यदि हम प्रारंभिक संवेग सदिश को धनात्मक x अक्ष की दिशा में लें तो अंतिम संवेग सदिश ऋणात्मक x-अक्ष की दिशा में होगा।

$$\text{अतः यदि } p_i = 2\ kg\ m\ s^{-1}, p_f = -2\ kg\ m\ s^{-1}$$

तो गेंद के संवेग में परिवर्तन $= p_f - p_i = (-2\ kg\ m\ s^{-1}) - (2\ kg\ m\ s^{-1})$

$$= -4\ kg\ m\ s^{-1}.$$

यहाँ ऋण चिह्न दर्शाता है कि गेंद का संवेग $-x$ अक्ष की दिशा में $4\ kg\ m\ s^{-1}$ तक परिवर्तित होता है। गेद के संवेग परिवर्तन का कारण क्या है?

व्यवहारिक स्थिति में रबड़ की गेंद के दीवार से टकरा कर लौटने पर उसकी गति में ह्रास होता है। तब संवेग का परिमाण भी बदल जाता है।

3.3 न्यूटन का द्वितीय गति नियम

आपको ज्ञात है कि अचर वेग से गतिशील किसी वस्तु का संवेग भी अचर होगा। न्यूटन का प्रथम गति नियम यह बताता है कि इस प्रकार की वस्तु पर कोई शुद्ध बाह्य बल कार्य नहीं करता है।

उदाहरण 3.2 में हमने देखा कि गुरुत्वाकर्षण के प्रभाव में मुक्त रुप से गिरती हुई गेंद का संवेग समय के साथ बढ़ जाता है, क्योंकि इस वस्तु पर गुरुत्वाकर्षण बल कार्य करता है। अतः ऐसा प्रतीत होता है कि एक वस्तु के संवेग परिवर्तन का इस पर कार्य कर रहे नेट बल और कार्य करने की अवधि के बीच एक संबंध होता है। न्यूटन का गति का द्वितीय नियम इनके बीच एक मात्रात्मक संबंध स्थापित करता है। इसके अनुसार एक वस्तु के संवेग परिवर्तन की दर वस्तु पर कार्य कर रहे बल के समानुपाती होती है तथा वस्तु के संवेग में परिवर्तन, वस्तु पर कार्य कर रहे नेट बाह्य बल की दिशा में ही होता है।

इसका अर्थ यह है कि यदि समय Δt में वस्तु पर कार्य कर रहे नेट बाह्य बल $\boldsymbol{F}$ के कारण वस्तु के संवेग में परिवर्तन Δp हो तो

$$\mathbf{F} \propto \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$$

अथवा
$$\mathbf{F} = k\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$$

जहाँ k अनुपातिकता स्थिराँक है।

$$\mathbf{F} = k\, m \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$$

$$\mathbf{F} = k\, m\, \mathbf{a} \qquad (\text{क्योंकि } \frac{\Delta v}{\Delta t} = \mathbf{a}) \tag{3.1}$$

k का मान F, p एंव t के मात्रकों के चयन पर निर्भर करता है। यदि इन मात्रकों का चयन इस प्रकार किया जाय कि

द्रव्यमान m का परिमाण $= 1$ इकाई

एवं त्वरण a का परिमाण $= 1$ इकाई हो

तो बल F का परिमाण भी 1 इकाई होगा, अत: हम लिख सकते हैं $1 = k.1.1$

तब $K = 1$ और

$$\mathbf{F} = m\, \mathbf{a} \tag{3.2}$$

SI मात्राकों में $m = 1$ kg, $a = 1$ m s^{-2} तब

$$F = 1\text{ kg} \times 1\text{ m s}^{-2} = 1\text{ kg m s}^{-2}$$

$$= 1 \text{ इकाई बल} \tag{3.3}$$

बल का SI मात्रक (अर्थात् 1 kg m s^{-2}) न्यूटन कहलाता है।

उदाहरण 3.4 0.4 kg द्रव्यमान की एक गेंद धकेले जाने पर 20 ms^{-1} की गति से लुढ़कना शुरु करती है और 10 सेकंड के बाद रुक जाती है। गेंद पर लगे प्रतिरोधक बल को पूरे समय एकसमान मानते हुए इसके परिमाण की गणना कीजिए।

हल : दिया है $m = 0.4$ kg, प्रारंभिक वेग $u = 20$ m s^{-1}, अंतिम वेग $v = 0$ m s^{-1} और $t = 10$s

$$\text{अत:}\ |\mathbf{F}| = m|\mathbf{a}| = \frac{m(v-u)}{t} = \frac{0.4\text{ kg }(-20\text{ m s}^{-1})}{10\text{ s}}$$

$$= -0.8\text{ kg m s}^{-2} = -0.8\text{ N}$$

यहाँ ऋणात्मक चिह्न का अर्थ है कि गेंद पर लगने वाला बल गति की दिशा के विपरीत कार्य करता है।

यहाँ ध्यान रखने योग्य महत्वपूर्ण बात यह है कि यहाँ पर वर्णित न्यूटन की गति का द्वितीय नियम उन वस्तुओं के लिए मान्य है जिनका द्रव्यमान अचर है। क्या यह नियम, राकेट जैसी उन वस्तुओं पर भी लागू होता है जिनका द्रव्यमान समय के साथ परिवर्तित होता है?

उदाहरण 3.5 50 N परिमाण का एक नियत बल, 10 m s^{-1} की प्रारम्भिक चाल से गतिशील एक 10kg की वस्तु पर लगाया जाता है। यदि बल गति की दिशा के विपरित दिशा में लगता है तो वस्तु को विरामावस्था में आने से कितना समय लगेगा?

हल : दिया है $m = 10$ kg, F = –50 N, $\upsilon_0 = 10$ m s^{-1} तथा $\upsilon = 0$. हमें t ज्ञात करना है। क्योंकि

$$F = ma$$

हम लिख सकते हैं

$$F = m\left(\frac{v - v_0}{t}\right)$$

$$\therefore \qquad -50\text{ N} = 10\text{ kg}\left(\frac{0 - 10\text{ m s}^{-1}}{t}\right)$$

या

$$t = \frac{-100\text{ kg m s}^{-1}}{-50\text{ N}} = \frac{100\text{ kg m s}^{-1}}{50\text{ kg m s}^{-2}} = 2\text{ s.}$$

पाठगत प्रश्न 3.2

1. विभिन्न द्रव्यमानों की दो वस्तुओं का संवेग समान है। दोनों में से कौन सी वस्तु तेज चल रही है?

2. एक बालक υ_0 वेग से एक गेंद ऊपर फेंकता है। यदि गेंद उसके पास उसी वेग से वापस आ जाती है तो क्या निम्नलिखित में कोई परिवर्तन होगा?

   (a) गेंद के संवेग में ....

   (b) गेंद के संवेग के परिमाण में ....

3. जब एक गेंद ऊँचाई से गिरती है तो इसका संवेग बढ़ जाता है। इसका संवेग बढ़ने का क्या कारण है?

4. किस अवस्था में वस्तु के संवेग में परिवर्तन अधिक होगा?

   (a) जब मूल रुप से विराम की स्थिति वाली 2 kg की वस्तु पर 0.1s के लिये 150N का बल कार्य करता है।

   (b) जब मूलरुप से विराम की स्थिति वाली 2 kg की वस्तु पर 0.2s के लिये 150N बल कार्य करता है।

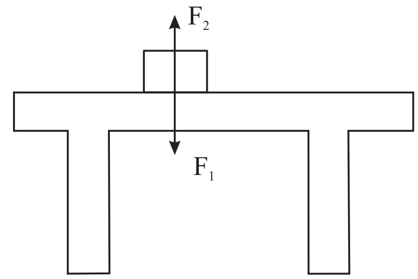
5. कोई वस्तु एक समान चाल से वृत्ताकार पथ पर चल रही है। क्या वस्तु का संवेग अचर है। कारण सहित उत्तर दें।

3.4 बलों के युग्म (Forces in Pairs)

पृथ्वी के गुरुत्वीय बल (खिंचाव) के कारण पिंड पृथ्वी की ओर त्वरित होते हैं। क्या यह पिंड भी पृथ्वी को अपनी ओर खींचते हैं। इसी प्रकार जब हम अलमारी को धकेलते हैं तो क्या अलमारी भी हमें धकेलती है? यदि ऐसा होता है तो हम उस बल की दिशा में क्यों नहीं चलते? यह स्थितियाँ हमें यह पूछने को बाध्य करती हैं कि क्या किसी एकल बल, जैसे कि एक धक्के या एक खिंचाव का अस्तित्व होता है? यह देखा गया है कि दो वस्तुओं की क्रिया एक दूसरे पर पारस्परिक होती है। यहाँ क्रिया से हमारा तात्पर्य 'अन्योन्य क्रिया बलों' से है। अत: जब कभी भी दो वस्तुओं में अन्योन्य क्रिया होती है तो वे एक दूसरे पर बल लगाती हैं। इनमें से एक को क्रिया और दूसरे को प्रतिक्रिया कहा जाता है। तात्पर्य यह हुआ कि बल सदैव युग्मित होते हैं।

3.4.1 गति का तीसरा नियम

वस्तु के बीच अन्योन्य क्रिया के अध्ययन के आधार पर न्यूटन ने तृतीय नियम का निरुपण किया जिसके अनुसार – ***प्रत्येक क्रिया की उसके बराबर और विपरीत प्रतिक्रिया होती है।***



चित्र 3.3 : एक मेज पर रखी पुस्तक मेज पर $\mathbf{F_1}$ (इसके भार mg के बराबर) बल लगाती है, जबकि मेज पुसतक पर $\mathbf{F_2}$ बल लगाती है।

यहाँ क्रिया और प्रतिक्रिया से तात्पर्य बल से है। इस प्रकार जब मेज पर रखी एक पुस्तक मेज पर कोई बल लगाती है तो मेज भी इसके बराबर और विपरीत बल पुस्तक पर ऊपर की ओर लगाती है। जैसा कि चित्र 3.3 में दिखाया गया है। क्या ये बल $\mathbf{F_1}$ और $\mathbf{F_2}$ एक दूसरे को निरस्त करते हैं? यहां विशेष ध्यान देने योग्य बात यह है कि $\mathbf{F_1}$ और $\mathbf{F_2}$ अलग-अलग वस्तुओं पर कार्य करते हैं। अत: ये एक दूसरे को निरस्त नहीं करते। किसी भी दी गई स्थिति में क्रिया और प्रतिक्रिया बलों का एक युग्म प्रतीत होती हैं। इनमें से कोई भी एक-दूसरे के बिना अस्तित्व में नहीं आ सकता। यदि शाब्दिक अर्थ लें तो ऐसा लगता है कि प्रतिक्रिया सदैव क्रिया के बाद होती है। जबकि न्यूटन के तृतीय नियम में क्रिया और प्रतिक्रिया साथ-साथ होती हैं। इसी कारण न्यूटन के तृतीय नियम को इस प्रकार कहना अधिक उपयुक्त होगा। जब दो वस्तुओं में अन्योन्य क्रिया होती है तो पहली वस्तु द्वारा दूसरी वस्तु पर लगाया बल (क्रिया) व दूसरी वस्तु द्वारा पहली वस्तु पर लगाये गये बल (प्रतिक्रिया) का परिमाण समान होता है परन्तु दिशायें विपरीत होती हैं।

सदिशों के रुप में विचार करें तो यदि F_{12} वह बल है जो वस्तु 2 के कारण वस्तु 1 पर अनुभव होता है और F_{21} वह बल है जो वस्तु 1 के कारण वस्तु 2 पर अनुभव होता है, तो

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \tag{3.4}$$

3.4.2 आवेग (Impulse)

बहुत कम अवधि के लिये लगाये गये बल के प्रभाव को आवेग कहते हैं।

इसे बल ($\boldsymbol{F}$) व बल आरोपण की अवधि (Δt) के गुणनफल के रुप में परिभाषित किया जा सकता है।

$$\therefore \qquad \text{आवेग} = \boldsymbol{F}.\Delta t$$

यदि वस्तु के प्रारंभिक एंव अन्तिम वेग (बल आरोपण की अवधि में) क्रमश: **u** और **v** हों तो

$$\text{आवेग} = \frac{m\mathbf{v} - m\mathbf{u}}{\Delta t} . \Delta t$$

$$= m\boldsymbol{v} - m\,\boldsymbol{u}$$

$$= \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$$

$$= \Delta\mathbf{p} = \text{रैखिक संवेग में परिवर्तन}$$

आवेग एक सदिश राशि है और इसके SI मात्रक $\mathrm{kg\,ms^{-1}}$ (अथवा Ns) होते हैं।

पाठगत प्रश्न 3.3

1. जब एक ऊँची कूद वाला व्यक्ति जमीन छोड़ता है तो कूदने वाले व्यक्ति को ऊपर की ओर गति प्रदान करने वाला बल कहाँ से आता है?

2. निम्नांकित प्रत्येक स्थिति में क्रिया-प्रतिक्रिया बलों को पहचानिए

   (a) एक व्यक्ति फुटबॉल को ठोकर मारता है ....

   (b) पृथ्वी चन्द्रमा को खींचती है। ....

   (c) गेंद दीवार से टकराती है।..

3. एक व्यक्ति एक अलमारी को आगे की ओर धकेलने के लिये - अलमारी पर अधिक बल लगाता है। व्यक्ति पर पीछे की ओर धक्का नहीं लगता क्योंकि अलमारी द्वारा व्यक्ति पर कम बल लगता है। क्या यह तर्क सही है? समझाइए।

3.5 संवेग का संरक्षण

प्रायोगिक तौर पर यह पुष्टि की जा चुकी है कि जब दो वस्तुओं में अन्योन्य - क्रिया होती है तो इन वस्तुओं के संवेग का सदिश योग परिवर्तित नहीं होता बशर्ते कि वस्तु पर कार्य कर रहा बल एकमात्र अन्योन्य क्रिया का बल ही हो। इसे संवेग संरक्षण का नियम कहते हैं। दो से अधिक वस्तुओं की अन्योन्य क्रिया के लिए भी यही तथ्य सही पाया गया है। सामान्यत: परस्पर अन्योन्यक्रियाशील अनेक वस्तुएं एक तंत्र बनाती हैं। यदि एक तंत्र की वस्तुएं तंत्र से बाहर की वस्तुओं के साथ अन्योन्य क्रिया नहीं करती तो तंत्र को संवृत तंत्र या वियुक्त तंत्र कहा जाता है।

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि वियुक्त तंत्र बनाने वाली वस्तुओं का कुल संवेग तो अपरिवर्तित रहता है, लेकिन उस तंत्र के अवयवों के संवेगों के परिमाण या दिशा अथवा दोनों, अन्योन्य क्रिया के अनुसार परिवर्तित हो सकते हैं। वियुक्त तंत्र में वस्तु विशेष में संवेग परिवर्तन होने के क्या कारण हैं?

रैखिक संवेग संरक्षण का नियम विभिन्न क्षेत्रों में बहुत सी परिघटनाओं पर लागू होता है जैसे संघट्टन, विस्फोट, नाभिकीय अभिक्रिया, रेडियोएक्टिव क्षय आदि।

3.5.1 न्यूटन के नियमों के परिणामस्वरुप संवेग संरक्षण

न्यूटन के द्वितीय गति नियम के अनुसार (समीकरण 3.1)। जब वस्तु पर समय Δt के लिए बल F कार्य करता है तो वस्तु के संवेग में परिवर्तन Δp का मान निम्न होता है:

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F}\,\Delta t$$

इससे यह स्पष्ट होता है कि यदि वस्तु पर कोई बल कार्य नहीं करता तो वस्तु के संवेग में परिवर्तन शून्य होगा अर्थात संवेग स्थिर रहेगा। यह स्पष्टीकरण वस्तुओं के तंत्र पर भी लागू किया जा सकता है।

इसी परिणाम पर पहुँचने के लिये न्यूटन के तृतीय नियम का भी प्रयोग किया जा सकता है। दो वस्तुओं A ओर B के वियुक्त तंत्र (Isolated system) पर विचार करें जो Δt समय के लिये अन्योन्य क्रिया करते हैं। यदि माने कि वे एक दूसरे पर $\mathbf{F}_{AB}$ और $\mathbf{F}_{BA}$ बल लगाती हैं तो न्यूटन के तृतीय नियम के अनुसार

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$$

अथवा $$\frac{\Delta \mathbf{p}_A}{\Delta t} = -\frac{\Delta \mathbf{p}_B}{\Delta t}$$

अथवा $$\Delta \mathbf{p}_A + \Delta \mathbf{p}_B = 0$$

या $$\Delta \mathbf{p}_{\text{टोटल}} = 0$$

or $$\mathbf{p}_{\text{टोटल}} = \text{स्थिर}$$

अत: तंत्र के संवेग में कोई परिवर्तन नहीं होता है। दूसरे शब्दों में तन्त्र का संवेग संरक्षित रहता है।

3.5.2 संवेग संरक्षण के कुछ उदाहरण

a) बन्दूक का प्रतिक्षेप : जब बन्दूक से गोली चलायी जाती है तो बन्दूक प्रतिक्षेप करती है। बन्दूक के प्रतिक्षेप वेग v_2 को संवेग संरक्षण के नियम से प्राप्त किया जा सकता है। यदि M द्रव्यमान की बन्दूक से चली गोली का द्रव्यमान m मानें और गोली का वेग v_1 हो और बन्दूक का वेग v_2 हो तो संवेग संरक्षण के नियम के अनुसार

$$m\boldsymbol{v}_1 + M\boldsymbol{v}_2 = 0$$

अथवा $$m\boldsymbol{v}_1 = -\mathrm{M}\boldsymbol{v}_2$$

अथवा $$\boldsymbol{v}_2 = -\frac{m}{\mathrm{M}}v_1 \tag{3.5}$$

यहाँ पर ऋण चिन्ह् दर्शाता है कि $\boldsymbol{v}_2$ और $\boldsymbol{v}_1$ एक दूसरे की विपरीत दिशा में हैं। सामान्यत: $m << \mathrm{M}$, बन्दूक का प्रतिक्षेप वेग गोली के प्रतिक्षेप वेग से बहुत कम होता है।

b) संघट्ट : संघट्ट में हम टकराने वाली वस्तुओं को एक तंत्र का अंश मान सकते हैं। संघट्टनशील वस्तुओं पर किसी प्रकार के बाह्य बल माना जा सकता है। संघट्ट करती वस्तुओं पर किसी प्रकार के बाह्य बल जैसे कि घर्षण बल की अनुपस्थिति में तंत्र को वियुक्त तंत्र (isolated system) माना जा सकता है। संघट्ट करती वस्तुओं के बीच अन्योन्य क्रिया के कारण इनका कुल संवेग अपरिवर्तित रहता है।

कैरम में स्ट्राइकर और गोटियों के बीच और बिलियर्ड में गेंदों के बीच संघट्टन प्रत्यास्थ वस्तुओं के बीच संघट्ट के अध्ययन में बहुत शिक्षाप्रद सिद्ध हो सकते हैं।

उदाहरण 3.6 : दो परस्पर संयुक्त ट्रालियाँ जिनमें से प्रत्येक का द्रव्यमान m है प्रारंभिक वेग υ से चल रही हैं वे m द्रव्यमान वाली B तीन स्थिर ट्रालियों के साथ टकराकर उसी दिशा में चलती रहती हैं। संघट्ट के बाद ट्रॉलियों का वेग क्या होगा?

हल : संघट्ट के बाद ट्रॉलियों का वेग υ' मानते हैं।

संघट्ट से पहले संवेग $= 2\,m\upsilon$

संघट्ट के पश्चात संवेग $= 5\,m\upsilon'$

संवेग संरक्षण के नियमानुसार

$$2m\upsilon = 5\,m\upsilon'$$

या $$\upsilon' = \frac{2}{5}\upsilon$$

c) बम विस्फोट : संचित ऊर्जा के मुक्त होने पर बम स्फिोटित होकर खंड-खंड हो जाता है। प्रारम्भ में स्थिर रखे एक बम पर विचार करें जिसका A और B दो खण्डों में विस्फोट होता है। विस्फोट से पहले बम का संवेग शून्य था, विस्फोट के बने दोनों खंडों का कुल संवेग भी शून्य होगा। इस कारण से दोनों अंश विपरीत दिशा में समान संवेग से उड़ेगे। यदि दोनों खण्डों के दव्यमान समान हों, तो दोनों खण्डों के वेगों के परिमाण भी समान होंगे।

d) राकेट नोदन: एक राकेट की उड़ान संवेग संरक्षण का महत्पूर्ण व्यावहारिक अनुप्रयोग है। राकेट में ईंधन टैंक युक्त एक कोश होता है जिसे एक निकाय माना जा सकता है। कोश में एक नोजल होता है जिसके द्वारा उच्च दाब पर गैसों का निष्कासन होता है। जब राकेट को फायर करते हैं तो इंधन का दहन बहुत अधिक दाब और ताप पर गैसें उत्पन्न करता है। उच्च दाब के कारण ये गैसें अति उच्च वेग से नोजल से निकलती हैं जिसके कारण राकेट का

द्रव्यमान M और प्रति सेकंड निष्कासित होने वाली गैस का द्रव्यमान m व वेग $\boldsymbol{v}$ हो तो t सेकंड में गैस के संवेग में परिवर्तन = mvt.

यदि t सेकन्ड में रॉकेट के वेग में वृद्धि $\mathbf{V}$ हो तो इसके संवेग में वृद्धि = $M\mathbf{V}$ संवेग संरक्षण के सिद्धांत के अनुसार

$$m\boldsymbol{v}t + M\mathbf{V} = 0$$

अथवा
$$\frac{\mathbf{V}}{t} = \mathbf{a} = -\frac{m\mathbf{v}}{M}$$

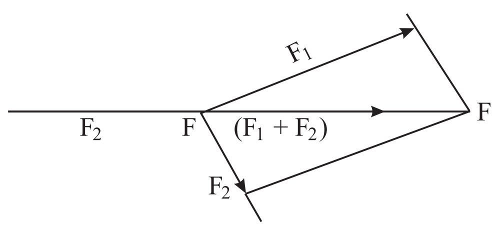
अर्थात राकेट की गति का त्वरण

$$\mathbf{a} = -\frac{m\mathbf{v}}{M}$$

3.5.3 संगामी बलों का संतुलन

किसी बिन्दु पर एक साथ लगने वाले बल संगामी बल कहलाते हैं। यदि इन सब का परिणामी बल शून्य हो तो ये बल संतुलन में कहे जाते हैं।

माना कि $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ एवं $\mathbf{F}_3$ किसी बिन्दु P पर लगने वाले संगामी बल हैं जैसा कि चित्र 3.5.3. में दर्शाया गया है।



चित्र 3.5.3

समान्तर चतुर्भुज नियम द्वारा ज्ञात किया गया $\mathbf{F}_1$ एवं $\mathbf{F}_2$ का परिणामी बल $\mathbf{PA}$ द्वारा दर्शाया गया है (अर्थात $\mathbf{PA} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$)

संतुलन के लिए, योग $(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$ को $\mathbf{F}_3$ के बराबर किन्तु विपरीत दिशा में होना चाहिए, अर्थात

$$\mathbf{F}_3 = -(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \text{ or } \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0$$

या कहें कि तीन बलों के संतुलन के लिए दो बलों का योग या परिणामी बल तीसरे बल के बराबर पर उसकी विपरीत दिशा में होना चाहिए अर्थात उन बलों का सदिश योग शून्य होना चाहिए।

3.6 घर्षण

आपने देखा होगा कि जब एक बल्लेबाज गेंद पर प्रहार करता है और यह मैदान पर लुढ़कती है तो यह कुछ दूरी तय करके रुक जाती है। अत: गेंद का संवेग, जो इसे प्रारंभ में धकेलते समय (आघात पहुँचाते समय) दिया गया था, शून्य हो जाता है। हम जानते हैं कि गेंद के संवेग में परिवर्तन के लिये गेंद पर लगा कोई बल उत्तरदायी होता है, इस प्रकार का बल ***घर्षण बल*** कहलाता है और यह बल तभी क्रियाशील होता है जबकि दो वस्तुएं एक दूसरे के संपर्क में गति करें। जब हम किसी वस्तु का स्थान बदलने के लिये फर्श के ऊपर धकेलते या खींचते हैं तो घर्षण बल के विरोध में ही हमें बल लगाना पड़ता है।

घर्षण बल एक संपर्क बल है जो हमेशा इसके संपर्क में आई सतहों के बीच गति की दिशा के विरुद्ध दिशा में लगता है। यह एक सामान्य जानकारी है कि संपर्क में आने वाली सतहों के खुरदरेपन के कारण घर्षण होता है। इस कारण आवश्यकता के अनुसार सतहों को खुरदरा या चिकना बनाने का प्रयास किया जाता है।

घर्षण वस्तु की गति में रुकावट डालता है जिसके कारण उसमें टूट फूट होती है और यांत्रिक ऊर्जा की हानि होती है। दूसरी ओर केवल घर्षण के कारण ही हम चल सकते हैं, वाहन चला सकते हैं और गतिशील वाहनों को रोक सकते हैं। घर्षण की हमारे जीवन में दोहरी भूमिका है। इसलिये कहा जाता है कि घर्षण एक आवश्यक बुराई है।

3.6.1 स्थैतिक एवं गतिज घर्षण

हम सभी जानते हैं कि किसी पृष्ठ के ऊपर वस्तु को गतिशील रखने के लिये कुछ न्यूनतम बल की आवश्यकता होती है। इस तथ्य की व्याख्या करने के लिये हम एक क्षैतिज पृष्ठ पर विराम अवस्था में रखे एक गुटके पर विचार करते हैं जैसा कि चित्र 3.4 में दर्शाया गया है। दर्शायी गयी दिशा में गुटके पर कुछ बाह्य बल $\mathbf{F}_{ext}$ इस प्रकार लगाते हैं कि गुटका गति न करे। यह तभी संभव है जब गुटके पर कुछ अन्य बल कार्य कर रहा हो जो कि $\mathbf{F}_{ext}$ के बराबर हो लेकिन विपरीत दिशा में हो। इस प्रकार का बल स्थैतिक घर्षण का बल कहलाता है और यह f_s द्वारा दर्शाया जाता है। ज्यों-ज्यों $\mathbf{F}_{ext}$ बढ़ता है त्यों-त्यों ही f_s भी बढ़ता है और परिमाण में f_s के बराबर रहता है जब तक कि यह क्रांतिक मान $f_s^{(max)}$ तक नहीं पहुँचता। जब $\mathbf{F}_{ext}$ क्रांतिक मान से बढ़ाया जाता है तो गुटका फिसलना शुरु कर देता है और तब इस पर गतिज घर्षण कार्य करने लगता है।

यह आम अनुभव की बात है कि किसी वस्तु को अचर वेग से गति कराने के लिये जितने बल की आवश्यकता होती है उसकी तुलना में वस्तु को प्रारंभ में गति देने के लिये अधिक बल की आवश्कता होती है। इस कारण संपर्क में आने वाली सतहों के बीच अधिकतम स्थैतिक घर्षण बल $f_s^{(max)}$ उनके बीच गतिज घर्षण बल f_k से अधिक होगा। चित्र 3.5 में बाह्य बल के साथ घर्षण बल की परिवर्तनशीलता दर्शायी गयी है।

आप एक दूसरे के संपर्क में रखे हुए दो सतहों के जोड़े के लिए उन कारकों को जानना चाहेंगे जिन पर $f_s^{(max)}$ और f_k निर्भर करते हैं। यह एक प्रायोगिक तथ्य है कि $f_s^{(max)}$ तल के लम्बवत् लगे बल $\mathbf{F}_N$ का समानुपाती होता है। अत:

$$f_s^{(max)} \propto \mathbf{F}_N \quad \text{या} \quad f_s^{(max)} = \mu_s \mathbf{F}_N \tag{3.6}$$

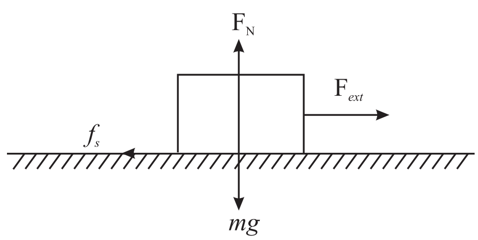
जहाँ μ_s स्थैतिक घर्षण गुणाँक कहलाता है। सतह पर लगे लम्बवत बल $\mathbf{F}_N$ का मान उस बल की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है जिस बल से गुटका सतह को दबाता है। चित्र 3.4 के संदर्भ में लम्बवत बल $\mathbf{F}_N$ जो कि गुटके पर लगा है mg के बराबर है जहाँ पर m गुटके का द्रव्यमान है।

क्योंकि $f_s = \mathbf{F}_{ext}$ जब तक $f_s \le f_s^{max}$ या

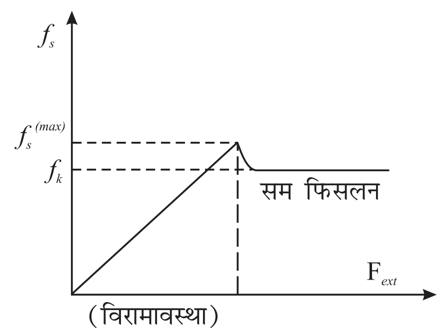
$$f_s \le \mu_s \mathbf{F}_N$$

प्रायोगिक रुप से यह भी पाया गया है कि दो सतहों के बीच स्थैतिक घर्षण का अधिकतम बल संपर्क के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता इस प्रकार हम लिख सकते हैं

$$f_k = \mu_k \mathbf{F}_N$$



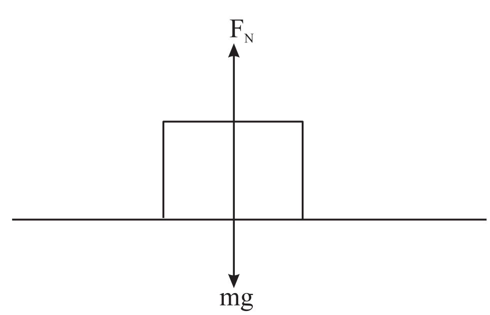
चित्र. 3.4 : गुटके पर कार्यरत बल



चित्र. 3.5 : घर्षण बल का बाह्य बल के साथ परिवर्तन

जहाँ पर μ_k = गतिज घर्षण गुणांक है। सामान्यत: $\mu_s > \mu_k$ इसके अतिरिक्त गुणांक μ_s और μ_k किसी भी सतह जैसे लकड़ी पर लकड़ी, कंक्रीट पर रबर आदि के लिये अचर नहीं है। इनका मान सतह के खुरदरेपन, स्वच्छता, आर्द्रता आदि पर निर्भर करता है।

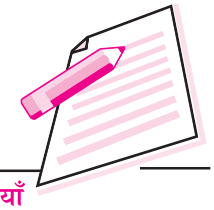
उदाहरण 3.7 एक क्षैतिज सतह पर एक 2 kg का गुटका विराम की अवस्था में है। संपर्क सतहों के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.25 है। संपर्क सतह के बीच स्थैतिक घर्षण का अधिकतम मान ज्ञात करें।



चित्र. 3.6 : गुटके पर अभिलम्बवत् बल

हल :

यहाँ m = 2 kg और μ_s = 0.25



टिप्पणियाँ

$$f_s^{(max)} = \mu_s \mathbf{F}_N = \mu_s\, m\mathbf{g}$$
$$= (0.25)\,(2\text{ kg})\,(9.8\text{ ms}^{-2})$$
$$= 4.9\text{ N.}$$

उदाहरण 3.8 5 kg भार का एक गुटका एक क्षैतिज सतह पर जिसके लिये $\mu_k = 0.1$ है। गुटके का त्वरण क्या होगा यदि क्षैतिज दिशा में उस पर 10 N का बल लगाकर खींचा जा रहा हो?

हल :

$F_k = \mu_k F_N$ जहाँ $F_N = mg$,

$$f_k = \mu_k mg$$
$$= (0.1)\,(5\text{ kg})\,(9.8\text{ m s}^{-2})$$
$$= 4.9\text{ kg m s}^{-2} = 4.9\text{ N}$$

गुटके पर आरोपित कुल बल $= F_{ext} - f_k = 10\text{ N} - 4.9\text{ N} = 5.1\text{ N}$

अतः इस प्रकार

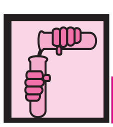
$$\text{त्वरण} = a = \frac{F_{net}}{m} = \frac{5.1\text{ N}}{5\text{ kg}} = 1.02\text{ m s}^{-2}$$

अतः गुटके में लगाये गये बाह्य बल की दिशा में 1.02 ms^{-2} का त्वरण होगा।

3.6.2 बेल्लन (लोटनिक) घर्षण

यह सामान्य अनुभव है कि पहियों वाली वस्तु को खींचना और धकेलना आसान है। सर्पी गति से पहियों की गति भिन्न होती है। पहियों की गति बेल्लन गति होती है। बेल्लन गति में होने वाले घर्षण को बेल्लन घर्षण कहते हैं। एक समान सामान्य बल के लिये सर्पी घर्षण की अपेक्षा बेल्लन घर्षण बहुत ही कम होता है। उदाहरण के लिये जब स्टील की पटरी पर स्टील के पहिये को घुमाते हैं तो स्टील पर स्टील के सर्पी घर्षण की तुलना में बेल्लन घर्षण लगभग 1/100 वाँ भाग होता है। बेल्लन घर्षण के गुणांक के लाक्षणिक मान स्टील पर स्टील के लिये 0.006, तथा कंक्रीट पर रबर के लिये 0.02 – 0.04 होता है।

अब हम चाहेंगे कि आप एक छोटा सा क्रियाकलाप करें।

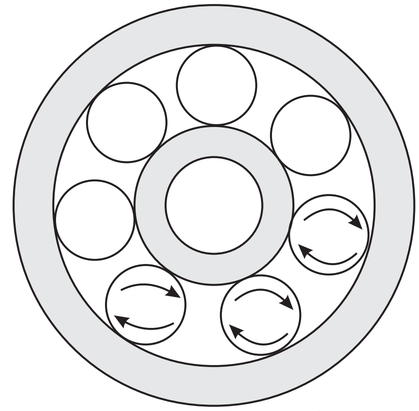


क्रियाकलाप 3.1

एक भारी पुस्तक या पुस्तकों का ढेर एक मेज पर रखें और उन्हें अंगुलियों से धकेलने का प्रयास करें। अब पुस्तकों के नीचे तीन या अधिक पेंसिलें रखकर पुनः धकेलने का प्रयास करें। किस स्थिति में कम बल की आवश्यकता होती है? आप इससे क्या निष्कर्ष निकालते हैं।

3.6.3 घर्षण कम करने की विधियाँ

फिसलन गति की तुलना में बेल्लन गति कराना अत्यधिक आसान है। इस कारण पहिये को मानव जाति का बहुत बड़ा आविष्कार माना गया है और इसी कारण मशीनों में बाल बियरिंग्स उपयोग किये जाते हैं ताकि घर्षण कम किया जा सके।


चित्र. 3.6 : बॉल वियरिंगस में गोलियों की गति

बॉल बियरिंग्स में दो अक्षीय सिलिंडरों के बीच स्टील बॉल रखी जाताी है। जैसा कि चित्र 3.6 में दिखाया गया है। सामान्यता दो सिलिन्डरों में से एक को दूसरे की अपेक्षा घूमने दिया जाता है। यहाँ पर बॉलों का परिभ्रमण लगभग घर्षण रहित गति में होता है। बॉलबियरिंगस का सभी प्रकार के वाहनों, विद्युत मोटर्स,, विद्युत पंखों आदि में उपयोग होता है।

संपर्क सतह के बीच स्नेहकों (lubricants) जैसे ग्रीस या तेल का उपयोग बड़ी मात्रा में घर्षण कम कर देता है। भारी वाहनों में गतिशील भागों को तेल में डुबाकर रखा जाता है। यह गतिशील भागों के बीच घर्षण बल को भी कम करता है और उन्हें अधिक गरम होने से भी बचाता है।

वास्तव में स्नेहकों जैसे तेल या ग्रीस की उपस्थिति शुष्क घर्षण को द्रव घर्षण में परिवर्तित कर घर्षण के परिमाण को अत्यधिक कम कर देती है।

संपर्क सतहों के बीच संपीड़ित और विशुद्ध वायु का प्रवाह भी घर्षण को कम करता है। यह गतिशील भागों पर धूल तथा गंदगी को एकत्र होने से भी रोकता है।

अगले भाग में प्रश्न हल करने के लिये कुछ मार्गदर्शक सिद्धांत बताये गये हैं। अभ्यास के लिये कुछ उदाहरण भी दिये गये हैं। प्रश्नों के हल पढ़ने से पहले मार्गदर्शक सिद्धांतों के अनुसार उन्हें स्वयं हल करने का प्रयत्न करें।

तरल घर्षण

द्रव या गैस में गतिमान वस्तुओं में भी घर्षण बल कार्य करता है। उल्काएं हवा के घर्षण के कारण उत्पन्न गर्मी के कारण चमकती हैं। ठोस घर्षण के विपरीत, तरल घर्षण वस्तुओं की आकृति पर निर्भर करता है। इस लिये मछलियों का एक विशेष आकार होता है और तेज गति से चलने वाले वायुयान एंव गाड़ियों को भी मछली के समान आकृति प्रदान की जाती है जिसे धारा रेखीय आकृति कहते हैं। तरल घर्षण का मान गति में वृद्धि के साथ तेजी से बढ़ता है। यदि कार को अधिक तेज गति से चलाया जाय तो बढ़े हुए तरल घर्षण के प्रभाव को निरस्त करने के लिये ईंधन की खपत अधिक होगी। कार निर्माता 40-45 km h^{-1} की चाल से वाहन चलाने का परामर्श देते हैं।

3.7 मुक्त निकाय आरेख तकनीक

यांत्रिकी में प्रश्नों को हल करने में बल निर्देशक आरेख (FBD) अत्यधिक सहायक हैं। इनके द्वारा न्यूटन के नियमों का उपयोग आसान हो जाता है। बल निर्देशक आरेख बनाने की विधि का वर्णन नीचे किया गया है।

1. दिये गये विवरण के अनुसार तंत्र (system) का एक स्वच्छ सरल आरेख बनाएं।
2. जिस वस्तु पर ध्यान केन्द्रित करना हो उस वस्तु को अलग करें। यह वस्तु मुक्त वस्तु कहलायेगी।
3. मुक्त वस्तु पर कार्य करने वाले सभी बाह्य बलों पर विचार करें और मुक्त वस्तु पर उनके प्रयोग की दिशा स्पष्ट रुप से तीरांकन द्वारा चिह्नित करें।
4. अब न्यूटन के दूसरे नियम $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ का उपयोग करें।

   (अथवा $\Sigma F_x = ma_x$ और $\Sigma F_y = m\, a_y$)

याद रखें

(i) वस्तु की गति की दिशा में वस्तु पर एक नेट बल होना चाहिए।

(ii) सम्पूर्ण हल के लिये जितनी अज्ञात राशियाँ हैं उतने ही स्वतंत्र समीकरण होने चाहिए।

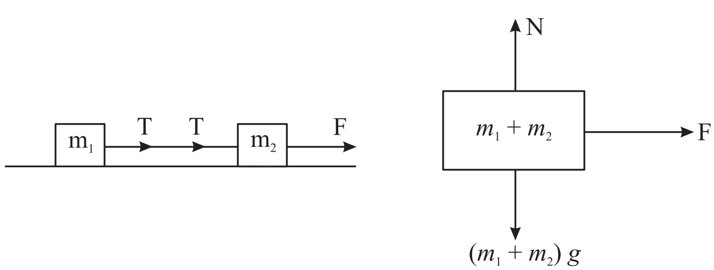
उदाहरण 3.9 : m_1 और m_2 द्रव्यमान के दो गुटके एक भारहीन धागे से जोड़े जाते हैं और चिकनी क्षैतिज सतह पर रखे जाते हैं। m_2 द्रव्यमान के गुटके को बल F के द्वारा खींचा जाता है, जो क्षैतिज के समान्तर कार्य कर रहा है। दोनों गुटकों का त्वरण क्या होगा और दोनों (इनके भी क्षैतिज मानिये) को जोड़ने वाले धागे में तनाव क्या होगा?

हल : मान लो **F** दिशा में a गुटकों का त्वरण है और धागे का तनाव **T** है। m_1 तथा m_2 के बल निर्देशक आरेख के लिये घटक के रुप में $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$N - (m_1 + m_2)\, g = 0$$

और $\quad F = (m_1 + m_2)a$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$



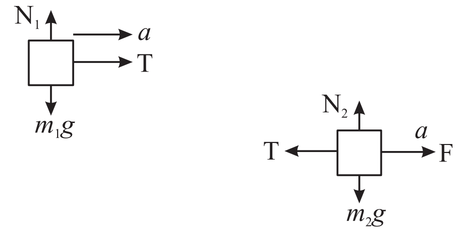
चित्र. 3.7: दो जुड़े हुए गुटकों के लिये बल निर्देशक आरेख

m_1 के बल-निर्देशक आरेख के लिये घटक रुप में $\Sigma F = ma$ उपयोग करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$N_1 - m_1 g = 0 \quad \text{और} \quad T = m_1 a$$

$$\Rightarrow \qquad T = m_1\left(\frac{F}{m_1 + m_2}\right)$$

या $$T = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right).F$$



$\Sigma F = ma$ का उपयोग करते हुए m_2 के लिये बल निर्देशक आरेख बनाकर देखें क्या इसके लिये भी a और T के मान पूर्ववत आते हैं।

उदाहरण 3.10 : दो द्रव्यमान m_1 और m_2 $(m_1 > m_2)$ को हल्की घर्षणरहित पुली के ऊपर से गुजरते हुए अवितान्य धागे के दो सिरों से जोड़ा गया द्रव्यमान को छोड़ते समय उन्हें जोड़ने वाले धागों में तनाव और द्रव्यमानों का त्वरण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लो द्रव्यमान m_1 का त्वरण नीचे की ओर a है। m_2 द्रव्यमान का त्वरण भी a होगा लेकिन यह ऊपर की ओर होगा (क्यों?) मान लो दो द्रव्यमानों को जोड़ने वाली रस्सी में तनाव T है।

m_1 और m_2 पर $\Sigma F = ma$ उपयोग करने पर

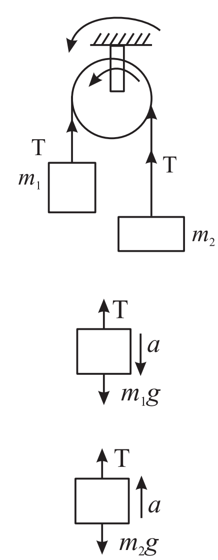
$$m_1 g - T = m_1 a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$T - m_2 g = m_2 a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

a और T के लिये समीकरण (1) और (2) को हल करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right).g \qquad T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)a$$

इस स्थिति में आप चरों (यानी m_1 और m_2) को चरम मान देखकर (अर्थात् $m_1 = m_2$ या $m_1 >> m_2$ मान देकर यह जाँच कर सकते हैं कि क्या a और T के माना आशा के अनुरुप प्राप्त होते हैं।



चित्र. 3.9

उदाहरण 3.11 : $M = 10$ कि.ग्रा. द्रव्यमान की एक ट्राली भारहीन अवितान्य धागे की सहायता से $m = 2$ kg के द्रव्यमान के गुटके के साथ जोड़ी गयी। यह धागा चित्र 3.10 में दर्शाये गये रुप में हल्की घर्षणहीन घिरनी के ऊपर से जा रहा है। ट्रॉली और सतह के बीच गतिज घर्षण का गुणांक (μ_k) = 0.02 है। अत: ज्ञात कीजिए।

a) ट्रॉली का त्वरण

b) धागे में तनाव

हल : चित्र 3.10 (b) और (c) ट्रॉली और गुटके का बल निर्देशक आरेख दर्शाते हैं। गुटके और ट्रॉली का त्वरण a लेते हैं।

ट्रॉली के लिये, $F_N = Mg$ और

$$T - f_k = Ma \text{ जहाँ } f_k = \mu_k F_N = \mu_k Mg$$

अतः $\quad T - \mu_k Mg = Ma \qquad ...(1)$

$\quad mg - T = ma \qquad ...(2)$

समीकरण (1) और (2) जोड़ने से हमें प्राप्त होता है।

$$mg - \mu_k Mg = (M + m)a$$

या $$a = \frac{mg - \mu_k Mg}{M + m} = \frac{(2\text{ kg})(9.8\text{ m s}^{-2}) - (0.02)(10\text{ kg})(9.8\text{ m s}^{-2})}{(10\text{ kg} + 2\text{ kg})}$$

$$= \frac{19.6\text{ kg m s}^{-2} - 1.96\text{ kg m s}^{-2}}{12\text{ kg}} = 1.47\text{ m s}^{-2}$$

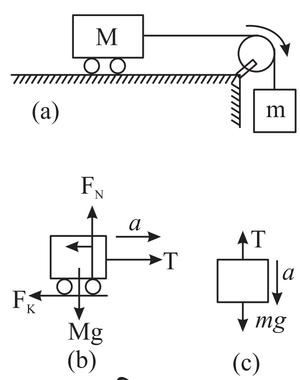
अतः $\quad a = 1.47\text{ m s}^{-2}$

समीकरण (2) से $T = mg - ma = m(g - a)$

$$= 2\text{ kg}(9.8\text{ ms}^{-2} - 1.47\text{ m s}^{-2})$$

$$= 2\text{ kg}(8.33\text{ m s}^{-2})$$

अतः $\quad T = 16.66\text{ N}$

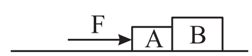


चित्र. 3.10

पाठगत प्रश्न 3.4

1. m द्रव्यमान का एक गुटका θ आनति के खुरदरे तल पर रखा है। गुटके पर प्रभावी विभिन्न बलों को चित्र द्वारा दर्शाइए।

2. 100 N का बल चिकनी क्षैतिज सतह पर रखे 2 kg और 3 kg द्रव्यमान के गुटकों A और B पर लग रहा है। गुटका B पर गुटका A कितने परिमाण का बल लगा रहा है?



चित्र. 3.11

3. रस्सी में बाँधकर लटकाई गयी 5kg की वस्तु को ऊपर खींचा जाता है तो रस्सी में तनाव क्या होगा जबकि इसमें ऊपर की ओर

   (a) वेग 2 m s^{-1} हो

   (b) त्वरण 2 m s^{-2} हो।

3.8 जड़त्वीय और अजड़त्वीय निर्देश फ्रेम्स की मूलभूत अवधारणा

एक विमीय या सरल रेखीय गति के अध्ययन के लिये एक निर्देशक बिंदु (मूल बिंदु) पर्याप्त है। लेकिन जब द्विविमीय या त्रिविमीय गति हो तो उसके अध्ययन के लिये निर्देशांक रेखाओं के एक सम्मुचय की आवश्यकता होती है ताकि किसी बिंदु की दिकस्थान (space) में स्थिति का वर्णन किया जा सके। इन रेखाओं के समुच्चय को निर्देश फ्रेम (frame of reference) कहते हैं।

प्रत्येक गति का वर्णन एक प्रेक्षक करता है। प्रेक्षक की गति की अवस्था में परिवर्तन के अनुसार गति संबंधी प्रेक्षण भी प्रभावित होंगे। उदाहरण के लिए एक बक्से को लें जो कि प्लेटफार्म पर रखा है। प्लेटफार्म पर खड़े व्यक्ति को यह स्थिर दिखायी पड़ेगा जबकि एक समान चाल υ से गति करती हुई ट्रेन में बैठे आदमी को यह $-\upsilon$ वेग से चलता प्रतीत होगा। लेकिन त्वरण (a) से चलती हुई रेल पर बैठा प्रेक्षक क्या अनुभाव करेगा? वह बक्से को $(-a)$ त्वरण से चलता हुआ अनुभव करेगा। स्पष्टतया इस प्रेक्षक के लिये गति का प्रथम नियम गलत हो जाता है।

अत: गति का वर्णन करने के लिये एक निर्देश फ्रेम की आवश्यकता होती है। यदि फ्रेम अध्ययन की जाने वाली वस्तु के सापेक्ष स्थिर हो या समान वेग से चल रहा हो तो इस फ्रेम में जड़त्व का नियम कार्य करता है। इसलिये इन फ्रेम्स को जड़त्वीय फ्रेम कहते हैं। और यदि प्रेक्षक का फ्रेम त्वरित है तो इसे अजड़त्वीय फ्रेम कहते हैं।

एक वस्तु जिसका द्रव्यमान m और त्वरण (a) हो और यह अजड़त्वीय फ्रेम में हो तो हम गति के द्वितीय नियम का उपयोग एक छद्म बल द्वारा कर सकते हैं। घूमती वस्तु में इस बल को अभिकेन्द्रीय बल कहते हैं।

पाठगत प्रश्न 3.5

1. एक आधा भरा हुआ गिलास रेलगाड़ी में एक क्षैतिज मेज पर रखा है। क्या रेलगाड़ी के चलने पर जल की मुक्त सतह क्षैतिज रहेगी?

2. जब एक कार एक वक्रीय पथ पर बहुत वेग से चलायी जाती है तो वह बाहर की ओर फिसलती है। कार के अन्दर बैठे व्यक्ति को कार की गति कैसी प्रतीत होगी? सड़क पर खड़ा व्यक्ति इस घटना को किस प्रकार वर्णन करेगा?

3. 6×10^{-10} kg द्रव्यमान का एक छोटा जल कण एक अपकेन्द्रक के जलीय निलम्बन में है। इसे $2\pi \times 10^{3}$ rad s^{-1} के कोणीय वेग से घुमाया जाता है। कण घूर्णन अक्ष से 4cm की दूरी पर है। कण पर कार्य कर रहे नेट अभिकेन्द्रीय बल की गणना करो।

4. पृथ्वी के घूर्णन का कोणीय वेग कितना होना चाहिए जिससे कि इसकी सतह पर रखी वस्तुऐं अभिकेन्द्रीय बल के कारण सतह से छिटकने लगें? $g = 10$ m s^{-2} मान लें।

5. 2 kg भार की एक मुक्त रुप से गिरती वस्तु से जुड़े निर्देशक फ्रेम में जड़त्वीय बल का परिमाण एंव दिशा क्या होंगे?

आपने क्या सीखा

- पिंड का जड़त्व उसके विरामावस्था या एकसमान गति में किसी परिवर्तन का प्रतिरोध करने की प्रवृत्ति को कहते हैं।
- न्यूटन का पहला नियम बताता है कि कोई वस्तु विराम या सरल रेखा में एकसमान गति की अवस्था में बनी रहती है जब तक उस पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य होता है।
- **V** वेग से गतिमान m द्रव्यमान के अकेले कण के लिये हम सदिश राशि **p** को $\mathbf{p} = m\boldsymbol{v}$ के रुप में परिभाषित करते हैं जो रेखीय संवेग कहलाता है।
- न्यूटन का दूसरा नियम बताता है कि वस्तु के संवेग परिवर्तन की दर वस्तु पर लगे रहे परिणामी बल की समानुपाती होती है
- न्यूटन के दूसरे नियम के अनुसार अचर द्रव्यमान की वस्तु में उत्पन्न त्वरण, वस्तु पर लग रहे नेट बाह्य बल का अनुक्रमानुपाती होता है। अर्थात् $\mathbf{F = ma}$
- न्यूटन का तीसरा नियम बताता है कि जब दो वस्तुएं एक दूसरे के साथ अन्योन्य क्रिया करती हैं तो एक वस्तु द्वारा दूसरी वस्तु पर आरोपित बल दूसरी वस्तु द्वारा प्रथम वस्तु पर आरोपित बल के बराबर और विपरीत दिशा में होगा।
- संवेग संरक्षण के नियम अनुसार यदि कणों के तंत्र पर कोई नेट बाह्य बल नहीं लगता है तो कणों के तंत्र का कुल संवेग स्थिर रहता है। चाहे कणों के बीच बलों की प्रकृति कैसी भी क्यों न हो।
- किसी बिन्दु एक साथ लगने वाले बल संगामी बल कहलाते हैं। यदि इन बलों का परिणामी बल शून्य हो तो ये बल संतुलन में कहे जाते हैं।
- घर्षण बल वह बल है जो किसी वस्तु पर लगता है जब वस्तु किसी सतह पर सर्पण या बैल्लन गति करने का प्रयास करती है। घर्षण का बल हमेशा संपर्क में आई सतहों के समान्तर होता है और वस्तु की गति की दिशा के विपरीत होता है।
- वस्तु एंव सतह के बीच स्थैतिक घर्षण $f_s^{(\max)}$ का अधिकतम बल वस्तु पर लग रहे अभिलम्बवत् बल $\mathbf{F}_\mathrm{N}$ का समानुपाती होता है। यह अधिकतम बल तब लगता है जब वस्तु बस फिसलने ही वाली होती है।
- किसी सतह पर सर्पण कर रही वस्तु के लिये गतिज घर्षण f_k के बल का परिमाण $f_k = \mu_k \mathbf{F}_\mathrm{N}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है जहाँ संपर्क में आयी सतहों के लिये μ_k गतिज घर्षण गुणाँक है।
- बेलन बियरिंग और बाल बियरिंग का उपयोग घर्षण और उससे जुड़ी ऊर्जा हानियों को बड़ी मात्रा में कम करता है क्योंकि गतिज घर्षण की तुलना में बेल्लन घर्षण बहुत कम होता है।
- न्यूटन के गति के नियम केवल जड़त्वीय निर्देश फ्रेम में लागू होते हैं। जड़त्वीय फ्रेम वह फ्रेम है जिसमें विलगित एकल वस्तु का त्वरण शून्य होता है।

- किसी वस्तु में स्थैतिक संतुलन बनाये रखने के लिये उस पर लग रहे सभी बलों का सदिश योग शून्य होना चाहिये, केवल बिंदु वस्तुओं (point objects) के लिये यह आवश्यक तथा पर्याप्त शर्त है।

पाठांत प्रश्न

1. निम्नलिखित में से कौन सदैव पिंड पर लग रह नेट बाह्य बल की दिशा में होगा।

   (a) विस्थापन (b) वेग

   (c) त्वरण (d) संवेग परिवर्तन

2. जब वस्तु पर अचर नेट बाह्य बल लग रहा हो तो निम्नलिखित में से किसमें परिवर्तन नहीं हो सकता।

   (a) स्थिति (b) चाल (c) वेग (d) त्वरण

   उदाहरण सहित व्याख्या करें।

3. एक 0.5 kg की गेंद इतनी ऊँचाई से गिरायी जाती है कि वह भूमि पर पहुँचने में 4 सेकंड का समय लेती है। गेंद के संवेग में परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

4. 2 kg द्रव्यमान वस्तु के संवेग में परिवर्तन निम्नलिखित में से किस स्थिति में होगा?

   (a) जब 1 सेकेंड के लिये 10 N का बल उस पर कार्य कर रहा हो।

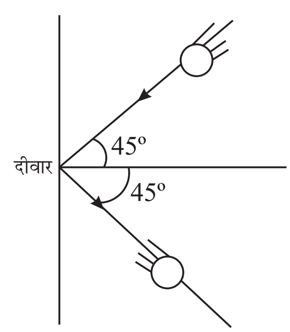
   (b) जब 1 मिनट के लिये 10 N का बल उस पर लग रहा हो।

   प्रत्येक स्थिति में संवेग में परिवर्तन का परिकलन कीजिए।

5. एक 0.2 kg द्रव्यमान की गेंद 6 ms^{-2} त्वरण के साथ वायु में गिर रही है। गेंद पर वायु कर्षण ज्ञात कीजिये।

6. 20 kg द्रव्यमान का एक भार एक रस्सी की सहायता से सतत त्वरण पर उठाया गया है। भार 2 सेकंड में 5 मीटर की ऊँचाई तक जाता है। रस्सी का तनाव ज्ञात कीजिये।

7. एक 10 m s^{-1} की गति से चल रही 0.1kg द्रव्यमान की गेंद दीवार से टकराकर उसी गति से चित्र में दर्शायी गयी दिशा में विक्षेपित हो जाती है। गेंद का संवेग परिवर्तन क्या होगा?



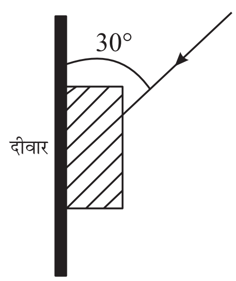
चित्र. 3.12

8. एक मशीनगन का औसत प्रतिक्षेप बल बताइए जो कि 150 बुलेट प्रति मिनट दाग रही हैं। प्रत्येक बुलेट की चाल 900 m s^{-1} है। प्रत्येक बुलेट का द्रव्यमान 12 ग्राम है।

9. जब तेज गेंद को लपकते हैं तो गेंद को विराम की अवस्था में लाते समय हाथ को पीछे की ओर क्यों खींचते हैं?

10. विरामावस्था में स्थित 2 kg द्रव्यमान के पिण्ड पर 20 N परिमाण का अचर बल 2 सेकंड के लिये लगता है, तो प्रारम्भ के (क) 1 सेकंड के बाद वस्तु का वेग क्या होगा? (ख) 3 सेकंड के बाद वेग क्या होगा?

11. दर्शायी गयी दिशा में गुटके पर लगा बल कैसे उसे ऊर्ध्वाधर दीवार पर फिसलने से रोकता है?



चित्र. 3.13

12. एक क्षैतिज सतह पर 2 kg का गुटका विराम की अवस्था में है। गुटके तथा सतह के बीच स्थैतिक घर्षण का गुणाँक 0.5. है। घर्षण के बल की दिशा और परिमाण क्या होगा यदि क्षैतिज दिशा में लग रहे बाह्य बल का परिमाण निम्नलिखित हो

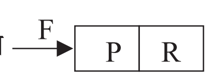
    (a) 0 N ? (b) 4.9 N ? (c) 9.8 N ?

13. किसी सतह पर रखे एक गुटके के लिये स्थैतिक घर्षण का अधिकतम बल 10N है। जब जिस सतह पर गुटका विराम की अवस्था में है उसके समान्तर 5 N का बाह्य बल लगाया जाये तो घर्षण-बल क्या होगा?

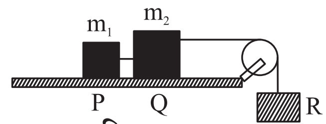
14. 30^0 आनति के आनत समतल पर 5 kg के गुटके को विराम अवस्था में रखने के लिये कम से कम कितने बल की आवश्यकता है? गुटके तथा आनत समतल के बीच स्थैतिक घर्षण का गुणाँक 0.25 है।

15. क्षैतिज घर्षण रहित सतह पर क्रमशः $m_1 = 2$ kg और $m_2 = 3$ kg द्रव्यमान के दो गुटके P और Q एक दूसरे से सटाकर रखे गये हैं चित्र में दर्शायी गयी दिशा में P गुटके पर एक बाह्य बल F = 10 N लगाया गया। निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिये।

    (a) गुटकों का त्वरण

    (b) गुटके P द्वारा गुटके पर लगाया गया बल 

16. $m_1 = 2$ kg और $m_2 = 4$ kg के दो गुटके क्रमशः P और Q चित्र के अनुसार M द्रव्यमान के तीसरे गुटके R से जोड़े गये हैं।



चित्र. 3.14

M के किस अधिकतम मान के लिये तीनों गुटके संतुलन अवस्था में होंगे।

प्रत्येक ब्लॉक पर कार्य कर रहा बल इस पर लगी ऊर्ध्व प्रतिक्रिया के बल का आधा है।

17. साइकिल ब्रेक के संबंध में घर्षण बल की भूमिका की व्याख्या कीजिए। यदि रिम पर तेल की कुछ बूँदें डाल दी जायें तो क्या होगा?

18. $\theta = 37^0$ आनति के आनत समतल पर एक 2 कि.ग्रा. के गुटके को धकेला गया जिससे उसे 20 m s^{-1} की प्रारंभिक चाल प्राप्त होती है। विराम की अवस्था में आने से पहले गुटका कितनी दूरी तय करेगा? गुटके तथा आनत तल के बीच गतिज बल का गुणाँक $\mu_k = 0.5$ है।

$g = 10$ m s^{-2}, $\sin 37^0 = 0.6$, $\cos 37^0 = 0.8$ लीजिए।

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

3.1

1. कथन केवल उस वस्तु के लिये सत्य है जो नेट बल लगाने से पूर्व विराम की अवस्था में हो।
2. जड़त्व द्रव्यमान
3. हाँ, जैसा कि एकसमान वर्तुल गति में होता है।
4. बल से स्थानान्तर और घूर्णन गति हो सकती है। यह वस्तुओं को विरुपित भी कर सकता है।

3.2

1. लघुतर द्रव्यमान की वस्तु
2. (a) हाँ (b) नहीं
3. गिरती हुई वस्तु के संवेग में वृद्धि होती है क्योंकि इसकी गति की दिशा में गुरुत्व बल उस पर कार्य करता है।
4. (b) अवस्था में संवेग में परिवर्तन अधिक होगा। यह $F \times \Delta t$ गुणनफल है। जो संवेग में परितवर्तन लाता है। $\left(\text{as } F \propto \dfrac{\Delta p}{\Delta t}\right)$

5. नहीं, यद्यपि चाल अचर है लेकिन वस्तु के वेग में परिवर्तन उसकी दिशा में परिवर्तन के कारण होता है। अत: उसका संवेग अचर नहीं है।

3.3

1. कूदने वाले पर भूमि द्वारा लगाये बल के द्वारा कूदने वाला ऊपर की ओर त्वरित होता है। यह बल कूदने वाले द्वारा भूमि पर लगाये गये बल की प्रतिक्रिया है।

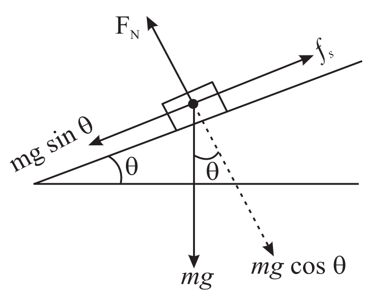
2. (a) वह बल जिससे व्यक्ति फुटबॉल में किक लगाता है यदि वह क्रिया है तो फुटबॉल द्वार व्यक्ति पर लगाया गया बल उसकी प्रतिक्रिया होगी।

   (b) वह बल जिससे पृथ्वी चन्द्रमा को खींचती है यदि वह क्रिया है तो चन्द्रमा द्वारा पृथ्वी पर लगाया गया बल उसकी प्रतिक्रिया होगी।

   (c) गेंद द्वारा दीवार पर लगाया बल यदि क्रिया है तो दीवार द्वारा गेंद पर लगाया गया बल उसकी प्रतिक्रिया होगी।

3. नहीं, तर्क सही नहीं है। जब व्यक्ति द्वारा लगाया गया धक्का अलमारी और तल के बीच कार्यकारी घर्षण बल से अधिक हो जाता है तो अलमारी खिसकती है। व्यक्ति को पीछे की ओर धक्का स्वयं उसके और तल के बीच लगने वाला बड़ा घर्षण बल है। यदि व्यक्ति किसी फिसलने वाले तल पर हो तो वह अलमारी नहीं खिसका पाएगा।

3.4



चित्र. 3.15

2. 40 N

3. (a) (5×9.8) N

   (b) $F = (5 \times 2)\text{ N} + (5 \times 9.8)\text{ N} = 59\text{ N}$

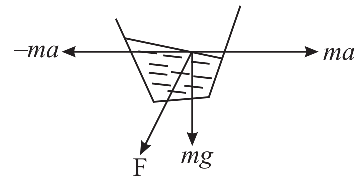
3.5

(1) जब रेल गाड़ी चलती है तो माना इसका त्वरण a है। तब रेल गाड़ी से जुड़े निर्देश फ्रेम के संदर्भ में पानी में लगने वाला परिणामी बल

$\mathbf{F} = m\,\mathbf{g} - m\,\mathbf{a}$

जहाँ m पानी तथा गिलास का द्रव्यमान है (चित्र. 3.16)। पानी का पृष्ठ F के लम्बवत् चित्र में दर्शाए अनुसार दिखाई देगा।

टिप्पणियाँ



चित्र. 3.16

(2) भीतर बैठा यात्री $(-mv^2/r)$ परिमाण का अभिकेन्द्रीय बल महसूस करेगा। जितना अधिक वेग v होगा r का परिमाण भी उतना ही अधिक होगा। सड़क पर खड़े हुये प्रेक्षक के लिये वक्र गति करती हुई कार में एक v^2/r परिमाण का अपकेन्द्री त्वरण लगता महसूस करेगा। पुन: अधिक v के लिये r का मान अधिक होगा।

(3) कण पर लगने वाला अभिकेन्द्री बल $\mathbf{F} = m\omega^2 r = (6 \times 10^{-10}\,\text{kg}) \times (2\pi \times 10^3\,\text{rad s}^{-1})^2 \times (0.04\,\text{m}) = 9.6 \times 10^{-4}\,\text{N}$.

(4) एक वस्तु के सतह से छिटकने के लिये अभिकेन्द्रीय बल (अपकेन्द्री) बला का मान उसके भार से थोड़ा अधिक होना चाहिए।

यदि वस्तु का द्रव्यमान m हो तो

$\dfrac{mv^2}{r} = mg$ शर्त पूरी होनी चाहिए

$v = r\omega$

$$\frac{r^2\omega^2}{r} = g$$

या कोणीय वेग $\omega = \sqrt{g/r}$

इसलिए $\sqrt{g/r}$ अधिक परिमाण के कोणीय वेग से वस्तुएं छिटक जायेंगी।

5. शून्य जैसा कि किसी वस्तु के मुक्त रुप से गिरने में होता है।

पाठांत प्रश्नों के उत्तर

1. (d)

2. (a) यदि पदार्थ के अन्दर विकसित आंतरिक बल बाह्य बल से अधिक हो जाये जैसा कि दीवार पर लगे बल के प्रकरण में होता है।

   (b) यदि बल गति की दिशा के लम्बवत लगाया जाय तो बल द्वार गति की दिशा परिवर्तित होती है लेकिन चाल समान रहती है।

3. $v = 0 + (-g) \times 4$

   $|v| = 40\ \text{m s}^{-1}$

   $\therefore\ \Delta P = m\,(v - u) = (0.5 \times 40) = 20\ \text{kg m s}^{-2}$

4. जब 10 N का नेट बल 1s तक लगता है।

5. 0.76 N

7. 250 N.

8. 27 N

10. (a) $10\ m\ s^{-1}$ (b) $20\ m\ s^{-1}$

12. (a) 0 N (b) 4.9 N (c) ~7.5 N

13. 5 N

14. 14.2 N

15. (a) $2\ m\ s^{-2}$ (b) 6 N

16. 3 kg

18. 20 m

4

समतल में गति

पिछले दो पाठों में आप सरल रेखीय गति से संबंधित संकल्पनाओं के बारे में पढ़ चुके हैं। उन पाठों में पढ़ी गई संकल्पनाओं के द्वारा क्या आप एक तल अर्थात् दो विमाओं में गतिशील पिंडों की गति का वर्णन कर सकते हैं? ऐसा करने के लिए हमें कुछ नई संकल्पनाओं से परिचय करना होगा। द्विविमीय गति का एक रोचक उदाहरण – क्षैतिज से कोण बनाते हुए फेंकी गई एक गेंद की गति है। इस गति को **प्रक्षेप्य गति** कहते हैं।

इस पाठ में आप निम्नलिखित प्रश्नों जैसे कुछ प्रश्नों का उत्तर देना सीखेंगे: किसी वायुयान की स्थिति और वेग क्या होनी चाहिए ताकि उसके द्वारा गिराई गई खाद्य सामग्री या दवाइयों के पैकेट बाढ़ पीड़ित या भूकंप से पीड़ित लोगों तक ठीक प्रकार पहुँच सकें, किसी खिलाड़ी को चक्रिका (discuss) या भाला किस प्रकार फेंकना चाहिए ताकि वह अधिकाधिक क्षैतिज दूरी तय करें, सड़कों का डिजाइन किस प्रकार किया जाए ताकि कार मोड़ पर मुड़ते समय पलट न जाए। उपग्रह की चाल क्या हो ताकि वह पृथ्वी के चारों ओर वृत्ताकार कक्षा के चक्कर लगाए? आदि-आदि।

ऐसी स्थितियाँ प्रक्षेप्य गति या वर्तुलगति के अंतर्गत आती हैं। सामान्यतया वर्तुल गति से तात्पर्य क्षैतिज वृत्त में गति से होता है। तथापि, क्षैतिज वृत्त में गति के अतिरिक्त पिंड ऊर्ध्व वृत्त में भी गति कर सकता है। इस प्रकार की गतियों को समझाने के लिए हम कोणीय वेग, अभिकेन्द्रीय बल और अभिकेन्द्रीय त्वरण की संकल्पनाओं से आपको परिचित कराएंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के पश्चात आप,

- *प्रक्षेप्य गति और वर्तुल गति की व्याख्या कर सकेंगे और उनके उदाहरण दे सकेंगे;*
- *ऊर्ध्व वृत्त में पिंड की गति की व्याख्या कर सकेंगे;*
- *किसी प्रक्षेप्य के लिए उसके 'उड्डयन काल' (time of flight), परास (range)* तथा अधिकतम ऊँचाई (maximum height) के व्यंजक निकाल सकेंगे;
- *प्रक्षेप्य के पथ का समीकरण व्युत्पन्न कर सकेंगे;*

- *वर्तुल गति में किसी पिण्ड के वेग* व त्वरण के व्यंजक ज्ञात कर सकेंगे, और
- *त्रिज्यीय तथा स्पर्शरेखीय त्वरण* (radial and tangential acceleration) को परिभाषित कर सकेंगे।

4.1 प्रक्षेप्य गति (Projectile motion)

प्रक्षेप्य गति के वर्णन का प्रथम सफल प्रयास गैलीलियो द्वारा किया गया। उसने दिखाया कि किसी मंद घूर्णन प्रक्षेप्य की क्षैतिज और ऊर्ध्व गतियाँ परस्पर स्वतंत्र होती हैं। इसे निम्नलिखित क्रियाकलापों द्वारा सरलता से समझा जा सकता है:

क्रिकेट की दो गेंदे लीजिए। उनमें से एक गेंद को किसी इमारत की छत से क्षैतिज दिशा में प्रक्षेपित कीजिए। ठीक उसी समय दूसरी गेंद को उतनी ही ऊँचाई से नीचे की ओर गिराएं। आप क्या पाएँगे?

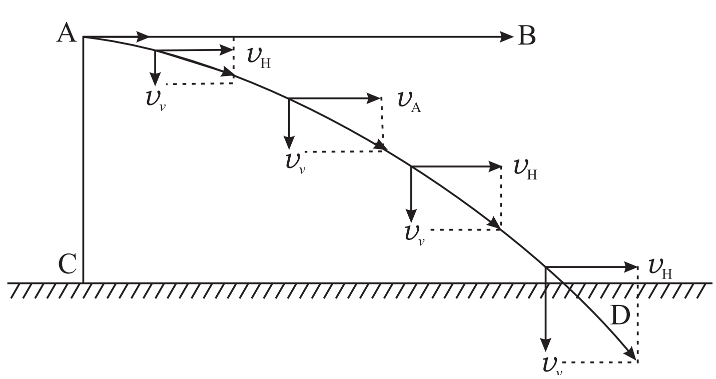
आप पाएँगे कि दोनों गेंदे एक ही समय पर जमीन पर गिरेंगी। इससे यह पता चलता है कि किसी प्रक्षेप्य का अधोमुखी त्वरण (down word acceleration) किसी मुक्त रुप से गिरती वस्तु के समान होता है। इसके अतिरिक्त वे अपनी क्षैतिज गति में स्वतंत्र होती हैं। इस तरह समय और दूरी की माप से यह पता चलता है कि क्षैतिज वेग निरंतर अपरिवर्तनीय होता है एंव ऊर्ध्वाधर गति की दृष्टि से स्वतंत्र रहता है।

दूसरे शब्दों में, प्रक्षेप्य गति की प्रमुख दो विशेषताएँ हैं:

(i) अचर क्षैतिज वेग घटक (constant horizontal velocity component)

(i) अचर ऊर्ध्वाधरत: अधोमुखी त्वरण घटक (constant vertically downword acceleration component)

इन दो स्वतंत्र गतियों के समिश्रण के फलस्वरुप प्रक्षेप्य का वक्र पथ प्राप्त होता है। चित्र 4.1 को देखिए। मान लीजिए कि कोई बालक एक गेंद को आरंभिक क्षैतिज वेग υ से फेंकता है। न्यूटन की गति के नियमानुसार, जब तक क्षैतिज दिशा में बल गेंद पर प्रभाव नहीं डालता, तब तक क्षैतिज दिशा में कोई त्वरण नहीं होगा। वायु के घर्षण की उपेक्षा करें तो गेंद जब बालक के हाथ से अलग होती है तो उस पर लगने वाला बल केवल गुरुत्व बल होता है। अतएव गेंद की क्षैतिज चाल υ_H परिवर्तत नहीं होती। किंतु जब गेंद अपनी इस चाल के साथ दाहिनी ओर आगे बढ़ती है तो वह गुरुत्व बल के प्रभाव में भी कार्य करती है। इसे सदिश वेग υ_y के ऊर्ध्वाधर घटक से दिखाया गया है। ध्यान रहे कि $\upsilon = \sqrt{v_H^2 + v_v^2}$ है और यह प्रक्षेप-पथ (trajectory) के हर बिंदु पर स्पर्शरेखीय (tangential) होता है।



चित्र. 4.1: प्रक्षेप्य का वक्रपथ

प्रक्षेप्य गति को परिभाषित करने के पश्चात हम यह ज्ञात करना चाहेंगे कि प्रक्षेप्य कितनी ऊँचाई तक, कितनी दूरी तक तथा कितने समय तक वायु में रहता है। किसी प्रक्षेप्य को किसी निश्चित लक्ष्य पर गिराने के लिए, जैसे कि फुटबॉल के खेल में गोल दागने के लिए, क्रिकेट की गेंद को सीमारेखा के पार पहुँचाने के लिए तथा राहत सामग्री गिराने के लिए यह दोनों घटक महत्वपूर्ण हैं।

4.1.1 प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊँचाई (maximum height), उड्डयन काल (time of flight) और परास (Range)

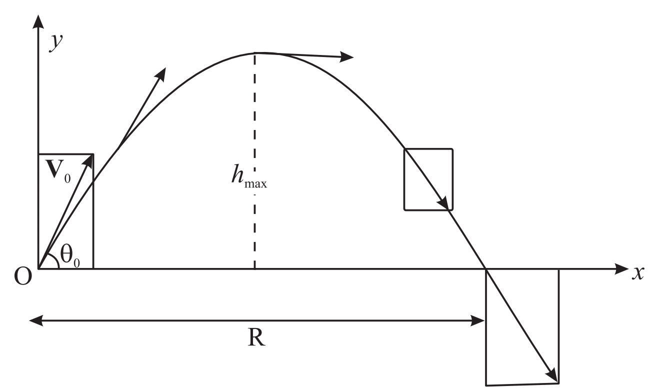
प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊँचाई, उड्डयन काल एंव परास ज्ञात करने के लिए हम प्रक्षेप्य गति का विश्लेषण करेंगे। इसमें वायु या वायु प्रतिरोध जैसे सभी प्रभावों को नगण्य मान लेते हैं। प्रक्षेप्य गति में किसी वस्तु के प्रारंभिक वेग को हम ऊर्ध्वाधर एंव क्षैतिज घटकों में वियोजित कर सकते हैं। मान लीजिए कि क्षैतिज दिशा को x–अक्ष और ऊर्ध्वाधर दिशा को y–अक्ष से निरुपित किया जाता है (चित्र 4.2)।

मान लें, प्रक्षेप्य की प्रारंभिक स्थिति, समय $t = 0$ पर, मूल बिंदु O पर है। जैसा कि आप जानते हैं कि मूल बिंदु के निर्देशांक $x = 0$ और $y = 0$ होते हैं। अब आप मान लो कि प्रक्षेप्य x-अक्ष से θ कोण, जिसे प्रक्षेप–कोण (angle of projection) कहते हैं, पर प्रारंभिक वेग υ_0 से फेंका जाता है। x एवं y दिशा में इसके घटक क्रमशः निम्नलिखित हैं।

$$\upsilon_{ox} = \upsilon_o \cos\theta_0 \tag{4.1 a}$$

और

$$\upsilon_{oy} = \upsilon_o \sin\theta_0 \tag{4.1 b}$$

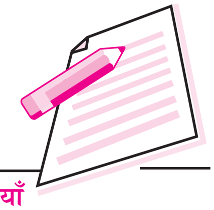


चित्र 4.2 : प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊँचाई उड्डयन एवं काल परास

मान लें प्रक्षेप्य त्वरण के क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर घटक क्रमशः a_x और a_y हैं इस प्रकार

$$a_x = 0; a_y = -g = -9.8 \text{ m s}^{-2} \tag{4.2}$$

a_y का ऋण चिह्न निर्धारित निर्देशांक तंत्र में गुरुत्वीय त्वरण को y – अक्ष की ऋणात्मक दिशा में दर्शाता है।



ध्यान दें कि a_y एकसमान है। अत: समीकरणों (2.6) और (2.9) का उपयोग किसी समय t पर प्रक्षेप्य के वेग और स्थिति के व्यंजकों को लिखने के लिए किया जा सकता है। ये व्यंजक हैं:

क्षैतिज गति $\qquad v_x = v_{ox}, \quad$ चूँकि $a_x = 0 \qquad (4.3a)$

$$x = v_{ox}t = v_0 \cos\theta_0 t \qquad (4.3b)$$

ऊर्ध्व गति $\qquad v_y = v_{oy} - g\,t = v_0 \sin\theta_0 - gt \qquad (4.3c)$

$$y = v_{oy}t - ½g\,t^2 = v_0 \sin\theta_0 t - \frac{1}{2}g\,t^2 \qquad (4.3d)$$

समीकरण (2.10) के प्रयोग द्वारा ऊर्ध्वाधर स्थिति एंव वेग घटकों का संबंध इस प्रकार आता है।

$$-g\,y = \frac{1}{2}(v_y^2 - v_{oy}^2) \quad (4.3e)$$

आप देखेंगें कि (समीकरणों 4.3a तथा b) द्वारा दर्शाई गई क्षैतिज गति स्थिर वेग को प्रदर्शित करती है। और समीकरणों 4.3(c) और 4.3(d) द्वारा दर्शाई गई ऊर्ध्वाधर गति एकसमान (अधोमुखी) त्वरण को प्रदर्शित करती है। दो घटकों के सदिश योग द्वारा किसी भी क्षण प्रक्षेप्य की गति और स्थिति का ज्ञान हो सकता है।

(a) अधिकतम ऊँचाई : जैसे–जैसे प्रक्षेप्य हवा में चलता है, वह किसी अधिकतम ऊँचाई (h) तक पहुँचकर नीचे की ओर आना शुरु करता है। प्रक्षेप्य जिस क्षण अधिकतम ऊँचाई पर होता है, उस समय प्रक्षेप्य की गति का ऊर्ध्वाधर घटक शून्य होता है। यह वह क्षण होता है जब प्रक्षेप्य का ऊपर की ओर जाना तो रुक जाता है परन्तु इस क्षण वह अभी नीचे की यात्रा शुरु नहीं करता।

अत: समीकरणों (4.3c और e) में $v_y = 0$ मान रखने पर हमें निम्न समीकरण प्राप्त होते हैं।

$$0 = v_{oy} - g\,t,$$

इस प्रकार अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचने में लिया गया समय

$$t = \frac{v_{oy}}{g} = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g} \qquad (4.4)$$

अधिकतम ऊँचाई h पर वेग का ऊर्ध्वाधर घटक शून्य होता है। अत: $v^2 - u^2 = 2\,a\,s = 2\,g\,h$ का प्रयोग करने पर हमें अधिकतम ऊँचाई

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g} \qquad \text{(चूँकि } v = 0 \text{ और } u = v_0 \sin\theta) \quad (4.5)$$

ध्यान दें कि अपनी गणनाओं में हमने वायु-प्रतिरोध के प्रभावों को नहीं लिया है। प्रक्षेप्य के काफी कम वेगों के लिए अधिकतम ऊँचाई का यह सन्निकट मान है।

समीकरण (4.4) की सहायता से वस्तु के वायुमण्डल में रहने का समय-काल प्राप्त किया जा सकता है। इसे इस उड्डयन काल (time of flight) कहते हैं।

(b) उड्डयन-काल (time of flight): *प्रक्षेप्य का उड्डयन काल प्रक्षेप्य के प्रमोचन के क्षण (फेंकने के क्षण) एवं प्रक्षेप्य के पृथ्वी पर गिरने के क्षण का समय-अंतराल है। समीकरण* (4.4) से दर्शाया गया समय t पिंड के उड्डयन-काल का केवल आधा होता है। अत: पूर्ण उड्डयन-काल का मान निम्नलिखित होगा:

$$T = 2t = \frac{2\,v_0 \sin\theta_0}{g} \tag{4.6}$$

अंत में हम प्रक्षेप्य द्वारा क्षैतिज दिशा में चली गई दूरी की गणना करते हैं। इसे परास भी कहते हैं।

(c) परास (Range) प्रक्षेप्य का परास प्रक्षेप्य के उड्डयन-काल को प्रक्षेप्य की क्षैतिज गति से गुणा करने पर प्राप्त हो जाता है। अत:

$$\begin{aligned} R &= (\upsilon_{ox})\ (2\,t) \\ &= (\upsilon_0 \cos\theta_0)\frac{(2v_0 \sin\theta_0)}{g} \\ &= \upsilon_0^2\,\frac{(2\sin\theta_0 \cos\theta_0)}{g} \end{aligned}$$

चूँकि, $2 \sin\theta \cos\theta = \sin 2\theta$, इस प्रकार परास निम्नलिखित समीकरण से प्राप्त होता है,

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \tag{4.7}$$

उपर्युक्त समीकरण से स्पष्ट है कि प्रक्षेप्य का परास निम्नलिखित घटकों पर निर्भर करता है:

- प्रक्षेप्य का प्रारंभिक वेग υ_0, और
- प्रक्षेप्य कोण θ_0.

अब आप ज्ञात कर सकते हैं कि डिस्क या भाला किस कोण से फेंका जाए ताकि वह पृथ्वी पर अधिकतम दूरी पर जा कर गिरे। दूसरे शब्दों में, कह सकते हैं कि वह कौन-सा कोण हो जिसके लिए क्षैतिज परास अधिकतम हो।

स्पष्ट है, किसी निश्चित वेग υ_0 के लिए R तभी अधिकतम होगा, जबकि $\sin 2\theta_0 = 1$ या $2\theta_0 = 90^0$.

या $\theta = 45°$

अत: किसी निश्चित वेग υ_0 के लिए R तभी अधिकतम होगा, जबकि $\theta_0 = 45^0$.

आइये, हम एक विशेष स्थिति में इन राशियों के मान निकालते हैं,

टिप्पणियाँ

उदाहरण 4.1 : सन् 1996 में एटलान्टा (Atlanta) में हुए सेन्टीनियल ओलम्पिक (Centennial olympics) के दौरान स्वर्णपदक प्राप्त करने वाले खिलाड़ी ने हैमर को 19.6 m की दूरी पर फेंका। इस दूरी को अधिकतम मानते हुए हैमर की प्रारम्भिक चाल ज्ञात कीजिए। हैमर की अधिकतम ऊँचाई क्या थी? हवा में हैमर कितनी देर रहा? फेंकने वाले खिलाड़ी के हाथ की पृथ्वी से ऊँचाई को गणना में न लें।

हल : चूँकि हैमर फेंकने वाले खिलाड़ी के हाथ की ऊँचाई को गणना में नहीं लिया जा रहा है। अतः प्रक्षेप बिन्दु एंव हैमर का वापिस लौटने का स्थान एक ही ऊँचाई पर हुए। हम निर्देशांक अक्षों के मूल बिंदु 0 को प्रक्षेप बिंदु मान लेते हैं। चूँकि हैमर द्वारा तय की गई दूरी इसका परास है। अतः परास के लिए समीकरण 4.7 का उपयोग करते हुए:

$$R = \frac{v_0^2}{g}$$ चूँकि $\theta_0 = 45^0$ पर परास अधिकतम होता है।

या $$v_0 = \sqrt{Rg}$$

R का मान 19.6 m दिया गया है तथा g का मान 9.8 m s^{-2} लेने पर

$$v_0 = \sqrt{(19.6\text{ m})\times(9.8\text{ m s}^{-2})} = 9.8\sqrt{2}\text{ m s}^{-1} = 14.01\text{ m s}^{-1}$$

अधिकतम ऊँचाई और उड्डयन काल क्रमशः समीकरण (4.5) और (4.6) से प्राप्त होता है। v_0 और $\sin\theta_0$ के मान समीकरण (4.5) और (4.6) में रखने पर

$$\text{अधिकतम ऊँचाई, } h = \frac{\left(9.8\sqrt{2}\right)^2\text{ m}^2\text{ s}^{-2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\times9.8\text{ m s}^{-2}} = 4.9\text{ m}$$

$$\text{उड्डयन काल, } T = \frac{2\times\left(9.8\sqrt{2}\right)\text{ m s}^{-1}}{9.8\text{ m s}^{-2}}\times\sqrt{\frac{1}{2}} = 2\text{ s}$$

आपने अब प्रक्षेप्य गति से संबंधित संकल्पनाओं और उनके अनुप्रयोग का अध्ययन कर लिया है। अपनी समझ की जाँच करने के लिए निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास करें:

पाठगत प्रश्न 4.1

1. निम्नलिखित परिस्थितियों में पहचान कीजिए कि कौन-सी गति प्रक्षेप्य है?

   (a) तीरंदाज का लक्ष्य पर तीर छोड़ना

   (b) ज्वलामुखीय विस्फोट से चट्टानों का निष्कासन

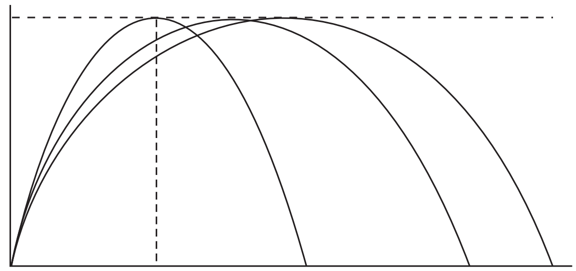
   (c) पहाड़ी सड़क पर ट्रक की गति

टिप्पणियाँ

(d) बमवर्षक वायुयान द्वारा बम गिराना (संकेत-बम के गिरते समय इसकी वायुयान के वेग के बराबर क्षैतिज गति होती है)

(e) नदी में पानी पर तैरती हुई पाल नौका

2. अलग-अलग प्रक्षेप कोणों पर फेंकी गई तीन गेंदे समान अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचती हैं (चित्र.4.3):



चित्र 4.3 : प्रक्षेप्य का प्रक्षेपन्पथ

(a) क्या सभी गेंदों के लिए प्रारंभिक वेग के ऊर्ध्वाधर घटक समान हैं? यदि नहीं तो किस गेंद के वेग का ऊर्ध्वाधर घटक सबसे कम होगा?

(b) क्या सभी गेंदों का उड्डयन काल समान होगा?

(c) किस गेंद के वेग का क्षैतिज घटक सबसे अधिक होगा?

3. एक खिलाड़ी ने 8.90 m दूरी कूद कर लंबी कूद का कीर्तिमान स्थापित किया। मान लें कूदते समय उसका प्रारंभिक वेग 9.5 m s^{-1} था। यदि हवा के प्रतिरोध को गणना में न लें तो बताइए कि वह अधिकतम परास के कितने निकट कूदा था? g का मान 9.78 m s^{-2} लें।

4.2 प्रक्षेप्य का प्रक्षेप पथ

एक प्रक्षेप्य द्वारा तय मार्ग को उसका प्रक्षेप पथ कहते हैं। क्या आप चित्र. 4.1, 4.2 तथा 4.3 में दिखाए गए प्रक्षेप्यों के प्रक्षेप पथ को पहचान सकते हैं?

यद्यपि हमने प्रक्षेप्य गति से संबंधित अनेक तथ्यों की चर्चा की है। परन्तु अभी तक हमने मूल प्रश्न पर विचार ही नहीं किया। एक प्रक्षेप्य का प्रक्षेप पथ क्या है? अत: हमें प्रक्षेप्य के प्रक्षेप पथ के लिए समीकरण ज्ञात करना है। प्रक्षेप्य के प्रक्षेप पथ का समीकरण निकालना सरल है।

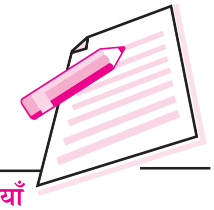
x का मान समीकरण (4.3b) से प्राप्त होता है तथा y का मान समीकरण (4.3d) से प्राप्त होता है। इन दोनों समीकरणों की सहायता से t को विलुप्त करना होगा। समीकरण (4.3b) से t का मान समीकरण (4.3d) में रखने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है:

$$y = \upsilon_{oy}\frac{x}{v_{ox}} - \frac{1}{2}\frac{g\,x^2}{v_{ox}^2} \quad \left(\text{as } t = \frac{x}{v_{ox}}\right) \qquad (4.8\text{ a})$$

समीकरण (4.1 a और b) के उपयोग से समीकरण (4.8a) का निम्न रुप हो जाता है:

$$y = (\tan\theta_0)\,x - \frac{g}{2(v_0\cos\theta_0)^2}x^2 \qquad (4.8\text{ b})$$

चूँकि $\upsilon_{oy} = \upsilon_0 \sin\theta$ और $\upsilon_{ox} = \upsilon_0 \cos\theta$.



इस समीकरण का रुप $y = a\,x + b\,x^2$ के समान है जो एक परवलय (parabola) का समीकरण है। चित्र. 4.3 में आप विभिन्न प्रक्षेप कोणों पर छोड़े गए प्रक्षेप्यों के प्रक्षेप पथों को देख सकते हैं।

प्रक्षेप्य गति से संबंधित प्रश्नों को हल करने के लिए आमतौर पर समीकरण (4.5) से समीकरण (4.7) का उपयोग सरल होता है। उदाहरण के लिए इन समीकरणों का उपयोग किसी ज्ञात दूरी पर लक्ष्य को दागने के लिए आवश्यक विमोचन गति एवं प्रक्षेप कोण की गणना के लिए किया जाता है। लेकिन तय की हुई दूरी बहुत अधिक होने पर ये समीकरण प्रक्षेप्य गति का संपूर्ण व्यौरा नहीं देते हैं। अब हम किसी प्रक्षेप कोण θ पर वेग υ_0 मानकर बिंदु (x_0, y_0) से छोड़े गए प्रक्षेप्य की गति संबंधी महत्वपूर्ण समीकरणों को संक्षेप में प्रस्तुत करते हैं।

प्रक्षेप्य गति से संबंधित समीकरण

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g \tag{4.9 a}$$

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\theta_0 \qquad \upsilon_y = \upsilon_0 \sin\theta - g\,t \tag{4.9 b}$$

$$x = x_0 + (\upsilon_0 \cos\theta_0)t \qquad y = y_0 + (\upsilon_0 \sin\theta)\,t - (½)\,g\,t^2 \tag{4.9 c}$$

प्रक्षेप पथ का समीकरण

$$y = y_0 + (\tan\theta)(x - x_0) - \frac{g}{2(v_0 \cos\ \theta_0)^2}(x - x_0)^2 \tag{4.9 d}$$

ध्यान दीजिए कि ये समीकरण पहले चर्चा किए गए समीकरणों से अधिक व्यापक हैं। प्रारंभिक निर्देशांकों को (0,0) पर न लेकर व्यापक निर्देशांक (x_0, y_0) ले लिए गए है। क्या आप इस प्रक्षेप्य पथ का व्यापक समीकरण प्राप्त कर सकते हैं? आगे बढ़ने से पहले इसे ज्ञात कीजिए।

अभी तक हमने ऐसे पिंडों की गति का अध्ययन किया है जिसकी गति एक तल में होती है और जिसे हम प्रक्षेप्य गति की श्रेणी में रख सकते हैं। प्रक्षेप्य गति के दौरान पिंड के त्वरण का परिमाण और दिशा, दोनों एकसमान रहते हैं। एक और प्रकार की महत्वपूर्ण द्विविमीय गति है, जिसमें त्वरण का मान तो समान रहता है किन्तु दिशा नहीं। यह एकसमान वर्तुल गति है। सामान्यतया वर्तुल गति से तात्पर्य क्षैतिज वृत्त में गति से होता है। तथापि, ऊर्ध्वाधर वृत्त में गति भी संभव है। आगामी अनुभाग में आप इनका अध्ययन करेंगे।

इवानजेलिस्टा टोरिसेली

(1608–1647)

यह इटली के गणितज्ञ व गैलीलियो के शिष्य थे। इन्होंने पारद वायुदाबमापी का आविष्कार किया, प्रक्षेप्यों के सिद्धांत की जाँच की, दूरदर्शी यंत्र में सुधार किया और एक प्राथमिक सूक्ष्मदर्शी का आविष्कार किया। उन्होंने इस बात को गलत सिद्ध किया कि प्रकृति निर्वात पसंद नहीं करती, टोरिसेली के प्रमेयों को प्रस्तुत किया।

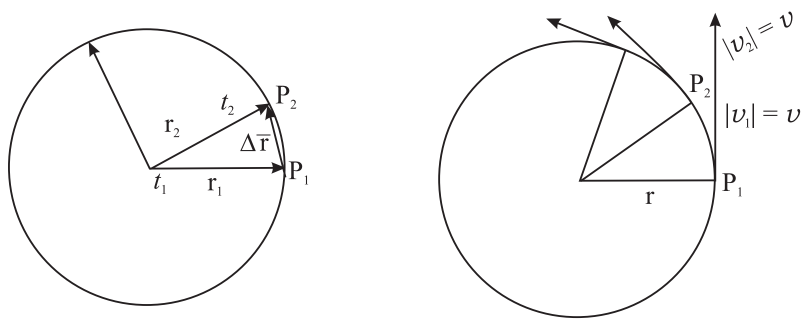
4.3 वर्तुल गति (Circular motion)

ग्रामोफोन के तवे (record) की गति अथवा चक्की के पाट की एकसमान वेग से गति, साधारण घड़ी की सूइयों की गति और यातायात के चौराहे के गोल चक्कर पर किसी गाड़ी का मुड़ना वर्तुल गति के आदर्श उदाहरण हैं। गिअर (gear), घिरनी (pulley) और पहिए (wheel) की गति भी वर्तुल गति होती है। सबसे सरल प्रकार की वर्तुल गति एक समान वृत्तीय गति होती है। घूमते हुए पंखे की पंखड़ियों पर और एकसमान चाल से घूमते हुए चक्की के पाट पर किसी बिंदु का पथ इसके उदाहरण हैं।

एकसमान वर्तुल गति का एक उदाहरण पृथ्वी के चारों ओर वृत्तीय कक्षाओं में कृत्रिम उपग्रहों की स्थापना है। उपग्रहों की INSAT श्रृंखला तथा अन्य कृत्रिम उपग्रहों से हमें अत्यधिक लाभ हुआ है। अतः हम पहले एकसमान वर्तुल गति का अध्ययन करते हैं।

4.3.1 एकसमान वर्तुल गति (Uniform Circular Motion)

किसी वृत्तीय पथ पर एक समान चाल से हो रही गति को एकसमान वर्तुल गति कहते हैं।



(a) (b)

चित्र 4.4 (a):एकसमान वर्तुल गति में कण की स्थितियाँ; (b): एकसमान वर्तुल गति

चित्र. 4.4a देखें। इसमें किसी कण (निकाय) की एकसमान चाल वाली वृत्तीय गति के लिए t_1 व t_2 समयों पर स्थिति सदिश $\boldsymbol{r}_1$ और $\boldsymbol{r}_2$ दर्शाए गए हैं। समान शब्द से तात्पर्य समान चाल से है। हम बतला चुके हैं कि कण की चाल अचर है। कण का वेग क्या है? वेग ज्ञात करने के लिये हमें औसत वेग की परिभाषा को एकसमान वर्तुल गति की P_1 और P_2 स्थितियों पर लागू करना होगा, जिससे

$$\boldsymbol{v}_{av} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \qquad (4.10\text{ a})$$

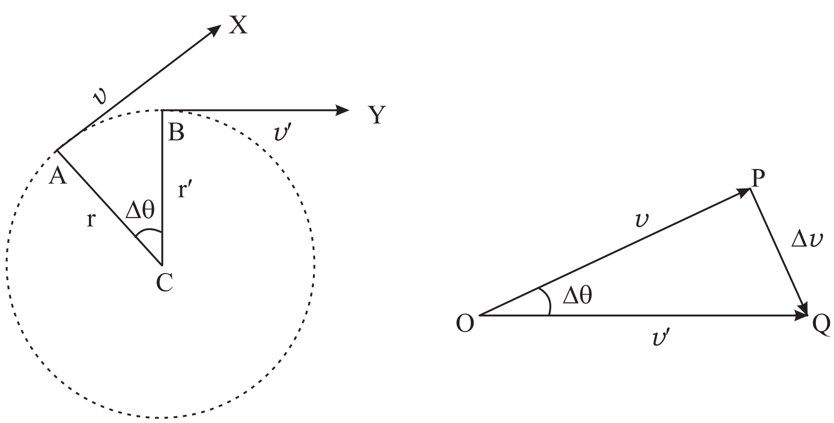
सदिश $\Delta\mathbf{r}$ चित्र 4.4(a) में दर्शाया गया है। अब मान लीजिए कि समय अन्तराल Δt अत्यंत लघु होता जाता है और शून्य मान तक पहुँचता है। इस स्थिति में $\Delta\mathbf{r}$ का परिमाण तथा दिशा क्या होगी? इस स्थिति में जैसे-जैसे $\Delta\mathbf{t}$ का मान शून्य की सीमा की ओर जाता है, Δr, बिंदु P_1 पर

वृत्त की स्पर्श रेखा बनती जाती है। गणितीय रूप से बिंदु P_1 पर तात्क्षणिक वेग की परिभाषा हम निम्नलिखित रुप में करते हैं:

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (4.11)$$

अत: एकसमान वर्तुल गति में वेग सदिश निरन्तर बदलता रहता है। क्या आप इसका कारण बतला सकते हैं? ऐसा वेग की दिशा स्थिर न होने के कारण होता है। वेग की दिशा निरन्तर बदलती जाती है। (देखिए चित्र 4.4b) **वेग के इसी परिवर्तन के कारण एकसमान वर्तुल गति त्वरित गति होती है**। एक कण के एकसमान वर्तुल गति में त्वरण को अभिकेन्द्र त्वरण कहते हैं। अब इसे थोड़ा विस्तार से समझते हैं।

अभिकेन्द्र त्वरण (centripetal acceleration) : मान लीजिए m द्रव्यमान का कोई कण एकमान चाल v से r त्रिज्या के वृताकार पथ में चक्कर लगा रहा है। छोटे समय अन्तराल Δt के बाद कण स्थिति A से स्थिति B पर पहुँचता है। मान लें $\mathbf{r}$ व $\mathbf{r}'$, A और B स्थितियाँ के लिये स्थिति सदिश; $\boldsymbol{v}$ और $\boldsymbol{v}'$ वेग सदिश हैं (चित्र 4.5(a))।



(b) (a)

चित्र 4.5

Δv (वेग परिवर्तन का मान) सदिशों के त्रिभुज नियम की सहायता से ज्ञात किया जाता है। अब चूँकि कण का पथ वृत्ताकार है और किसी बिंदु पर वेग की दिशा उस बिंदु पर स्पर्श रेखा द्वारा दर्शाई जाती है। अत: v तथा $\boldsymbol{v}'$ क्रमश: और $\boldsymbol{r}$ और $\boldsymbol{r}'$ के लम्बवत् हैं।

औसत त्वरण $\left(\mathbf{a} = \dfrac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}\right)$ $\Delta \boldsymbol{v}$ की दिशा में है

अर्थात् औसत त्वरण $\Delta \mathbf{r}$ के लम्बवत है।

माना कि स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ और $\mathbf{r}'$ के बीच का कोण $\Delta\theta$ है, तब वेग सदिशों $\boldsymbol{v}$ व $\boldsymbol{v}'$ के बीच का कोण भी $\Delta\theta$ होगा क्योंकि वृत्तीय गति में वेग सदिश हमेशा स्थिति सदिश के लम्बवत् होते हैं।

वेग परिवर्तन $\Delta \boldsymbol{v}$ ज्ञात करने के लिए एक बिंदु O लें और AX के समान्तर व बराबर OP रेखा खींचें। यह $\boldsymbol{v}$ दर्शाती है। पुनः इसी बिंदु से एक रेखा OQ, BY के समान्तर खींचे। यह $\boldsymbol{v}'$ को दर्शाती है।

चूँकि $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}'|$, OP = OQ. PQ को मिलाएं (चित्र. 4.5b)

अब त्रिभुज OPQ में भुजा OP और OQ के A और B बिंदुओं पर वेग सदिशों $\boldsymbol{v}$ और $\boldsymbol{v}'$ को दर्शाते हें। इसलिए इनका अन्तर PQ द्वारा दर्शाया जाता है, जो कि वेग परिवर्तन के परिमाण व Δt समय में बिंदु A से बिंदु B पर जाने में दिशा परिवर्तन को दर्शाता है।

$\therefore$ त्वरण = वेग परिवर्तन की दर

अर्थात्
$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{PQ}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \qquad (4.12)$$

चूँकि Δt बहुत कम है AB भी बहुत कम है, जो लगभग एक सरल रेखा है। इस प्रकार Δ ACB और ΔPOQ समद्विबाहु त्रिभुज हैं जिनके अंत:कोण समान हैं। अत: ये त्रिभुज समरूप हैं।

$$\therefore \qquad \frac{PQ}{AB} = \frac{OP}{CA}$$

अथवा
$$\frac{\Delta v}{v.\Delta t} = \frac{v}{r} \quad [\because\ |\boldsymbol{v}_1| = |\boldsymbol{v}_2| = v] \qquad (4.13)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} \qquad (4.14)$$

लेकिन, $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ कण का त्वरण है। अत:

$$\textit{अभिकेन्द्र-त्वरण, } a = \frac{v^2}{r} \qquad (4.15)$$

अब $v = r\,\omega$, अत: अभिकेन्द्र-बल का परिमाण

$$F = m\,a = \frac{m\,v^2}{r} = m\,r\omega^2. \qquad (4.16)$$

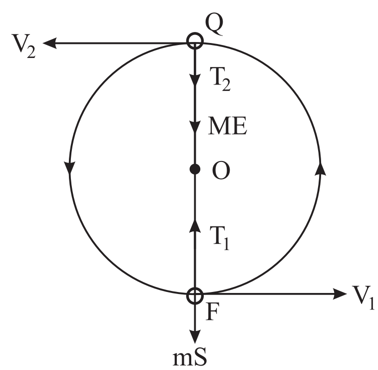
अब चूँकि Δt काफी कम है। अत: $\angle OPQ = \angle OQP = 1$ समकोण

इस प्रकार PQ, OP के लम्बवत है जो कि बिंदु A पर खींची स्पर्शरेखा AX के समान्तर है। पुन: AC, AX पर लम्बवत है इसलिए AC, PQ के समान्तर है। यह दर्शाता है किसी बिंदु पर अभिकेन्द्र-बल केन्द्र की ओर त्रिज्या के अनुदिश कार्य करता है।

यह दर्शाता है कि किसी वस्तु को वृत्ताकार पथ में गतिशील रखने के लिए एक न्यूनतम अभिकेन्द्री बल आवश्यक होता है। ऐसे बल के अभाव में वस्तु एक सरल रेखा में गति करेगी।

4.3.2 ऊर्ध्वाधर वृत्त में गति

जब कोई पिंड किसी क्षैतिज वृत्त में एक समान चाल से गति करता है तो इसके रैखिक वेग की दिशा तो बदलती रहती है किन्तु कोणीय वेग अपरिवर्तित रहता है। किन्तु, जब कोई पिंड ऊर्ध्वाधर वृत्त में गति करता है तो गुरूत्वीय त्वरण के कारण इसका कोणीय वेग भी अचर नहीं रह सकता।



चित्र 4.6

माना कि डोरी से बंधे m द्रव्यमान के किसी पिंड को बिन्दु O के परितः r त्रिज्या के एक वृत्त में घुमाया जा रहा है। क्योंकि पिंड ऊर्ध्वाधर वृत्त में गति कर रहा है, निम्नतम बिन्दु P पर इसका वेग अधिकतम है और जैसे-जैसे पिंड बिन्दु Q की ओर बढ़ता है गुरुत्व के कारण वेग कम होता जाता है और उच्चतम बिन्दु Q पर इसका मान न्यूनतम होता है। जब पिंड वृत्ताकार पथ पर चलकर Q से P की ओर आता है तो इसकी चाल फिर बढ़ने लगती है।

P बिन्दु पर पिंड पर लगने वाले बल हैं: वस्तु का भार mg और डोरी में तनाव T_1 जो चित्र में दर्शाई गई दिशाओं में प्रभावी हैं। इसी प्रकार बिन्दु Q पर पिंड पर लगने वाले बल हैं: mg एवं तनाव T_2 जो चित्र 4.9 में दर्शाई गई दिशा में लगे हैं। यदि बिन्दु P एवं Q पर पिंड के वेग क्रमशः v_1 एवं v_2 हों तो, P पर

$$T_1 - mg = \frac{mv_1^2}{r}$$

अथवा
$$T_1 = \frac{mv_1^2}{r} + mg$$

ध्यान दें कि P पर बल $(T_1 - mg)$, PO के अनुदिश लगता है और अभिकेन्द्री बल प्रदान करता है। इसी प्रकार बिन्दु Q पर

$$T_2 + mg = \frac{mv_2^2}{r}$$

अथवा
$$T_2 = \frac{mv_2^2}{r} - mg$$

यदि डोरी ढ़ीली पडे बिना पिंड को वृत्त पर चलते जाना है तो,

$$T_2 \geq 0$$

अर्थात डोरी में Q बिन्दु पर न्यूनतम तनाव शून्य होना चाहिए।

जब $T_2 = 0$, तो $\qquad mg = \dfrac{mv_2^2}{r}$

अर्थात् वृत्त के उच्चतम बिन्दु Q पर न्यूनतम वेग $\sqrt{gr}$ है।

$$\therefore \qquad \omega_2 = \frac{v}{r} = \sqrt{g/r}$$

वृत्त के न्यूनतम बिन्दु P पर न्यूनतम वेग इतना होना चाहिए कि उच्चतम बिन्दु Q पर इसका वेग $v_2 = \sqrt{gr}$ हो जाए।

संबंध $v^2 - u^2 = 2as$ का उपयोग करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$v_2^2 - v_1^2 = -2g(2r) \qquad (\because s = 2r \text{ एवं } g \text{ ऋणात्मक है})$$

अथवा $\qquad v_1^2 = v_2^2 + 4gr$

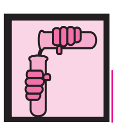
$$v_1^2 = gr + 4gr = 5gr$$

$$\Rightarrow \qquad v_1 = \sqrt{5gr}$$

अतः कोई पिंड पूरी तरह ऊर्ध्वाधर वृत्त पर चल पाए इसके लिए निम्नतम बिन्दु पर निम्नतम वेग $\sqrt{5gr}$ होना चाहिए।

अथवा $\qquad w_1 = \sqrt{5g/r}$

जो दर्शाता है कि जब कोई पिंड ऊर्ध्वाधर वृत्त में गति करता है तो इसका कोणीय वेग भी परिवर्तित होता है। इन तथ्यों को अनुभव करने के लिए निम्नलिखित क्रियाकलापों को करके देखें।



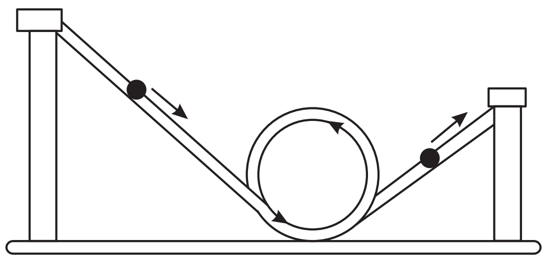
क्रियाकलाप 4.1

एक छोटा सा पत्थर का टुकड़ा धागे में बाँधकर व दूसरे सिरे को हाथ में लेकर क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर दिशाओं में घुमाने का प्रयास करें। आप कम घूर्णन गति से प्रारंभ कर क्रमशः इस गति को बढ़ाएं। जब घूर्णन गति कम होती है, तब क्या होता है? क्या आप पत्थर के घूमने पर अंगुलियों में कोई खिंचाव महसूस करते हैं? जब आप धागे के किनारे को छोड़ देते हैं तो क्या होता है? इसकी व्याख्या आप कैसे करेंगे?

टिप्पणियाँ

क्रियाकलाप 4.2

एक मीटर लंबा ऐलुमिनियम का एक चैनल लें और इसे इस प्रकार मोड़ें कि बीच में एक वृताकार लूप बन जाए (चित्र 4.5)। यदि आवश्यकता हो तो किसी तकनीकी जानकर की सहायता लें।

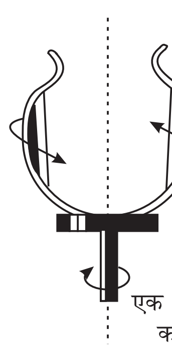


चित्र 4.7: यदि किसी गेंद को आनत (incline) तल पर पर्याप्त ऊँचाई से लुढ़काया जाए तो यह लूप का पूरा चक्कर लगा लेगी।

काँच की गोलियों को चैनल के दाईं ओर भिन्न-भिन्न ऊँचाइयों से लुढ़काएं। अवलोकन करें कि क्या गोली प्रत्येक स्थिति में लूप का चक्कर लगा लेती है अथवा इसे एक न्यूनतम ऊँचाई से अधिक ऊँचाई से (इस प्रकार एक न्यूनतम वेग) से लुढ़काना पड़ेगा? इससे कम ऊँचाई से लुढ़काने पर काँच की गोली लूप का चक्कर पूरा नहीं कर पाएगी और यह नीचे गिर जाएगी। आप इसकी व्याख्या कैसे करेंगे?

अभिकेंन्द्रीय बल के कुछ उपयोग

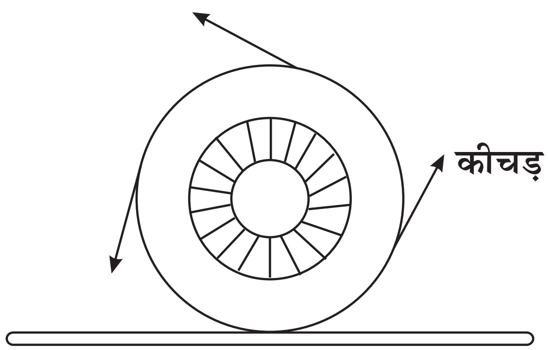
(i) **अपकेन्द्रक :** विभिन्न घनत्व की वस्तुओं को अलग-अलग करने के लिए घूमने वाली युक्तियों का प्रयोग किया जाता है। ये इस सिद्धांत पर आधारित हैं कि यदि दो अलग-अलग घनत्व वाले पदार्थों के मिश्रण को एक पात्र में रख कर उच्च वेग से घुमाया जाए तो भारी अवयव पर लगने वाला अभिकेन्द्र बल अधिक होगा और भारी पदार्थ पात्र में बाहर की ओर गमन करेगा और इसे अलग किया जा सकता है। इन युक्तियों को यूरेनियम को समृद्ध बनाने के लिए प्रयोग किया जाता है रसायन प्रयोगशाला में इनका उपयोग रसायनिक विश्लेषण के लिए किया जाता है।



चित्र 4.8: पारद और पानी एक तश्तरी में घूमते हैं। पानी पारे के अन्दर की ओर है। गुरुत्वीय बल की भाँति अभिकेन्द्र-बल ज्यादा भारी पदार्थ के लिए अधिक होता है।


टिप्पणियाँ

(ii) वाहनों के पहियों पर कम गति की स्थिति में कीचड़ चिपक जाता है और गति के बहुत बढ़ जाने पर यह स्पर्शरेखीय दिशा में छिटककर दूर हो जाता है।



चित्र 4.9: तेजी से चक्कर लगाते हुए पहिए में कीचड़ और पानी छिटक कर दूर हो जाते हैं।

(iii) **ग्रहीय गति :** सूर्य की परिक्रमा करने वाले पृथ्वी तथा दूसरे ग्रहों के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र-बल उनके और सूर्य के बीच कार्य करने वाले गुरुत्वाकर्षण-बल द्वारा मिलता है

उदाहरण 4.2 : अंतरिक्ष में उड़ान के दौरान अंतरिक्ष यात्री उच्च त्वरण का अनुभव करते हैं। ऐसी स्थितियों के लिए प्रशिक्षण केन्द्रों में इनको एक ऐसे संवृत कैप्सूल (closed capsule) में रखा जाता है जो 15 m त्रिज्या की घूर्णी (revolving) भुजा (arm) के सिरे पर जोड़ दिया जाता है। इस कैप्सूल को एक वृत्ताकार पथ में उसी प्रकार घुमाया जाता है- जैसे कि हम डोरी के साथ पत्थर बाँधकर क्षैतिज वृत्त में घुमाते हैं। यदि भुजा वृत्त के चारों ओर 24 चक्कर प्रति मिनट की दर से घूमती है तो कैप्सूल का अभिकेन्द्र-त्वरण ज्ञात कीजिए।

हल : वृत्तीय पथ की परिधि का मान $= 2\pi \times$ (त्रिज्या) $= 2\pi \times 15$ मीटर

परिधि में एक चक्कर लगाने में लगा समय $= \dfrac{60}{24}$

इसलिए कैप्सूल की चाल $v = \dfrac{2\pi r}{\mathrm{T}} = \dfrac{2\pi \times 15\ \mathrm{m}}{(60/24)\ \mathrm{s}} = 38\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

अभिकेन्द्र-त्वरण का परिमाण

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(38\ \mathrm{m\ s^{-1}})^2}{15\ \mathrm{m}} = 96\ \mathrm{m\ s^{-2}}$$

ध्यान दें कि यह त्वरण गुरुत्वीय त्वरण से लगभग 10 गुना है।

पाठगत प्रश्न 4.2

1. एकसमान वर्तुल गति में (a) क्या चाल एकसमान होती है? (b) क्या वेग एकसमान होता है? (c) क्या त्वरण का परिमाण स्थिर होता है। (d) क्या त्वरण एकसमान होता है? स्पष्ट कीजिए।

2. ऊर्ध्व वृत्तीय गति में क्या पिंड का कोणीय वेग परिवर्तित होता है? व्याख्या कीजिए।
3. एक धावक वृत्ताकार पथ के चारों ओर $9.0\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ की चाल से दौड़ता है, जिसका अभिकेन्द्र-त्वरण $3\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ है। वृत्ताकार पथ की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
4. फर्मी प्रयोगशाला का त्वरक विशालतम कण त्वरणों में से एक है। इस त्वरक में प्रोटानों को एक निर्वात नली में 2 km व्यास के वृत्तीय पथ में चलने को बाध्य किया जाता है। इनकी गति प्रकाश वेग के लगभग 99.99995% है। इन प्रोटॉनों का अभिकेन्द्र त्वरण क्या है? $c = 3 \times 10^8\ \mathrm{m\ s^{-1}}$.

4.4 एकसमान वर्तुल गति के अनुप्रयोग

अब तक आप पढ़ चुके हैं कि एक वृत्ताकार पथ में चल रहे पिंड की गति त्वरित होती है। पिछले पाठों में आपने न्यूटन के गति के नियम भी पढ़े। न्यूटन के दूसरे नियम से आप जानते हैं कि चूँकि वृत्ताकार पथ पर गतिशील पिंड की गति त्वरित होती है, इस पर एक नेट बल अवश्य प्रभावी होना चाहिए।

इस बल की दिशा और परिमाण क्या है? ये बातें इस अनुच्छेद में आप सीखेंगे। तब हम एकसमान वर्तुल गति के लिए न्यूटन के नियमों का प्रयोग करेंगे। इससे हम यह जान पाते हें कि सड़कों को बैंकित करने का क्या कारण है, अथवा जब पायलट वायुयानों को ऊर्ध्वाधर लूपों में उड़ाते हैं तो वे अपनी सीटों पर बैठे हुए दाब महसूस क्यों करते हैं?

सबसे पहले पिंड पर लगे उस बल को ज्ञात करते हैं जो इसकी एकसमान वर्तुल गति को बनाए रखता है। मान लीजिए कि पिंड r त्रिज्या के वृत्त में स्थिर वेग υ से चक्कर काट रहा है। न्यूटन के दूसरे नियम के अनुसार पिंड पर लगे बाह्य बल एंव त्वरण के बीच निम्न संबंध है:

$$\mathbf{F} = -\frac{mv^2}{r}\hat{\boldsymbol{r}}, |\mathbf{F}| = \frac{mv^2}{r} \tag{4.17}$$

एक समान वर्तुल गति करते पिण्ड पर लग रहा नेट बाह्य बल वृत के केन्द्र की ओर निर्दिष्ट होता है और इसका परिणाम समी. (4.17) द्वारा प्राप्त होता है। इस बल को अभिकेन्द्रीय बल कहते हैं। एक और महत्वपूर्ण तथ्य समझने और याद करने का यह है कि अभिकेन्द्र बल, गुरुत्वीय बल अथवा वैद्युत बल जैसे अन्योन्यक्रिया बलों (forces of interaction) की सूची में नहीं आता है। यह परिभाषिक शब्द केवल हमें यह जानकारी देता है कि एकसमान वर्तुल गति में पिंड पर लगा नेट बल केन्द्र की ओर निर्दिष्ट होता है। इससे हमें यह पता नहीं चलता है कि यह बल कहाँ से आता है।

इस प्रकार, यह बल दो निकायों के बीच कार्य करने वाले गुरुत्वाकर्षण के कारण हो सकता है जैसे सूर्य के चारों ओर ग्रहों की गति के दौरान अभिकेन्द्र-बल सूर्य और उपग्रह के बीच गुरुत्वीय आकर्षण के कारण होता है। इसी प्रकार किसी मोड़ या गोलाई में मुड़ती हुई मोटर कार के लिए अभिकेन्द्र-बल सड़क एंव कार के टायरों के बीच घर्षण बल और सड़क की बैंकिंग से (अथवा बैंक्ड रोड की अभिलम्बत प्रतिक्रिया बल के क्षैतिज घटक द्वारा) मिलता है। अभिकेन्द्र-बल की धारणा और अधिक प्रत्यक्ष स्थितियों में प्रयोग किए जाने पर स्पष्ट हो जाएगी।

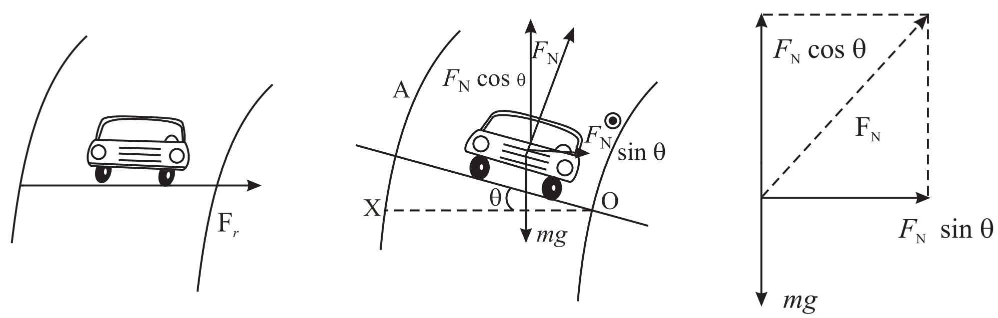
टिप्पणियाँ

4.4.1 सड़कों की बैंकिंग

साइकिल चलाते हुए किसी तीव्र मोड़ पर आपने अनुभव किया होगा कि कोई बल आपको आपके पथ से बाहर की ओर धकेलने का प्रयास कर रहा है। क्या आपने कभी सोचा कि ऐसा क्यों होता है?

आप बाहर गिरने को तब प्रवृत्त होते हैं, जबकि आपको वृत्ताकार पथ में बनाए रखने के लिए आवश्यक बल का अभाव हो। सड़क एंव टायरों के बीच घर्षण से कुछ बल प्राप्त होता है लेकिन यह संभवतया पर्याप्त नहीं होता है। जब आप गति धीमी करते हैं, तो आवश्यक अभिकेन्द्र-बल कम हो जाता है और आप मुड़ने में सक्षम हो जाते हैं।

मान लीजिए राजमार्ग के किसी मोड़ वाले भाग में m द्रव्यमान की मोटर कार υ चाल से जा रही है। (चित्र. 4.6) वृत्ताकार पथ में मोटर कार को एकसमान रुप से गतिशील बनाये रखने के लिये इस पर कोई बल कार्य करना चाहिए। यह बल केन्द्र की ओर निर्दिष्ट होना चाहिए और इसका परिमाण $\frac{m\upsilon^2}{r}$ होना चाहिए। यहाँ r वक्रित भाग की वक्रता त्रिज्या (radius of curvature) है।



(a) (b) (c)

चित्र 4.10 : एक मुड़ती हुई कार (a) एक समतल सड़क पर, (b) एक बैंक्ड सड़क पर, (c) कार पर कार्यरत बल को इसके सकमोणिक घटकों में विभाजित किया गया है।

सामान्यतया उतना अधिक नहीं होता जितना चित्र में दर्शाया गया है। अब अगर सड़क समतल हो तो कार को वृत्तीय पथ में बनाए रखने के लिए सड़क व पहियों के बीच का घर्षण बल आवश्यक अभिकेन्द्र-बल प्रदान करता है। इससे पहिए काफी घिसते हैं और साथ ही यह बल सुरक्षित रुप से मुड़ने के लिए पर्याप्त नहीं भी हो सकता है। इसलिए सड़कों को मोड़ों पर बैंक्ड किया जाता है। सड़क की बैंकिंग में सड़क के बाहर के किनारे को ऊपर उठा दिया जाता है। सच्चाई तो यह है कि सड़कों का डिजाइन इस प्रकार किया जाता है कि घर्षण पर कम से कम निर्भर रहना पड़े। उदाहरण के लिए यदि मोटर के टायर घिसकर चिकने हो गए हों या सड़क पर पानी या बर्फ पड़ा हो तो घर्षण गुणांक (coefficient of friction) का मान नगण्य हो जाता है। मोड़ के पास सड़कों को इस प्रकार बैंक्ड किया जाता है कि घर्षण के नगण्य होने पर भी कार अपने पथ पर चलती रहे।

बैंकिंग कोण θ का समायोजन मोड़ की वर्तुलता और अधिकतम अनुमानित चाल के अनुसार कर लिया जाता है। कोण θ का व्यंजक प्राप्त करने के लिए हम मोटर कार के बल निर्देशक आरेख (free body diagram) का विश्लेषण करते हैं।

हम उस स्थिति पर विचार करते हैं जिसमें मोटर कार और सड़क के बीच कोई घर्षण बल कार्य नहीं करता। मोटर कार पर कार्य करने वाले बलों में से एक तो कार का भार mg है और दूसरा अभिलंब प्रतिक्रिया (Normal reaction) का बल $\mathbf{F}_N$ होता है। अभिकेन्द्र बल $\mathbf{F}_N$ के क्षैतिज घटक से प्राप्त होता है। $\mathbf{F}_N$ को इसके ऊर्ध्वाधर एंव क्षैतिज घटकों में तोड़ने पर हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होते हैं:

$$F_N \sin\theta = \frac{mv^2}{r} \tag{4.18}$$

चूँकि इस अवस्था में कोई ऊर्ध्वाधर त्वरण नहीं है। अत: $\mathbf{F}_N$ ऊर्ध्वाधर घटक कार के भार के बराबर होता है।

$$F_N \cos\theta = m\,g \tag{4.19}$$

हमारे पास दो अज्ञात राशियों के लिए दो समीकरण हैं। θ का मान ज्ञात करने के लिए समीकरण (4.18) को 4.19) से भाग देने पर हमें निम्न संबंध होता है।

$$\tan\theta = \frac{mv^2/r}{m\,g} = \frac{v^2}{r\,g}$$

अथवा
$$\theta = \tan^{-1}\frac{v^2}{rg} \tag{4.20}$$

θ के चुनाव एंव r की सीमाओं के संदर्भ में समीकरण (4.20) का अर्थ हम क्या लगाते हैं? सबसे पहला तथ्य समीकरण (4.20) यह बतलाता है कि बैंकिंग कोण गाड़ी के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है। इसका अर्थ यह हुआ कि बैंकित सड़कों पर भारी गाड़ियाँ भी चल सकती हैं।

समीकरण (4.20) से दूसरा निष्कर्ष यह निकलता है कि अत्यधिक घुमावदार मोड़ों (अर्थात् r के कम मानों के लिए) एंव गाड़ियों के उच्च वेगों के लिए θ का मान अधिक होना चाहिए। θ के निश्चित मान पर यदि चाल υ की अपेक्षा कम है तो गाड़ी की प्रवृत्ति ढाल की ओर फिसलने की होगी। यदि चाल υ की अपेक्षा अधिक हो, तो गाड़ी का रुझान सड़क की ऊँचाई वाले भाग की ओर पलटने का होगा। इसलिए गाड़ी चालक को सड़क के मोड़ों पर निर्धारित चाल सीमाओं के भीतर ही चलना चाहिए, नहीं तो गाड़ी सड़क के इधर-उधर पलट जाएगी और दुर्घटनाएँ हो सकती हैं।

आमतौर पर, घर्षण बलों के कारण υ की अपेक्षा गाड़ी की सुरक्षित चाल के अधिक या कम होने का एक परास (range) होता है। मोड़ों पर मुड़ते समय यदि चाल परास सीमा में रहती है तो गाड़ी वृत्ताकार पथ में आराम से चलती रह सकती है। वास्तविक स्थिति को समझने के लिए मान लीजिए 300 m त्रिज्या की रेल पटरी को इस प्रकार बिछाया गया है कि इस पटरी पर अनुमानित चाल 50 m s^{-1} है। अनुमानित बैंकिंग का मान क्या होना चाहिए? इस कोण का

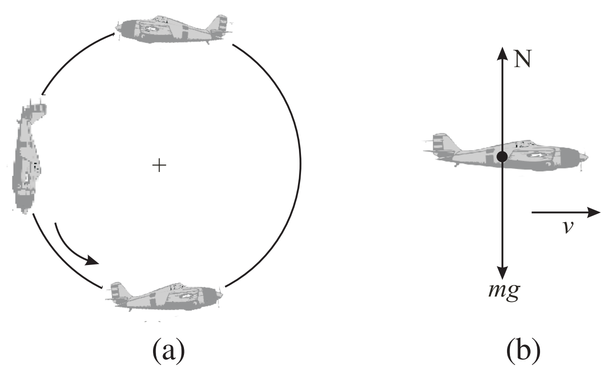
मान ज्ञात करने के लिए हम तुरंत समीकरण (4.20) का प्रयोग करते हैं। और θ का मान निम्न विधि से प्राप्त करते हैं।

$$\theta = \tan^{-1}\frac{(50\ \text{m s}^{-1})^2}{(300\ \text{m})(9.8\ \text{m s}^{-2})} = \tan^{-1}(0.017) = 1^0$$

आप एक अन्य उपयोगं के बारे में भी विचार करना चाहेंगे।

4.4.2 ऊर्ध्वाधर लूप बनाते हुए वायुयान की गति (Aircrafts in vertical loops)

गणतंत्र दिवस या अन्य प्रदर्शनों में भारतीय वायुसेना के पायलटों को आपने ऊर्ध्वाधर लूपों में वायुयान द्वारा उड़ान भरते हुए देखा होगा (चित्र 4.8a)। ऐसी अवस्थाओं में जब वायुयान लूप की तली में होता है तो पायलट यह अनुभव करते हैं जैसे उनकी सीट पर कई गुने गुरुत्वीय बल से कोई उन्हें दबा रहा है। ऐसा क्यों होता है? इसे समझने के लिए चित्र. (4.8b) देखिए। चित्र (4.8b) लूप की तली में पायलट का बल निर्देशक आरेख है। पायलट पर काम कर रहे बलों में एक तो mg है तथा दूसरा पायलट की सीट द्वारा लगाया जा रहा अभिलंब बल N है। नेट उपरिमुखी बल का मानए N–mg, है जो अभिकेन्द्र त्वरण प्रदान करता है।



चित्र. 4.11 : (a) ऊर्ध्वाधर लूप में वायुयान की विभिन्न स्थितियाँ (b) पायलट का बल निर्देशक आरेख

अब N की गणना निम्न प्रकार की जाती है।

$$\text{N} - mg = m\,a$$

अथवा $$\text{N} - mg = m\,\upsilon^2/r$$

अथवा $$\text{N} = m\,(g + \upsilon^2/r)$$

वास्तविक स्थिति में मान लीजिए $\upsilon = 200\ \text{m s}^{-1}$ तथा $r = 1500$ m है।

अत: $$\text{N} = m\,g\left[1+\frac{(200\ \text{m s}^{-1})^2}{(9.8\ \text{m s}^{-2}\times 1500\ \text{m})}\right] = m\,g\times 3.7$$

उपर्युक्त N के मान से स्पष्ट हो जाता है कि पायलट 3.7 गुना गुरुत्वीय बल का अनुभव करते हैं। यदि यह बल निर्धारित सीमाओं से बढ़ जाय तो यहाँ तक हो सकता है कि पायलट कुछ क्षणों के लिए बेहोश हो जाय, जो कि उनके और वायुयान के लिए बहुत खतरनाक हो सकता है।

पाठगत प्रश्न 4.3

1. एकसमान वेग से उड़ते हुए वायुयान मुड़ते समय आमतौर पर बैकिंत हो जाते हैं, चित्र (4.8)। स्पष्ट कीजिए कि वायुयान बैंकित क्यों होते हैं? इस वायुयान का बल-निर्देशक आरेख बनाइए ($\mathbf{F}_a$ वायुयान पर वायु द्वारा लगाया गया बल है।) मान लीजिए $v = 100$ m s^{-1} की चाल से उड़ता हुआ वायुयान 30^0 बैंकिंग कोण पर मुड़ता है। इस मोड़ की वक्रता त्रिज्या का मान ज्ञात कीजिए। g का मान 10 m s^{-2} लीजिए।

2. उस कार की अधिकतम चाल क्या होगी जो क्षैतिज सड़क पर दौड़ती हुई 100 m त्रिज्या के घुमाव पर मुड़ती है। टायरों और सड़क के बीच घर्षण गुणंक का मान 0.90 है। g का मान 10 m s^{-2} ले।

3. मनोरंजक प्रदर्शनों में एक मजेदार खेल यह दिखाया जाता है कि एक रस्सी से पानी की भरी बाल्टी को बाँधकर ऊर्ध्वाधर वृत्त में इस तरकीब से घुमाया जाता है कि वृत्त के ऊपरी सिरे पर पहुँच कर बाल्टी उल्टी हो जाती है परन्तु पानी नहीं गिरता। इस करतब को करने के लिए बाल्टी वृत्त के ऊपरी सिरे पर होती है तो उस समय बाल्टी की न्यूनतम चाल के लिए त्रिज्या R के पदों का व्यंजक ज्ञात कीजिए R = 1.0 m के लिए चाल का मान ज्ञात कीजिए।

आपने क्या सीखा

- **प्रक्षेप्य गति** ऐसी गति है जिसका एक निश्चित दिशा में एकसमान वेग होता है तथा इस वेग की दिशा के लम्बवत एकसमान त्वरण होता है।

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g$$

$$v_x = v_0 \cos\theta \qquad v_y = v_0 \sin\theta - g\,t$$

$$x = x_0 + (v_0 \cos\theta)\,t \qquad y = y_0 + (v_0 \sin\theta) - \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

- ऊँचाई $h = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$

- $T = \dfrac{2v_0 \sin\theta}{g}$

- प्रक्षेप्य का परास $R = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$

- प्रक्षेप पथ का समीकरण $y = (\tan\theta_0)\,x - \dfrac{g}{2(v_0\cos\theta_0)^2}\,x^2$

- **वर्तुल गति** में गति एकसमान तब होती है जब पिंड की चाल एकसमान होती है। r त्रिज्या के वृत्त में एकसमान चाल υ से चक्कर लगाने वाले पिंड के एक समान वर्तुल गति का अभिकेन्द्र त्वरण निम्न समीकरण से प्राप्त होता है।

$$\mathbf{a}_r = -\frac{v^2}{r}\,\hat{\mathbf{r}}$$

जहाँ $\hat{\mathbf{r}}$ मात्रक सदिश है जो वृत्त के केन्द्र से पिंड की ओर निर्दिष्ट होता है। पिंड की चाल और इसकी कोणीय चाल में $\upsilon = r\,\omega$ संबंध होता है।

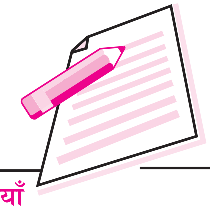
- पिंड पर लगे अभिकेन्द्र बल का मान निम्न होता है।

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}_r = \frac{m\,v^2}{r}\,\hat{\mathbf{r}} = m\,r\,\omega^2$$

- जब कोई पिंड ऊर्ध्व वृत्त में गति करता है तो उसका कोणीय वेग अचर नहीं रह सकता।
- ऊर्ध्व वृत्तीय गति में वृत्त के उच्चतम एवं निम्नतम बिन्दुओं पर न्यूनतम एवं अधिकतम वेगों के मान क्रमशः $\sqrt{gr}$ एवं $\sqrt{5gr}$ होते हैं।

पाठांत प्रश्न

1. वृत्ताकार पथ में मुड़ते समय साइकिल सवार वृत्त की परिधि के अंदर की ओर क्यों झुक जाता है?
2. रेल पटरी के घुमावदार भाग में अंदर की पटरी के सपेक्ष बाहर की पटरी को ऊँचा क्यों कर दिया जाता है?
3. क्या वर्तुल गति में एकसमान चाल से घूमते हुए पिंड का त्वरण भी – एकसमान होता है?
4. समतल सड़क पर चलती बस की खिड़की से एक पत्थर फेंका जाता है सड़क के किनारे खड़े किसी प्रेक्षक को पृथ्वी पर पहुँचते हुए पत्थर का पथ कैसा दिखाई देगा?
5. बिना टूटे हुए कोई डोरी 100 N का अधिकतम बल झेल सकती है। 1m लम्बे डोरी के टुकड़े के एक सिरे पर 1kg द्रव्यमान बाँधकर इसकों क्षैतिज तल में घुमाया जाता है। चाल का वह अधिकतम मान परिकंलित कीजिए जिससे पिंड को बिना डोरी टूटे घुमाया जा सके।
6. $10\ \text{m s}^{-1}$ चाल से कोई मोटर साइकिल सवार 50 m त्रिज्या वाले घुमावदार मोड़ पर मुड़ता है। मुड़ते समय अभिकेन्द्र त्वरण क्या होगा?
7. क्षैतिज से $30°$ के कोण पर प्रारंभिक वेग $300\ \text{m s}^{-1}$ से गोली दागी जाती है। बंदूक से कितनी दूरी पर जा कर गोली जमीन पर लगेगी?
8. किसी घड़ी की सेकंड की सुई की लंबाई 10 cm है। इस सुई की नोक की चाल क्या होगी?

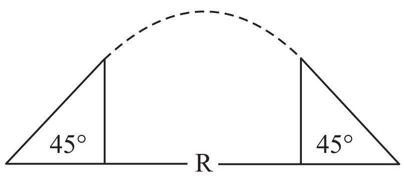


टिप्पणियाँ

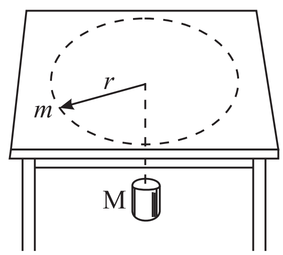
9. हिन्दी फिल्म में नायकों को आपने बड़ी लंबी कूद मार कर घोड़ों की पीठ और मोटर साइकिल पर बैठते देखा होगा। इस समस्या में कोई निडर मोटर साइकिल सवार किसी खाली जगह (gap) को 100 km h^{-1} के वेग से लाँघना चाहता है। (चित्र 4.9)। यदि दोनों ओर का आनत कोण 45^0 हो तो खाली जगह की अधिक से अधिक कितनी चौड़ाई होगी?

10. 500 m s^{-1} वेग से $30°$ के प्रक्षेप कोण से कोई गोला (shell) दागा जाता है। वेग के ऊर्ध्वाधर घटक, क्षैतिज घटक, गोले की अधिकतम ऊँचाई और परास का मान ज्ञात कीजिए।

11. पृथ्वी से 2000 मीटर की ऊँचाई पर 200 km h^{-1} की एकसमान चाल से क्षैतिज उड़ान भरते हुए कोई वायुयान भोजन का पैकेट गिराता है। इस पैकेट को पृथ्वी तक आने में कितना समय लगेगा? पैकेट छोड़े जाने के बिन्दु से पैकेट पृथ्वी पर कितनी क्षैतिज दूरी आगे गिरेगा?



चित्र 4.12



चित्र 4.13

12. v चाल से किसी वृत्त में घर्षणहीन (frictionless) मेज पर चक्कर लगाते m द्रव्यमान के साथ मेज में छेद करके M द्रव्यमान का पिंड डोरी द्वारा जोड़ दिया जाता है (चित्र 4.10)। द्रव्यमान m द्रव्यमान के पिण्ड की वह चाल ज्ञात कीजिए जिससे कि M द्रव्यमान का पिंड विराम अवस्था में बना रहे।

13. 60 km h^{-1} की चाल से कोई कार $220\ m$ त्रिज्या के घुमावदार (वृत्ताकार) पथ में चक्कर काट रही है। कार में बैठी 90 kg की सवारी पर अपकेन्द्र बल क्या होगा?

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

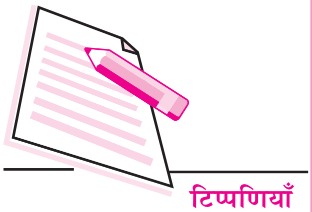
4.1

(1) (a), (b), (d)

(2) (a) हाँ (b) हाँ (c) अधिकतम परास की गेंद

(3) अधिकतम परास $\dfrac{v_0^2}{g} = \dfrac{(9.5 \text{ m s}^{-1})^2}{9.78 \text{ m s}^{-2}} = 9.23 \text{ m}$

अतः अन्तर का मान $9.23 \text{ m} - 8.90 \text{ m} = 0.33 \text{ m}$



4.2

(1) (a) हाँ (b) नहीं (c) हाँ (d) नहीं

वेग और त्वरण समान नहीं हैं क्योंकि इनकी दिशाएं लगातार बदल रही हैं।

(2) चूँकि

$$a = \frac{v^2}{r},\ r = \frac{v^2}{\alpha} = \frac{(9.0\,\text{m s}^{-1})^2}{3\,\text{m s}^{-2}} = 27\text{ m}$$

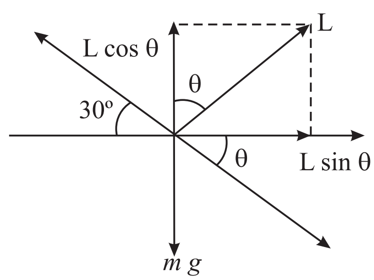
(3) $$a = \frac{c^2}{r} = \frac{(3\times10^8\ \text{m s}^{-1})^2}{10\times10^3\ \text{m}}$$

$$= 9\times10^{13}\ \text{m s}^{-2}$$

4.3

(1) यह प्रश्न सड़कों की बैंकिंग के समान है। यदि वायुयान बैंक करता है तो बल F का घटक बल त्रिज्या की दिशा में कार्य करके आवश्यक अभिकेन्द्र त्वरण प्रदान करता है। वक्रता त्रिज्या का मान निम्नलिखित होता है:

$$\text{R} = \frac{v^2}{g\tan\theta_0} = \left(\frac{100\ \text{m s}^{-1}}{10\ \text{m s}^{-2}\times\tan 30^\circ}\right)^2 = 10\sqrt{3}\ \text{m} = 17.3\ \text{m}$$



चित्र 4.14

(2) घर्षण बल, अभिकेन्द्र-त्वरण उपलब्ध कराता है। अत:

$$F_s = \mu_s N = \frac{mv^2}{r}$$

चूँकि सड़क क्षैतिज (समतल) है इसलिए N = mg, इसलिए

$$\mu_s\, mg = \frac{mv^2}{r}$$

अथवा $v^2 = \mu_s g\, r$

or $v = (0.9\times10\ \text{m s}^{-2}\times100\ \text{m})^{½}$

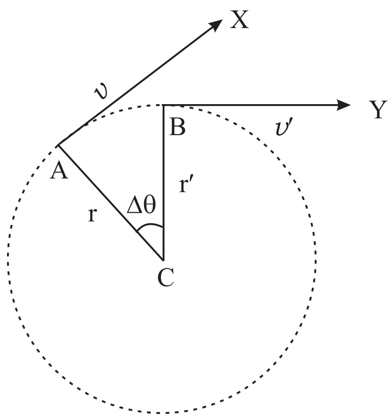
$v = 30\ \text{m s}^{-1}$.

(3) चित्र 4.15 में बाल्टी वृत के ऊपरी बिन्दु पर मुक्त निकाय आरेख दर्शाया गया हे। बाल्टी घुमाने पर पानी इससे बाहर न गिरे इस के लिए आवश्यक शर्त यह है कि जल का भार आवश्यक अभिकेन्द्र बल प्रदान करे

अर्थात्, $mg = \dfrac{mv^2}{r}$

$\Rightarrow \quad v^2 = Rg$

अथवा $\quad v = \sqrt{Rg}$



चित्र. 4.15

यह ऊर्ध्वाधर वृत्त के ऊपरी सिरे पर बाल्टी की चाल का न्यूनतम मान है।

R = 1.0 m तथा g = 10 m s^{-2} रखने पर

$$v = \sqrt{1.0\ \text{m} \times 10\ \text{m s}^{-2}} = 3.2\ \text{m s}^{-1}$$

पाठांत अभ्यास के उत्तर

5. 10 m s^{-1} 6. 2 m s^{-2} 7. $900\sqrt{3}$ m

8. 1.05×10^{-3} m s^{-1} 9. 77.1 m

10. $v_x = 250\sqrt{3}$ m s^{-1}

$vy = 250$ m s^{-1}

ऊर्ध्वाधर ऊँचाई = 500 m

क्षैतिज परास = 3125 m

11. $t = 20$ s, 999.9 m 12. $v = \sqrt{\dfrac{Mgr}{m}}$ 13. 125 N

5

गुरुत्वाकर्षण

क्या आपने कभी सोचा है कि ऊपर की ओर फेंकी गई गेंद वापस पृथ्वी पर क्यों लौट आती है? या हवा में उछाला गया एक सिक्का वापस जमीन पर क्यों गिर जाता है? आदि काल से ही ये घटनाएँ मानव के लिए आश्चर्य का कारण बनी रही हैं। इस प्रश्न का उत्तर 17वीं शताब्दी में सर आइजेक न्यूटन ने दिया। उन्होंने बतलाया कि चीजों के पृथ्वी की ओर आकर्षित होने का कारण पृथ्वी का ***गुरुत्वाकर्षण बल*** है। उन्होंने यह भी बताया कि इसी बल के कारण पृथ्वी तथा अन्य ग्रह सूर्य की परिक्रमा करते हैं और इसी बल के कारण चन्द्रमा अपनी कक्षा में गति करता है। यह एक सार्वत्रिक बल है अर्थात् यह ब्रह्माण्ड में सभी जगह उपस्थित है। वास्तव में इसी बल के कारण ब्रह्माण्ड एक साथ आबद्ध है।

इस पाठ में आप न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियमों के बारे में सीखेंगे। हम पृथ्वी के आकर्षण के कारण उत्पन्न त्वरण का भी अध्ययन करेंगे। यह त्वरण, जिसे ***गुरुत्वजनित त्वरण*** कहते हैं पृथ्वी के सभी स्थानों पर समान नहीं रहता है। हम उन कारकों का पता करेंगे जिनके कारण त्वरण का मान परिवर्तित होता है। हम गुरूत्वीय विभव तथा स्थितिज ऊर्जा के संबंध में अध्ययन करेंगे तथा ग्रहीय गति के लिए केपलर के नियमों एवं विभिन्न प्रकार के कृत्रिम उपग्रहों की कक्षाओं के बारे में भी सीखेंगे। अंत में अंतरिक्ष खोज के क्षेत्र में भारत के महत्वपूर्ण कार्यक्रमों एवं उपलब्धियों की चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

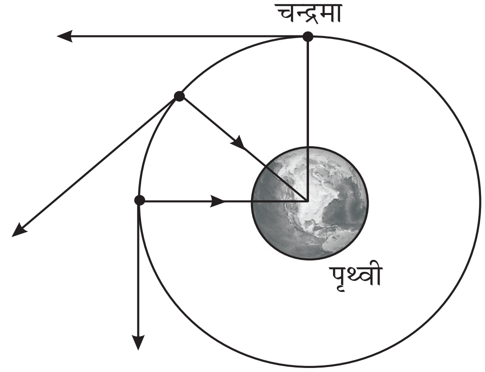
इस पाठ को पढ़ने के पश्चात आप

- *गुरुत्वाकर्षण का नियम बता पाएंगे;*
- *किसी आकाशीय पिण्ड के गुरुत्वीय त्वरण के मान की गणना कर सकेंगे;*
- *ऊँचाई, गहराई व अक्षांशों में परिवर्तन के साथ गुरुत्वीय त्वरण में होने वाले परिवर्तन का विश्लेषण कर सकेंगे;*
- *गुरुत्वीय विभव तथा गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा में विभेद कर पाएंगे;*
- *ग्रहों की गति के लिए उत्तरदायी बल को पहचान सकेंगे और केपलर के ग्रह गति विषयक नियमों का प्रतिपादन कर सकेंगे;*

- *कक्षीय वेग एवं पलायन वेग की गणना कर सकेंगे;*
- *यह बतला सकेंगे कि कृत्रिम उपग्रह का प्रक्षेपण कैसे किया जाता है;*
- *ध्रुवीय एवं विषुवतीय उपग्रहों में भेद कर सकेंगे;*
- *किसी उपग्रह के तुल्यकाली उपग्रह बनने की शर्तें बता सकेंगे;*
- *एक तुल्यकाली उपग्रह की ऊँचाई की गणना कर सकेंगे और उनके अनुप्रयोगों की सूची तैयार कर सकेंगे; तथा*
- *अंतरिक्ष तकनीकी के क्षेत्र में भारत की उपलब्धियाँ बता पाएंगे।*

5.1 गुरुत्वाकर्षण का नियम

यह कहा जाता है कि न्यूटन एक पेड़ के नीचे बैठे थे जब एक सेब आकर जमीन पर गिरा। इससे उनकी विचार श्रृंखला प्रारंभ हुई। चूँकि सेब तथा दूसरे पदार्थ पृथ्वी गिरते हैं इसलिये पृथ्वी का कोई बल उन पर अवश्य कार्य करता होगा। उन्होंने स्वंय से प्रश्न किया क्या यह वही बल तो नहीं है जो चन्द्रमा को पृथ्वी के चारों ओर उसकी कक्षा में बनाए रखता है। न्यूटन ने तर्क दिया कि चंद्रमा अपनी कक्षा के किसी भी बिंदु पर स्पर्श रेखा की दिशा में छिटककर दूर चला जाता यदि इसे इसकी कक्षा में बनाये रखने के लिए इस पर कोई बल कार्य न करता (चित्र 5.1)



चित्र. 5.1 : अपनी कक्षा के किसी भी बिंदु पर चन्द्रमा छिटककर स्पर्श रेखा की दिशा में दूर चला जाता, लेकिन पृथ्वी का आकर्षण बल इसे इसकी कक्षा में बनाए रखता है।

क्या यह निरन्तर केन्द्र की तरफ गिरने की प्रवृत्ति कहीं उसी बल के कारण तो नहीं है जिसके कारण सेब जमीन पर आ गिरता है। उन्होंने केपलर के नियमों से यह निगमन किया था कि सूर्य व ग्रहों के बीच का बल $1/r^2$ के अनुसार परिवर्तित होता है जहाँ r उनके बीच की दूरी है। इस परिणाम का प्रयोग करते हुए वह यह सिद्ध करने में सफल हुए कि यही बल चन्द्रमा को पृथ्वी से बाँधे रखता है। तब उन्होंने सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण के नियम का व्यापकीकरण इस प्रकार किया।

ब्रह्माण्ड में प्रत्येक कण अन्य सभी कणों को अपनी ओर एक बल से आकर्षित करता है जो उन दो कणों के द्रव्यमानों के गुणनफल के समानुपाती और उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है। इस प्रकार यदि m_1 और m_2 दो वस्तुओं के द्रव्यमान हों और r उनके बीच की दूरी हो तो बल का परिमाण

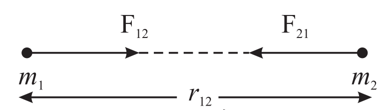
$$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

या
$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{5.1}$$

आनुपातिकता स्थिरांक G को **सार्वत्रिक गुरुत्वीय स्थिरांक कहते हैं। किन्हीं दो वस्तुओं के लिए इसका मान ब्रह्माण्ड में कहीं भी समान रहता है।** इसका तात्पर्य यह हुआ कि यदि पृथ्वी पर, नियत दूरी पर रखे दो कणों के बीच लगने वाला बल F है तो ब्रह्माण्ड में अन्यत्र कहीं भी इन दो कणों को यदि समान दूरी पर रखा जाए तो इनके बीच लगने वाला बल F ही होगा।

गुरुत्वीय बल का एक अभिलक्षण यह है कि यह सदैव आकर्षण बल होता है। यह प्रकृति के मूलभूत बलों में से एक है।

याद रहे कि यह आकर्षण पारस्परिक होता है अर्थात् m_1 द्रव्यमान का कण m_2 कण को आकर्षित करता है और m_2 द्रव्यमान का कण m_1 द्रव्यमान के कण को आकर्षित करता है। यह बल दोनों कणों की स्थिति को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश होता है।



चित्र. 5.2 : द्रव्यमान m_1 और m_2 एक दूसरे से r_{12} दूरी पर रखे गए हैं। द्रव्यमान m_1 द्रव्यमान m_2 को F_{12} बल से आकर्षित करता है।

हम जानते हैं कि बल एक सदिश राशि है। क्या इस स्थिति में समीकरण (5.1) में संशोधन की आवश्यकता है? इस प्रश्न का उत्तर है कि इस समीकरण द्वारा परिमाण एवं दिशा दोनों का बोध होना चाहिए। जैसा कि पहले बताया जा चुका है कि गुरुत्वाकर्षण बल दो कणों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश लगता है। अर्थात् m_1 द्रव्यमान m_2 द्रव्यमान को एक बल से आकर्षित करता है जो कि उन्हें जोड़ने वाली रेखा की दिशा में लगता है (चित्र 5.2)। यदि m_1 द्वारा m_2 पर लगाए गए बल को $\mathbf{F}_{12}$ द्वारा दर्शाएं और उनके बीच की दूरी को $\mathbf{r}_{12}$ से व्यक्त किया जाए तो गुरुत्वाकर्षण के नियम का सदिश रुप होगा

$$\mathbf{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{\mathbf{r}_{21}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{12} \tag{5.2}$$

जहाँ $\hat{\mathbf{r}}_{12}$, m_1 से m_2 की ओर इंगित करता एक इकाई–सदिश है।
इसी प्रकार m_2 द्वारा m_1 पर लगाये बल को लिख सकते हैं।

$$\mathbf{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{\mathbf{r}_{21}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{21} \tag{5.3}$$

चूँकि $\hat{\mathbf{r}}_{12} = -\hat{\mathbf{r}}_{21}$, समीकरण (5.2) और (5.3) से हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \tag{5.4}$$

बल $\mathbf{F}_{12}$ और $\mathbf{F}_{21}$ परिमाण में बराबर और दिशा में विपरीत हैं और न्यूटन के तृतीय गति नियम के अनुसार क्रिया व प्रतिक्रिया बलों का एक युग्म बनाते हैं। स्मरण रहे $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ और $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ दोनों इकाई परिमाण सदिश हैं। तथापि इन दो सदिशों की दिशाएं विपरीत हैं।

जब तक अन्यथा न कहा जाये इस पाठ में हम केवल गुरुत्वाकर्षण बल के परिमाण का उपयोग करेंगे।

G का मान इतना कम है कि न्यूटन या उनके समकालीन प्रयोगकर्ता इसका मान नहीं निकाल पाए। इसका मान लगभग 100 साल बाद कैवेंडिस ने ज्ञात किया। G का सभी के द्वारा स्वीकार किया गया मान $6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2 kg^{-2}}$ है। G का मान इतना कम होने के कारण ही दो साधारण वस्तुओं के बीच इस बल को महसूस नहीं किया जा सकता।

उदाहरण 5.1 : केपलर का तीसरा नियम बतलाता है (इसकी विस्तृत व्याख्या हम बाद में करेंगे) कि यदि सूर्य व ग्रह के बीच की दूरी r है और T इसका परिक्रमण काल है तो $r^3 / T^2 =$ स्थिरांक होता है। इसके आधार पर दर्शाइए कि ग्रह पर लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल सूर्य से उसकी दूरी के वर्ग का व्युत्क्रमानुपाती होता है।

हल : सरलता के लिये ग्रह की कक्षा को वृत्ताकार मान लेते हैं। (वास्तविकता में कक्षा लगभग वृत्ताकार होती हैं)। तब ग्रह पर लगने वाला अभिकेन्द्र बल

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

जहाँ υ कक्षीय वेग है, चूँकि $\upsilon = r\omega = \dfrac{2\pi r}{\mathrm{T}}$, T = परिक्रमण काल

अत:
$$F = m\left(\frac{2\pi r}{\mathrm{T}}\right)^2 \Big/ r$$

या
$$F = \frac{4\pi^2 mr}{\mathrm{T}^2}$$

लेकिन केपलर के तीसरे नियम के अनुसार $\mathrm{T}^2 \propto r^3$ or $\mathrm{T}^2 = Kr^3$ (केपलर का तीसरा नियम) जहाँ K आनुपातिकता स्थिरांक है।

$\therefore$
$$F = \frac{4\pi^2 mr}{Kr^3} = \frac{4\pi^2}{K} \times \frac{m}{r^2} = \frac{4\pi^2 m}{K} \cdot \frac{1}{r^2}$$

या
$$F \propto \frac{1}{r^2} \qquad (\because \text{ एक ग्रह के लिये } \frac{4\pi^2 m}{K} \text{ नियत है})$$

आगे बढ़ने से पूर्व अच्छा हो कि आप अपनी प्रगति की जाँच कर लें।

पाठगत प्रश्न 5.1

1. चन्द्रमा पृथ्वी का एक पूरा चक्कर 27.3 दिनों में लगा लेता है। याद रखें कि यह समय स्थिर तारों के संदर्भ में है (पृथ्वी के संदर्भ में परिक्रमण काल 29.5 दिन है; इसे कुछ कलैण्डरों में एक मास की अवधि निर्धारित करने में प्रयोग किया जाता है।) चन्द्रमा की कक्षा की त्रिज्या 3.84×10^8 m (पृथ्वी की त्रिज्या का 60 गुना) है। चन्द्रमा का अभिकेन्द्र-त्वरण

ज्ञात कीजिए और दर्शाइए इसका मान $9.8 \text{ m s}^{-2}/3600$ है, गुरुत्व का दूरी के साथ परिवर्तन दूरी के वर्ग का व्युत्क्रमानुपाती होता है- अर्थात् $1/r^2$ के अनुसार बदलता है।

2. समीकरण (5.1) की सहायता से G की विमाएं ज्ञात कीजिए।
3. समीकरण (5.1) की सहायता से दर्शाइये कि G को एक-एक kg द्रव्यमान के दो पिण्डों के बीच लगने वाले बल के रुप में परिभाषित किया जा सकता है, जबकि उनके बीच की दूरी 1 m हो।
4. एक निश्चित दूरी पर रखी हुई दो वस्तुओं के बीच लगने वाले बल का परिमाण F है। F के मान में क्या परिवर्तन होगा यदि (i) द्रव्यमानों का मान बदले बिना उनके बीच की दूरी को दो गुना कर दिया जाए (ii) यदि दूरी समान रहती है और प्रत्येक द्रव्यमान का परिमाण दो गुना कर दिया जाए (iii) यदि दूरी और प्रत्येक द्रव्यमान को दो गुना कर दिया जाए।
5. 50 kg और 60 kg की दो वस्तुएं एक दूसरे से 1 m की दूरी पर रखी हैं। उनके बीच लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल की गणना करें।

5.2 गुरुत्वीय त्वरण

न्यूटन के गति के दूसरे नियम से आप जानते हैं कि किसी वस्तु पर लगाए गए **F** परिमाण के बल और उससे उत्पन्न त्वरण के बीच संबंध निम्नवत् है:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{5.5}$$

गुरुत्व बल अर्थात् पृथ्वी के समीप रखी वस्तु पर लगने वाला पृथ्वी द्वारा आरोपित बल वस्तु में एक त्वरण उत्पन्न करता है। गुरुत्व बल के कारण जनित इस त्वरण को ***गुरुत्वीय त्वरण*** कहते हैं। इसे प्रतीक g से दर्शाया जाता है। समीकरण (5.1) के अनुसार पृथ्वी की सतह पर m द्रव्यमान की वस्तु पर लगने वाला बल

$$F = \mathrm{G}\frac{m\,M}{R^2} \text{ होता है।} \tag{5.6}$$

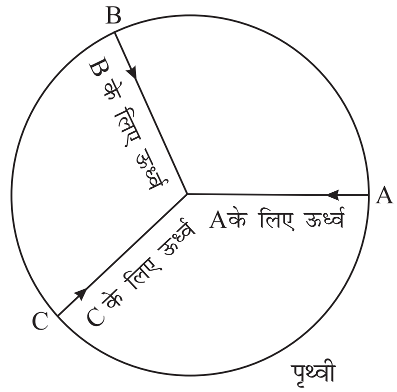
जहां M पृथ्वी का द्रव्यमान और R इसकी त्रिज्या है)। समीकरण (5.5) और (5.6) से हम पाते हैं कि

$$mg = \mathrm{G}\frac{m\,M}{R^2}$$

या

$$g = \mathrm{G}\frac{M}{R^2} \tag{5.7}$$

याद रखें कि वस्तु पर लगे गुरुत्वीय बल की दिशा पृथ्वी के केन्द्र की ओर होती है। इसी दिशा को हम ऊर्ध्व दिशा कहते हैं। चित्र 5.3 में विभिन्न स्थानों के लिए ऊर्ध्वाधर दिशा दर्शायी गयी है। ऊर्ध्व दिशा के लम्बवत दिशा को हम क्षैतिज दिशा कहते हैं।



चित्र. 5.3 : किसी स्थान पर ऊर्ध्व दिशा उस स्थान पर पृथ्वी के केन्द्र की ओर होती है।

यदि हमें पृथ्वी या किसी अन्य आकाशीय पिंड जैसे ग्रह का द्रव्यमान और त्रिज्या ज्ञात हो तो इसकी सतह पर g का मान समीकरण (5.7) की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है। पृथ्वी की सतह पर g का मान प्राय: $9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ लिया जाता है। अत: गुरुत्वजनित त्वरण का औसत मान $9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ है।

इसी प्रकार किसी ग्रह या उपग्रह के लिये भी g का मान ज्ञात किया जा सकता है, यदि हमें उस ग्रह या उपग्रह का द्रव्यमान तथा त्रिज्या ज्ञात हो।

आगे बढ़ने से पहले आइये समीकरण (5.7) पर विचार करें। हम पाते हैं कि किसी पिंड पर प्रभावी गुरुत्वीय त्वरण इसके द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है। इसका तात्पर्य यह हुआ कि भारी और हल्की गेंदें समान वेग से नीचे गिरती हैं। यदि हम किसी निश्चित ऊँचाई से इन गेंदों को एक साथ नीचे गिराएं तो धरातल पर ये दोनों गेंदे एक ही समय पर पहुँचेंगी।

क्रियाकलाप 5.1

एक कागज का टुकड़ा और एक छोटा सा कंकड़ लें। इन्हें किसी नियत ऊँचाई से एक साथ नीचे गिरने दें। दोनों के पथों का अवलोकन करें और उनके जमीन को छूने के समय पर ध्यान दें। पुन: दो कंकड़ लें जिनमें एक दूसरे से भारी हो, उन्हें भी एक नियत ऊँचाई से नीचे गिरने दें और उनके जमीन छूने के समय का अवलोकन करें।

गुरुत्व के अन्तर्गत पतन

यह तथ्य कि भारी और हल्के कंकड़ एक समान दर से नीचे गिरते हैं, कुछ विचित्र सा प्रतीत हो सकता है। 16 वीं शताब्दी तक यह एक आम विश्वास था कि एक भारी वस्तु एक हल्की वस्तु की अपेक्षा अधिक तेजी से नीचे गिरती है। तथापि, उस समय के महान वैज्ञानिक गैलीलियो ने यह दर्शाया कि दोनों वस्तुएं वास्तव में एक ही दर से नीचे गिरती हैं। यह कहा जाता है कि वे पीसा की मीनार के ऊपर गए और और दो गेंदों को, जिनके भार में बहुत अधिक अन्तर था, एक साथ नीचे गिराया। गेंदे धरातल पर एक ही समय पर पहुँची। लेकिन जब एक पंख और एक पत्थर को साथ-साथ गिराया गया तो वे अलग-अलग समय पर धरातल पर पहुँचते हैं। गैलीलियों ने तर्क दिया कि पंख अपेक्षाकृत धीमी गति से गिरता है क्योंकि इस पर हवा का उत्प्लावन बल एवं प्रतिरोध

क बल कार्य करता है। उसने कहा कि निर्वात में दोनों वस्तुएं एक ही समय पर गिरेगीं। हाल के वर्षो में अंतरिक्ष यात्रियों ने चन्द्रमा पर पंख और कंकड़ का प्रयोग करके यह सिद्ध किया कि दोनों एक साथ जमीन पर पहुँचते हैं। स्मरण रखें कि चन्द्रमा पर वायुमण्डल नहीं है।

गुरुत्व के प्रभाव के कारण वस्तुएँ ऊर्ध्वाधरतः नीचे पृथ्वी की ओर गिरती हैं। छोटी ऊँचाईयों के लिए, गुरुत्वजनित त्वरण अधिक नहीं बदलता है। इसलिए t समय में तय की गयी दूरी प्रारंभिक तथा अंतिम वेगों के लिये समीकरण निम्नवत् लिख सकते हैं:

$$v = u + gt$$

$$s = ut + \frac{1}{2}gt^2$$

और

$$v^2 = u^2 + 2gs. \qquad (5.8)$$

यहाँ यह याद रखना महत्वपूर्ण है कि **g हमेशा ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर कार्य करता है चाहे वस्तु किसी भी दिशा में गति कर रही हो। किसी वस्तु का g त्वरण से गिरना मुक्त-पतन (free fall) कहा जाता है।**

समीकरण 5.8 की सहायता से यह स्पष्ट है कि यदि एक वस्तु विराम अवस्था से गिरती है तो t समय में h दूरी तक गिरेगी जहाँ $h = (1/2)gt^2$ है। अतः किसी ऊँचाई h से किसी भारी सिक्के को मुक्त रुप से गिराकर और सही समय दर्शाने वाली विराम घड़ी द्वारा इसके जमीन पर पहुँचने का समय लेकर g का मान ज्ञात किया जा सकता है। यदि आप 5 रुपये के एक सिक्के को 1मीटर की ऊँचाई से मुक्त रुप से गिराकर जमीन पर पहुँचने के समय का औसत मान लें तो यह 0.45 सेकन्ड आता है। इसकी सहायता से g के मान की गणना की जा सकती है। तथापि, प्रयोगशाला में आप सरल लोलक का उपयोग करके परोक्ष विधि से g का मान ज्ञात करेंगे।

आप आश्चर्य कर रहे होंगे कि किसी कण पर गुरुत्व बल की गणना करते समय हम पृथ्वी की सतह पर रखी वस्तु और पृथ्वी के बीच की दूरी को पृथ्वी की त्रिज्या के बराबर क्यों लेते हैं। जब हम दो बिंदु द्रव्यमानों को लेते हैं तो उनके बीच की दूरी उनके पृथकन के बराबर ली जाती है। लेकिन जब हम दो बड़ी वस्तुओं के बीच गुरुत्व बल की गणना करते हैं तो उनके बीच की दूरी क्या लेते हैं? इस समस्या के समाधान के लिए वस्तु के गुरुत्व-केन्द्र की संकल्पना का समावेश किया गया है। जहाँ तक गुरुत्व प्रभाव का प्रश्न है हम पूरे पिण्ड की जगह एक तुल्य बिंदु पर पिण्ड के भार को केन्द्रित मान सकते हैं। अर्थात् इस बिंदु पर गुरुत्व बल लग रहा है ऐसा मान सकते हैं? ज्यामितीय रुप से नियमित वस्तुएँ जिनका घनत्व समान हो जैसे गोले, बेलन, आयत आदि के लिये इनका ज्यामितीय केन्द्र ही इनका गुरुत्व केन्द्र भी होता है। यही कारण है कि हम अन्य वस्तुओं की दूरी पृथ्वी के केन्द्र से मापते हैं। अनियमित आकृति की वस्तुओं के लिए गुरुत्व केन्द्र निर्धारित करने का कोई सरल तरीका नहीं है।

एक धातु की अंगूठी का गुरुत्व-केन्द्र कहाँ पर स्थित होता है? यह वास्तव में अंगूठी के केन्द्र पर स्थित होता है।

ध्यान दें कि यह बिंदु वस्तु के द्रव्य के बाहर स्थित है। अत: याद रखें कि किसी वस्तु का गुरुत्वकेन्द्र उसके पदार्थ के बाहर हो सकता है। आपका अपना गुरुत्व केन्द्र कहाँ पर है? यदि हम अपना आकार नियमित मान लें तो, हमारा गुरुत्वीय केन्द्र नाभि से थोड़ा नीचे होगा।

इस पाठ में आगे आप वस्तु के द्रव्यमान केन्द्र के बारे में भी ज्ञान प्राप्त करेंगे। यह एक ऐसा बिंदु है जिसपर वस्तु का पूरा द्रव्यमान केन्द्रित माना जा सकता है। **एकसमान गुरुत्वीय क्षेत्र में** (जैसा कि पृथ्वी के समीप होता है) गुरुत्व केन्द्र और द्रव्यमान केन्द्र संपाती होते हैं।

गुरुत्व केन्द्र या द्रव्यमान केन्द्र के प्रयोग से हमारी गणनाएँ अत्यधिक सरल हो जाती हैं। कल्पना करें कि हमें यदि किसी वस्तु का निर्माण करने वाले कणों के बीच कार्यकारी बलों और इनका परिणामी बल ज्ञात करना हो, तो यह कितना कठिन कार्य होगा।

आपको यह ध्यान रखना चाहिए कि G और g अलग-अलग भौतिक राशियाँ हैं। G गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियतांक है और यह अचर है जबकि g गुरुत्वजनित त्वरण है जो कि एक जगह से दूसरे जगह बदल सकता है। इसे हम अगले भाग में देखेंगे।

अब आप अपनी प्रगति की जाँच करने के लिए निम्न प्रश्नों के उत्तर दें:

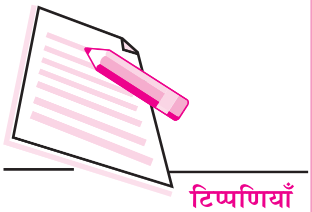
पाठगत प्रश्न 5.2

1. पृथ्वी का द्रव्यमान 5.97×10^{24} किलोग्राम है और इसकी माध्य त्रिज्या 6.371×10^{6} m. है। पृथ्वी की सतह पर g का मान ज्ञात करें।
2. बहुत सावधानीपूर्वक लिए गए माप दर्शाते हैं कि विषुवत-वृत (भूमध्यरेखा) पर पृथ्वी की त्रिज्या 6378 किलोमीटर है जबकि ध्रुवों पर 6357 किलोमीटर है। ध्रुवों व विषुवत रेखापर g के मानों की तुलना कीजिए।
3. किसी वस्तु को ऊपर फेंके जाने पर g की दिशा क्या होगी जब (i) वस्तु ऊपर जा रही है। और (ii) जब यह अधिकतम ऊँचाई पर है (iii) जब यह नीचे आ रही है। (iv) जब यह धरातल पर वापस आ जाती है?
4. चन्द्रमा का द्रव्यमान 7.3×10^{22} kg है और इसकी त्रिज्या 1.74×10^{6} m है। इसकी सतह पर गुरुत्वीय त्वरण का मान ज्ञात कीजिए।

5.3 g के मान में परिवर्तन

5.3.1 ऊँचाई के साथ परिवर्तन

समीकरण 5.7 ($g = G\dfrac{M}{R^2}$) के दाई ओर हर में राशि R^2 दर्शाती है कि g का परिमाण पृथ्वी के केन्द्र से दूरी के वर्ग के मान के अनुसार दूरी R के बढ़ने पर घटता है। अत: सतह से R दूरी पर अर्थात् केन्द्र से $2R$ दूरी पर इसका मान पृथ्वी की सतह पर मान का (1/4) हो जाता



है। यदि पृथ्वी की सतह से ऊँचाई h जिसे तुंगता (altitude) कहते हैं, पृथ्वी की त्रिज्या की तुलना में काफी कम हो तो, g_h (h तुंगता पर गुरुत्वजनित त्वरण का मान)

$$g_h = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

$$= \frac{g}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} \qquad (5.9)$$

चूँकि $g = GM/R^2$ पृथ्वी की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण का मान है।

अत:
$$\frac{g}{g_h} = \left(1+\frac{h}{R}\right)^2 = 1 + \frac{2h}{R} + \left(\frac{h}{R}\right)^2$$

अब चूँकि (h/R) एक छोटी राशि है तो (h/R)^2 उससे भी छोटी राशि होगी। अत: इसे (h/R) की तुलना में नगण्य माना जा सकता है। अत:

$$g_h = \frac{g}{\left(1+\frac{2h}{R}\right)} \qquad (5.10)$$

आइए इसे एक उदाहरण की सहायता से समझें।

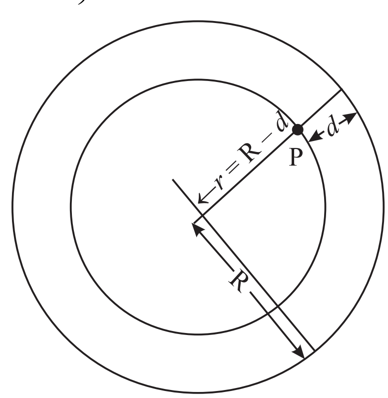
उदाहरण 5.2 : आधुनिक वायुयान 10 km से अधिक ऊँचाई पर उड़ते हैं। हम इस ऊँचाई पर g का मान निकालते हैं। पृथ्वी की त्रिज्या 6400 km और पृथ्वी की सतह पर g का मान 9.8 m s^{-2} है।

हल : समीकरण (5.10) से

$$g_h = \frac{g}{\left(1+\frac{2.(10)\ \text{km}}{6400\ \text{km}}\right)} = \frac{9.8\ \text{m s}^{-2}}{1.003} = 9.77\ \text{m s}^{-2}.$$

5.3.2. गहराई के साथ g में परिवर्तन

पृथ्वी के अंदर व गहराई d पर स्थित एक बिंदु P की कल्पना कीजिए (चित्र. 5.4)। पृथ्वी को समान घनत्व ρ का एक गोला मान लें। बिंदु P की पृथ्वी के केन्द्र से दूरी r = (R – d) है। (R – d) त्रिज्या का एक गोला खींचे। P बिंदु पर रखे द्रव्यमान पर d मोटाई के कोश से लगने वाला गुरुत्वीय बल निरस्त हो जाता है। यह केवल r त्रिज्या के गोले के कारण बल महसूस करता है। अत: बिन्दु P पर गुरुत्वीय बल केवल r त्रिज्या के गोले के कारण होगा।



चित्र. 5.4 : d गहराई पर स्थित बिंदु की केन्द्र से दूरी r = R – d है।

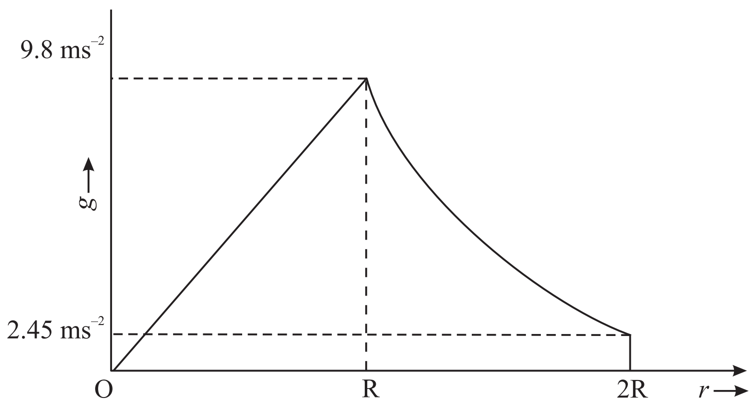
अतः P बिंदु पर गुरुत्वीय त्वरण का मान ज्ञात करने के लिए हम $(R-d)$ त्रिज्या के गोले के द्रव्यमान का ही प्रयोग करेंगे। यदि ρ गोले का घनत्व हो तो इस गोले के द्रव्यमान

$$M' = \frac{4\pi}{3}\rho\,(R-d)^3 \qquad (5.10)$$

बिंदु P पर रखे कण द्वारा अनुभव किए गए गुरुत्वीय त्वरण का मान

$$g_d = G\frac{M'}{(R-d)^2} = \frac{4\pi G}{3}\rho\,(R-d) \qquad (5.11)$$

ध्यान दें कि जब d का मान बढ़ता है तो $(R-d)$ घटता है। इसका अर्थ यह हुआ कि जब हम पृथ्वी की सतह के नीचे जाते हैं तो g का मान घटता हैं। $d = R$ पर अर्थात्, पृथ्वी के केन्द्र पर गुरुत्वीय त्वरण का मान शून्य हो जाता है। यह भी नोट कीजिए कि $R-d = r$, पृथ्वी के केन्द्र से वस्तु की दूरी बतलाता है। अतः गुरुत्वीय त्वरण r के रैखिकतः समानुपातिक है। पृथ्वी के केन्द्र से g के मान में पृथ्वी की सतह से दूरी के साथ, परिवर्तन चित्र 5.5 में दर्शाया गया है।



चित्र. 5.5 : g के मान में पृथ्वी के केन्द्र से दूरी के साथ परिवर्तन

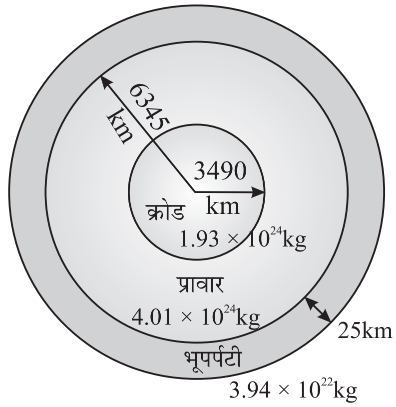
$d = 0$ के लिए $g = \frac{4\pi G}{3}\rho R.$ (समीकरण 5.11) से

अब (5.11) की सहायता से यह आसानी से देखा जा सकता है कि

$$g_d = g\frac{(R-d)}{R} = g\left(1-\frac{d}{R}\right),\ 0 \le d \le R \qquad (5.12)$$

अतः समीकरण (5.9) और (5.12) से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि **g का मान ऊँचाई और गहराई दोनों के साथ घटता है।**

पृथ्वी की आंतरिक संरचना



चित्र. 5.6 : पृथ्वी की संरचना (पैमाने पर नहीं) पृथ्वी की तीन प्रमुख परतों को उनके अनुमानित द्रव्यमानों के साथ दिखाया गया है।

वास्तव में g का मान एक निश्चित दूरी तक गहराई के साथ बढ़ता है फिर कम होने लगता है। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि हम पृथ्वी को एकसमान घनत्व का गोला मान लेते हैं जो कि सही नहीं है। पृथ्वी का अधिकतम भार क्रोड में केन्द्रित रहता है। ऊपरी सतहें काफी हल्की होती हैं (चित्र 5.6) बहुत थोड़ी गहराई के लिए, द्रव्यमान में कमी को नगण्य मान लिया जाता है जबकि r के मान में कमी होती है। इसलिए g का मान पहले कुछ गहराई तक बढ़ता है और फिर कम होने लगता है। इसका अर्थ है कि पृथ्वी को एक समान घनत्व का गोला मानने की अभिधारणा सही नहीं है।

5.3.3 g का अक्षांश के साथ परिवर्तन

आप जानते हैं कि पृथ्वी अपने अक्ष पर घूमती है। इसके कारण पृथ्वी की सतह पर प्रत्येक कण वर्तुल गति करता है। गुरुत्वीय बल की अनुपस्थिति में ये सभी कण अपने वृत्तीय पथ पर स्पर्शरेखाओं की दिशाओं में छिटककर दूर जा गिरते। गुरुत्वीय बल इन्हें पृथ्वी के तल के साथ जोड़े रखता है। आप यह भी जानते हैं कि किसी कण को वृत्तीय गति में बनाए रखने के लिए एक अभिकेन्द्र-बल की आवश्यकता होती है। फलत: पृथ्वी की सतह पर रखी वस्तुओं पर लगने वाले पृथ्वी के आकर्षण बल का मान थोड़ा-थोड़ा कम हो जाता है। वस्तुओं को पृथ्वी से जोड़े रखने वाली शक्ति (गुरुत्वाकर्षण) में धीरे-धीरे कमी आने लगती है। पृथ्वी के घूर्णन का सर्वाधिक प्रभाव भूमध्यरेखा पर महसूस किया जाता है। ध्रुवों पर यह घटकर शून्य हो जाता है। अब हम बगैर व्युत्पन्न किए g के मान में अक्षांश के साथ परिवर्तन के सूत्र को उद्धृत करते है। यदि g_λ, λ अक्षांश पर g के मान को दर्शाता है और g ध्रुवों पर गुरुत्वीय त्वरण का मान हो तो

$$g_\lambda = g - R\omega^2 \cos\lambda, \qquad (5.13)$$

जहाँ पर ω पृथ्वी का कोणीय वेग तथा R इसकी त्रिज्या है। आप आसानी से समझ सकते हैं कि ध्रुवों के लिए $\lambda = 90°$ है। इसलिए ध्रुवों पर $g_\lambda = g$.

उदाहरण 5.3 : अब हम ध्रुवों पर g के मान की गणना करते हैं।

हल : ध्रुवों पर पृथ्वी की त्रिज्या = 6357km = 6.357×10^6 m

पृथ्वी का द्रव्यमान = 5.97×10^{24} kg

समी. (5.7) का उपयोग करने पर ध्रुवों पर g का मान होगा

$$g_{poles} = [6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24} / (6.357 \times 10^6)^2]\ \text{m s}^{-2}$$
$$= 9.853\ \text{m s}^{-2}$$

उदाहरण 5.4 : अब हम $\lambda = 60°$ पर g के मान की गणना करते हैं। जहाँ पृथ्वी की त्रिज्या 6371 km है।

हल : पृथ्वी के घूर्णन का आवर्तकाल, T = 24 घंटे = $(24 \times 60 \times 60)$ s

पृथ्वी के घूर्णन की आवृत्ति = 1/T

पृथ्वी की कोणीय आवृत्ति $\omega = 2\pi/T = 2\pi/(24 \times 60 \times 60)$

$$= 7.27 \times 10^{-5}$$

$$\therefore \quad R\omega^2 \cos\lambda = 6.371 \times 10^6 \times (7.27 \times 10^{-5})^2 \times 0.5$$
$$= 0.017\ \text{m s}^{-2}$$

अब चूँकि $\quad g_0 = g - R\omega^2 \cos\lambda,$

g_λ (60° अक्षांश पर) $= 9.853 - 0.017 = 9.836\ \text{m s}^{-2}$

पाठगत प्रश्न 5.3

1. किस ऊँचाई पर जाने पर गुरुत्वीय त्वरण का मान पृथ्वी की सतह के उसके मान का आधा होगा?
2. किस गहराई पर g का मान पृथ्वी की सतह पर इसके मान का 80% होगा?
3. दिल्ली का अक्षांश लगभग 30° उत्तर है। दिल्ली और ध्रुवों के बीच g के मान में अन्तर की गणना कीजिए।
4. एक उपग्रह पृथ्वी से 1000 km की ऊँचाई पर चक्कर लगा रहा है। इस पर कार्य करने वाले गुरुत्वीय त्वरण की गणना (i) सूत्र (5.9) और $g \propto 1/r^2$ का प्रयोग करते हुए करें जहाँ r पृथ्वी के केन्द्र से उपग्रह की दूरी है। आप किस विधि को अधिक अच्छी समझते हैं और क्यों?

5.4 भार और द्रव्यमान

वह बल जिससे कोई वस्तु पृथ्वी की ओर खिंचती है, उसे उसका भार कहते हैं। यदि m वस्तु का द्रव्यमान हो तो भार होगा:

$$W = mg \tag{5.14}$$

चूँकि भार एक बल है, इसकी इकाई न्यूटन होती है। यदि आपका द्रव्यमान 50 kg हो तो आपका भार

$$50 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m s}^{-2} = 490 \text{ N}$$ होगा।

चूँकि g एक स्थान से दूसरे स्थान पर बदलता है, इसलिए एक स्थान से दूसरे स्थान पर जाने पर भार भी बदलता है। ध्रुवों पर भार का मान अधिकतम और भूमध्य रेखा पर न्यूनतम होता है। क्यों? क्योंकि पृथ्वी की त्रिज्या का मान ध्रुवों पर न्यूनतम और भूमध्य रेखा पर अधिकतम होता है।

तथापि, किसी वस्तु का द्रव्यमान अचर रहता है। द्रव्यमान वस्तु का नैज गुणधर्म है। इसलिए, चाहे वस्तु कहीं भी रखी हो इसका मान अचर रहता है।

टिप्पणी: दैनिक जीवन में बहुधा द्रव्यमान और भार को एक दूसरे के स्थान पर प्रयोग करते हैं। स्प्रिंग तुलाऐं जो कि भार नापती हैं, N (न्यूटन) की अपेक्षा kg में अंशांकित की जाती है।

5.4.1 गुरुत्वीय विभव एवं स्थितिज ऊर्जा

किसी संरक्षी बल के प्रभावाधीन पिंड की स्थितिज ऊर्जा को पिंड में निहित ऊर्जा के रुप में परिभाषित कर सकते हैं और यह किसी बाहरी एजेन्सी द्वारा एक मानक स्थिति से वर्तमान स्थिति तक पिंड को लाने में किए गए कार्य के द्वारा मापी जाती है।

यदि कोई बल F पिंड को संरक्षी बल के विरुद्ध बिना किसी चाल परिवर्तन के एक सूक्ष्म दूरी dr तक विस्थापित करे तो इसकी स्थितिज ऊर्जा में होने वाला सूक्ष्म परिवर्तन

$$dU = -F.dr$$

r दूरी पर रखे दो द्रव्यमानों M एवं m के बीच गुरुत्वाकर्षण बल:

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

∴ गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$dU = \frac{GMm}{r^2}dr$$

अथवा
$$U = GMm\int_{\infty}^{r}\frac{1}{r^2}dr = -\frac{GMm}{r}$$

यह दर्शाता है कि r दूरी पर रखे M एवं m द्रव्यमानों के दो कणों के बीच गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा है:

$$U = -\frac{GMm}{r} + \text{ अचरांक}$$

जब r का मान अनन्त होने लगता है गुरुत्वीय ऊर्जा शून्य होने लगती है। अत: अचरांक शून्य हो जाता है और $U = \frac{-GMm}{r}$

गुरुत्वीय विभव (V): M द्रव्यमान के गुरुत्वीय क्षेत्र में किसी बिन्दु पर गुरुत्वीय विभव उसके प्रति इकाई द्रव्यमान के लिए स्थितिज ऊर्जा के रुप में परिभाषित किया जाता है।

$\therefore$ गुरुत्वीय विभव, $V = \frac{U}{m} = -\frac{GM}{r}$

यह अदिश राशि है और इसका SI मात्रक J/kg है।

क्रियाकलाप 5.2

पृथ्वी के केन्द्र से 2R, 3R, 4R, 5R और 6R पर 50 kg द्रव्यमान की वस्तु का भार ज्ञात करें भार और दूरी के बीच एक ग्राफ खीचें। इसी ग्राफ में दूरी के साथ द्रव्यमान में परिवर्तन को भी दर्शाएँ।

द्रव्यमान एंव भार संबंधी अपने विचारों की पुष्टि के लिए निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास करें:

पाठगत प्रश्न 5.4

1. यदि आप चन्द्रमा के धरातल पर उतरते हैं तो आपका भार और द्रव्यमान किस प्रकार प्रभावित होगा?
2. पृथ्वी तथा मंगल पर अपने भार की तुलना कीजिए। आप चन्द्रमा से मंगल में जाते हैं। पृथ्वी की तुलना में आपका भार क्या होगा? आपके का द्रव्यमान पर क्या प्रभाव होगा? मंगल की त्रिज्या $= 4.3 \times 10^6$m और द्रव्यमान $= 6 \times 10^{23}$ kg लीजिए।
3. आपने भार मापने के लिए दो प्रकार की तुलाएं देखी होंगी। पलड़े वाली और स्प्रिंग वाली। पलड़े की तुला में एक ओर भार और दूसरी ओर मापी जाने वाली सामग्री रखी जाती है, जबकि स्प्रिंग तुला में सामग्री को एक हुक की सहायता से लटकाकर एक पैमाने पर इसका मान लिया जाता है। मान लीजिए आप दोनों तुलाओं से आलू के एक बैग को तौलते हैं और उनका मान समान आता है। अब आप यदि चन्द्रमा पर इन्हें ले जाकर तोलें तो क्या इनकी मापों में कोई अंतर आएगा?
4. गुरुत्वीय त्वरण का SI मात्रक बातइए।

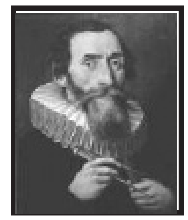
5.5 केपलर के ग्रहीय गति के नियम

प्राचीन समय में ऐसा माना जाता था कि सभी खगोलीय पिण्ड पृथ्वी की परिक्रमा करते हैं। ग्रीक खगोलशास्त्रियों ने इस बात का बड़ा समर्थन किया। पृथ्वी केंन्द्रित ब्रह्माण्ड के पक्ष में इतना प्रबल विश्वास था कि ग्रहों द्वारा सूर्य की परिक्रमा करने के सभी प्रमाणों की उपेक्षा कर दी गई। तथापि, पोलैंड के खगोलशास्त्री – कोपर निकस ने 15वीं शताब्दी में यह सुझाया कि सभी ग्रह सूर्य की परिक्रमा करते हैं। 16वीं शताब्दी में गैलीलियो ने अपने खगोलीय प्रेक्षणों के आधार पर कोपरनिकस के विचारों का समर्थन किया। दूसरे यूरोपीय खगोलशास्त्री टायको

ब्राहे ने ग्रहों की गति के बहुत से प्रेक्षण लिए। इन प्रेक्षणों के आधार पर, उनके सहायक केपलर ने ग्रहीय गति के नियमों को सूत्रबद्ध किया।

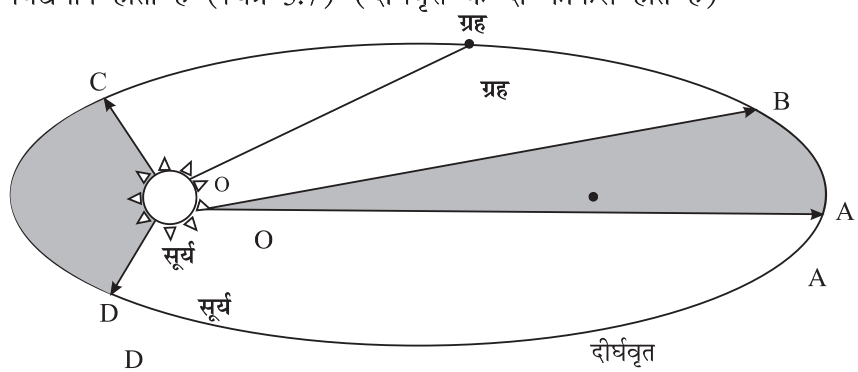
जोहन्स केपलर (1571-1630)

केपलर का जन्म जर्मनी में हुआ। इन्होंने अपनी जीवन वृत्ति खगोलशास्त्र में टायको ब्राहे के सहायक के रुप में प्रारम्भ की। टायको ब्राहे ने विभिन्न ग्रहों की स्थितियों के प्रेक्षण बड़ी लग्न से 20 वर्षों से अधिक अवधि तक नियमित रूप से लिए। उनकी मृत्यु के बाद ये प्रेक्षण केपलर के पास पहुँचे और उन्होंने इनका विश्लेषण करने में 16 वर्ष की अवधि लगाई। इस विश्लेषण के आधार पर केपलर ने ग्रहीय गति के तीन नियम प्राप्त किए जिनका वर्णन इस अध्याय में किया गया है। उन्हें ज्यामितीय-प्रकाशिकी का जन्मदाता माना जाता है क्योंकि ये किरण चित्रों की सहायता से एक दूरदर्शी की कार्य प्रणाली को समझने वाले पहले व्यक्ति थे।



केपलर ने ग्रहों की गति निर्धारित करने वाले तीन नियमों का संरुपण किया:

1. सूर्य के चारों ओर ग्रहों का गति-पथ दीर्घवृत्ताकार होता है और सूर्य इसके किसी एक फोकस पर विद्यमान होता है (चित्र 5.7) (दीर्घवृत्त के दो फोकस होते हैं)



चित्र 5.7: एक ग्रह का सूर्य के चारों ओर परिक्रमा का पथ दीर्घवृत्ताकार होता है, जिसके दो में से एक फोकस पर सूर्य की स्थिति होती है। यदि A से B तक जाने का समय व C से D तक जाने का समय समान हो तो, केपलर के दूसरे नियम के अनुसार क्षेत्रफल AOB और COD बराबर होते हैं?

2. सूर्य से ग्रह तक खींची गयी रेखा (त्रिज्या-सदिश) समान अवधि में समान क्षेत्रफल समाहित करती है (चित्र 5.7)।
3. किसी ग्रह का सूर्य के चारों ओर एक परिक्रमा पूरा करने में लगे समय का वर्ग (परिकमण काल का वर्ग), सूर्य से उस ग्रह की औसत दूरी के घन का अनुक्रमानुपाती होता है। यदि हम परिक्रमण काल को T से दर्शाएं तथा सूर्य से ग्रह की औसत दूरी को r से दर्शाएं, तो

$$T^2 \alpha\, r^3$$

आइये, हम तीसरे नियम को और अधिक बारीकी से समझने की चेष्टा करें। आपको याद होगा कि इस नियम की सहायता से न्यूटन यह निष्कर्ष निकालने में सक्षम हुए थे कि सूर्य और

ग्रहों के बीच लगने वाला बल $1/r^2$ के अनुसार परिवर्तित होता है (उदाहरण 5.1)। पुन: यदि T_1 और T_2 दो ग्रहों के परिक्रमण-काल हों और r_1 और r_2 सूर्य से उनकी औसत दूरियाँ हों तो तीसरे नियम के अनुसार

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \qquad (5.15)$$

आनुपातिकता-स्थिरांक एक ग्रह के संबंध को दूसरे ग्रह के संबंध से भाग देने पर निरस्त हो जाता है। यह एक बहुत महत्वपूर्ण नियम हैं। उदाहरण के तौर पर यदि T_1, r_1 और r_2 ज्ञात हों तो इस नियम की सहायता से T_2 का मान ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 5.5 : बुध का परिक्रमण काल ज्ञात कीजिए, यदि सूर्य से इसकी दूरी 57.9×10^9 m है। आपको दिया गया है कि पृथ्वी की सूर्य से दूरी 1.5×10^{11} m है।

हल : हम जानते हैं कि पृथ्वी का परिक्रमण काल = 365.25 दिन

$\therefore$ $T_1 = 365.25$ दिन, $r_1 = 1.5 \times 10^{11}$ मीटर, $r_2 = 57.9 \times 10^9$ मीटर (बुध के लिए)

तब बुध का परिक्रमण काल T_2 प्राप्त होगा

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{r_1^3}$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{T_1^2 r_2^3}{r_1^3}} = \sqrt{\frac{(365.25)^2 \times (57.9 \times 10^9)^3 \text{m}^3}{(1.5 \times 10^{11})^3 \text{m}^3}} \text{ दिन}$$

$$= 87.6 \text{ दिन}$$

इसी प्रकार आप सूर्य से ग्रहों की दूरी के आधार पर अन्य ग्रहों का परिक्रमण काल निकाल सकते हैं और आप अपनी गणनाओं की जाँच सारणी 5.1 की सहायता से कर सकते हैं:

सारणी. 5.1: सौर प्रणाली के ग्रहों संबंधी आंकड़े

ग्रह का नाम	सूर्य से माध्य दूरी (सूर्य से पृथ्वी की दूरी की तुलना में)	त्रिज्या ($\times 10^3$km)	द्रव्यमान (पृथ्वी की तुलना में)
बुध	0.387	2.44	0.53
शुक्र	0.72	6.05	0.815
पृथ्वी	1.0	6.38	1.00
मंगल	1.52	3.39	0.107
बृहस्पति	5.2	71.40	317.8
शनि	9.54	60.00	95.16
यूरेनस	19.2	25.4	14.50
नेपच्यून	30.1	24.3	17.20
प्लूटो	39.4	1.50	0.002

टिप्पणियाँ

केपलर के नियम किसी भी ऐसे निकाय के लिए प्रयोग किये जा सकते हैं जहाँ उसके अवयवों को बाँधे रखने वाला बल गुरुत्वीय प्रकृति का होता है। उदाहरण के तौर पर वे बृहस्पति एवं इसके उपग्रहों के लिए और पृथ्वी और इसके उपग्रहों जैसे चन्द्रमा और कृत्रिम उपग्रहों पर भी लागू होते हैं।

उदाहरण 5.6 : एक उपग्रह का परिक्रमण काल 1 दिन के बराबर है। जैसा कि आप आगे जानेंगे कि ऐसे उपग्रहों को तुल्यकाली उपग्रह कहते हैं। पृथ्वी की सतह से इसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए। (दिया गया है कि पृथ्वी से चन्द्रमा की दूरी = 60 R_E है, जहाँ स्वयं R_E पृथ्वी की त्रिज्या है और चन्द्रमा का परिक्रमण काल स्थिर तारों के संदर्भ से 27.3 दिन है और पृथ्वी के संदर्भ से जो कि स्वयं सूर्य की परिक्रमा करती है 29.5 है।

हल : एक तुल्यकाली ग्रह का परिक्रमण काल $T_2 = 1$ दिन, चन्द्रमा के लिए $T_1 = 27.3$ दिन और $r_1 = 60\ R_E$, $T_2 = 1$ दिन। अत: समीकरण (5.15) का प्रयोग करने पर,

$$r_2 = \left[\frac{r_1^3 T_2^2}{T_1^2}\right]^{1/3} = \left[\frac{(60^3\ R_E^3)\,1\,(\text{दिन})^2}{(27.3\ \text{दिन})^2}\right]^{1/3} = 6.6\ R_E.$$

याद रखें कि उपग्रह की दूरी पृथ्वी के केन्द्र से मापी जाती है। पृथ्वी की सतह से ऊँचाई ज्ञात करने के लिए, R_E को 6.6 R_E से घटाना पड़ेगा। पृथ्वी की सतह से अपेक्षित दूरी = 5.6 R_E (जहाँ R_E पृथ्वी की त्रिज्या है)। यदि आप इस दूरी को किलोमीटर में प्राप्त करना चाहते हैं तो 5.6 को पृथ्वी की किलोमीटर में मापी गई त्रिज्या से गुणा करें।

5.5.1 ग्रहों का कक्षीय वेग

हम ऊपर ग्रहों के परिक्रमण काल के बारे में बात कर चुके हैं। यदि किसी ग्रह का परिक्रमण काल T और इसकी सूर्य से दूरी r हो तो यह T समय में $2\pi r$ दूरी तय करता है। अत: इसका कक्षीय वेग–

$$v_{\text{कक्षीय}} = \frac{2\pi r}{T} \tag{5.16}$$

कक्षीय वेग का मान प्राप्त करने की एक दूसरी विधि भी है। ग्रह पर लगे अभिकेन्द्र–बल का मान $mv_{\text{कक्षीय}}^2/r$ है, जहाँ m इसका द्रव्यमान है। यह बल सूर्य एवं ग्रह के बीच लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल के द्वारा प्राप्त होता है। यदि M_s सूर्य का द्रव्यमान हो तो ग्रह पर लगने वाला गुरुत्वीय बल $\frac{G\,m\,M_s}{r^2}$ होगा। इन दो बलों की तुलना करने पर, हमें कक्षीय वेग $v_{\text{कक्षीय}}$ का मान प्राप्त होता है।

अर्थात्
$$\frac{mv_{\text{कक्षीय}}^{\ 2}}{r} = \frac{G\,M_s}{r^2},$$

अथवा
$$v_{\text{कक्षीय}} = \sqrt{\frac{G\,M_s}{r^2}} \tag{5.17}$$

ध्यान दीजिए कि उपरोक्त समीकरण में ग्रह का द्रव्यमान सम्मिलित नहीं है। अतः कक्षीय वेग ग्रह के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है। कक्षीय वेग केवल सूर्य से ग्रह की दूरी पर निर्भर करता है। यह भी ध्यान दें कि यदि समीकरण 5.16 से υ का मान (5.17) में प्रतिस्थापित करें तो हमें केपलर का तीसरा नियम प्राप्त होता है।

पाठगत प्रश्न 5.5

1. हमारी आकाश गंगा में बहुत से ग्रहीय निकायों की खोज हो चुकी है। क्या केपलर के नियम उनके लिए भी लागू होंगे?
2. दो कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी की सतह से 1000 km और 2000 km की ऊँचाई पर परिक्रमा कर रहे हैं। इनमें से किसका परिक्रमण काल अधिक होगा? यदि पहले उपग्रह का परिक्रमण काल 90 मिनट हो, तो दूसरे के परिक्रमण काल का मान ज्ञात कीजिए।
3. सौर प्रणाली में एक छोटे से नए पिंड सेडना की खोज हाल में ही हुई है। इसकी सूर्य से दूरी 86 AU है। (एक AU सूर्य से पृथ्वी के बीच की दूरी के बराबर होती है। इसका मान 1.5×10^{11} m के बराबर है। इसके परिक्रमण काल का मान वर्षों में ज्ञात कीजिए।
4. पृथ्वी की परिक्रमा कर रहे एक उपग्रह के कक्षीय वेग के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए।
5. समीकरण (5.16) और (5.17) की सहायता से केपलर का तीसरा नियम प्राप्त करें।

5.6 पलायन वेग

आप जानते हैं कि ऊपर की ओर फेंकी गई गेंद हमेशा वापस पृथ्वी पर आ जाती है। यदि इसे और जोर से ऊपर फेंका जाय तो यह कुछ अधिक ऊँचाई तक जाकर पुनः वापस आ जाती है। आप पूछ सकते हैं कि क्या यह सम्भव है कि कोई ऊपर को फेंकी गयी वस्तु पृथ्वी के आकर्षण प्रभाव क्षेत्र से दूर पहुँच सके? हाँ ऐसा संभव है। हमें इसके लिए वस्तु को एक निश्चित वेग प्रदान करना पड़ेगा, जिसे कि **पलायन वेग** कहते हैं। पृथ्वी के गुरुत्वीय आकर्षण से पूरी तरह बाहर निकल जाने के लिए वस्तु को ऊपर की ओर जितने नयूनतम वेग से फेंके जाने की आवश्यकता होती है, वह पलायन वेग कहलाता है।

यह स्पष्ट है कि पलायन वेग उस पिंड के द्रव्यमान पर निर्भर करता है जिससे वस्तु दूर जाना चाहती है क्योंकि गुरुत्वीय बल द्रव्यमान का समानुपाती है। यह पिंड की त्रिज्या पर भी निर्भर करता है, क्योंकि कम त्रिज्या वाले पिंड का गुरुत्वीय बल अधिक होगा।

पृथ्वी से पलायन वेग निम्न प्रकार सूत्रबद्ध किया गया है।

$$\upsilon_{\text{पलायन}} = \sqrt{\frac{2G\,M}{R}} \qquad (5.18)$$

जहाँ M पृथ्वी का द्रव्यमान और R इसकी त्रिज्या है। इस सूत्र की सहायता से अन्य आकाशीय पिंडों के लिए भी पलायन वेग ज्ञात किया जा सकता है। किसी अन्य ग्रह या खगोलीय पिंड से पलायन वेग की गणना करने के लिए हमें उपरोक्त व्यंजक में उस खगोलीय पिंड के द्रव्यमान तथा त्रिज्या के मान रखने होंगे।

ऐसा नहीं है कि जब किसी वस्तु को पलायन वेग से ऊपर फेंका जाता है तो उस पर गुरुत्व बल नहीं लगता। यह कार्यरत रहता है। वस्तु का वेग और इस पर लगने वाला गुरुत्व बल दोनों वस्तु के सतह से दूर जाने पर कम होने प्रारम्भ हो जाते हैं, और ऐसा होता है कि वस्तु का वेग शून्य होने से पूर्व बल शून्य हो जाता है। अत: वस्तु गुरुत्व के खिंचाव से परे हो जाती है।

अपनी संकल्पना की पुष्टि के लिए निम्न प्रश्नों को समझने का प्रयास करें।

पाठगत प्रश्न 5.6

1. पृथ्वी का द्रव्यमान 5.97×10^{24} kg है और त्रिज्या 6371 km है। पृथ्वी से पलायन वेग की गणना कीजिए।

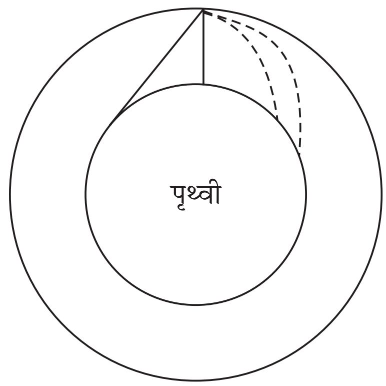
2. मान लीजिए कि पृथ्वी, बिना इसके द्रव्यमान में अंतर आए, अपनी त्रिज्या के 1/4 मान के बराबर सिकुड़ जाती है? इस स्थिति में पलायन वेग क्या होगा?

3. एक काल्पनिक उपग्रह X का द्रव्यमान पृथ्वी का आठ गुना और त्रिज्या पृथ्वी की त्रिज्या की दो गुनी है। इस ग्रह से पलायन वेग, पृथ्वी से पलायन वेग की तुलना में ज्ञात कीजिए।

5.7 कृत्रिम उपग्रह

सिडनी में खेले जा रहे क्रिकेट मैच को भारत वर्ष में देख सकते हैं। अमेरिका में खेले जा रहे टेनिस का खेल भी आप घर बैठे देख लेते हैं। क्या आपने कभी सोचा कि ऐसा कैसे संभव होता है? यह सब पृथ्वी का परिक्रमण कर रहे कृत्रिम उपग्रहों द्वारा संभव होता है। अब आप यह प्रश्न पूछ सकते हैं कि कृत्रिम उपग्रह को कैसे किसी कक्ष में स्थापित किया जाता है?

आप पहले ही प्रक्षेप्य गति के बारे में पढ़ चुके हैं। यदि आप किसी वस्तु को क्षैतिज से एक कोण बनाते हुए फेंके तो इसका पथ परवलयाकार होता है। अब आप बढ़ाते हुए क्रम के बलों द्वारा फेंकी जा रही वस्तुओं की कल्पना करें। इसे चित्र (5.8) द्वारा स्पष्ट किया गया है। प्रक्षेप्य (वस्तुएं) धरती पर वापस आने से पूर्व बड़ी दूरियाँ बढ़ते क्रम में तय करती हैं। अंततोगत्वा, प्रक्षेप्य पृथ्वी के चारों ओर एक कक्ष में प्रवेश करते जाते हैं। याद रखें, ये उपग्रह मानव निर्मित हैं और इन्हें विशेष उद्देश्य को ध्यान में रखते हुए स्थापित किया जाता है। चन्द्रमा पृथ्वी का प्राकृतिक उपग्रह है।



चित्र 5.8: पृथ्वी के परिक्रमण के लिए प्रक्षेप्य

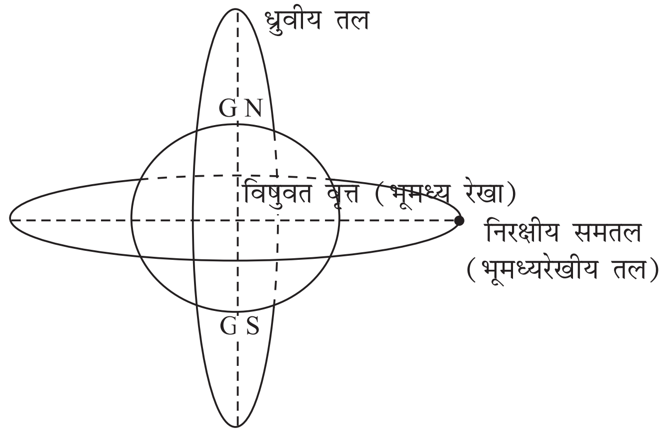
एक उपग्रह को कक्ष में स्थापित करने के लिए पहले उसे लगभग 200 km ऊपर उठाया जाता है और फिर 8 km s^{-1} के वेग से क्षैतिज दिशा में उस पर एक धक्का दिया जाता है। इसे ऊपर इसलिए उठाया जाता है जिससे कि पृथ्वी के वायुमण्डल में घर्षण के कारण ऊर्जा का क्षय न्यूनतम हो सके।

एक कृत्रिम उपग्रह का कक्ष भी केपलर के नियमों का पालन करता है क्योंकि नियामक बल पृथ्वी और उपग्रह के बीच लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल है। उपग्रह का परिक्रमण पथ दीर्घवृत्ताकार होता है और इसका तल हमेशा पृथ्वी के केन्द्र से गुजरता है।

स्मरण रहे कि एक कृत्रिम उपग्रह के कक्षीय वेग का मान पलायन वेग से कम होना चाहिए अन्यथा यह पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र से अलग हो जाएगा और पृथ्वी की परिक्रमा नहीं करेगा। पृथ्वी के निकट उपग्रह के कक्षीय वेग और पलायन वेग के अभिव्यंजक दर्शाते हैं कि

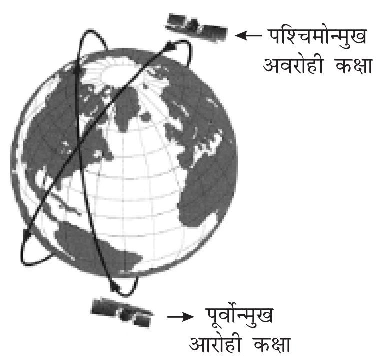
$$v_{\text{कक्षीय}} = \frac{v_{\text{पलायन}}}{\sqrt{2}} \tag{5.19}$$

कृत्रिम उपग्रहों के प्राय: दो प्रकार के कक्ष होते हैं (चित्र 5.9) जो उनको छोड़े जाने के उद्देश्य पर निर्भर करते हैं। दूर संवेदन के कार्यों के लिए उपग्रहों का कक्ष ध्रुवीय होता है इन कक्षों की ऊँचाई लगभग 800 km होती है। यदि कक्ष की ऊँचाई 300 km से कम होती है तो वायुमण्डल में कणों के द्वारा उत्पन्न घर्षण के कारण उपग्रह की ऊर्जा का ह्रास होता है। जिसके कारण यह नीचे आने लगता है जहाँ वायुमण्डल का घनत्व और अधिक है और वहाँ पर यह जल जाता है। ध्रुवीय उपग्रहों का– आवर्तकाल (परिक्रमण काल) लगभग 100 मिनट है। एक ध्रुवीय उपग्रह को सूर्यसमकालिक बनाया जा सकता है ताकि यह प्रतिदिन नियत समय पर एक ही अक्षांश पर पहुँचे। लगातार चक्कर लगाने पर यह सम्पूर्ण पृथ्वी की सूक्ष्म जाँच (scanning) कर सकता है, क्योंकि पृथ्वी अपनी अक्ष पर घूमती है (चित्र 5.10)। इस प्रकार के उपग्रह मौसम संबंधी भविष्यवाणियों के लिए आंकड़े प्राप्त करने, बाढ़, फसलों व जंगल में लगी आग संबंधी जानकारी प्राप्त करने के लिए प्रयोग किये जाते हैं।



चित्र. 5.9: भूमध्यरेखीय तथा ध्रुवीय कक्षाएं

दूरदर्शन संकेतों एंव दूरभाष संकेतों के परावर्तन के लिए उपग्रहों को बहुत ऊँचाई पर भूमध्यरेखीय (विषुवतरेखीय) कक्ष में स्थापित किया जाता है। इन उपग्रहों में अधिकांश भू-समकालिक हैं जिनका परिक्रमण काल पृथ्वी की अपनी धुरी पर घूर्णनकाल काल (24 घंटा) के बराबर होता है। इनकी ऊँचाई 36000 km के लगभग रखी जाती है। चूँकि उनका परिक्रमण काल पृथ्वी के अपने अक्ष पर परिक्रमण काल से मेल खाता है, इसलिए ये एक ही स्थान पर स्थिर दिखाई देते हैं। ऐसे तीन उपग्रहों का संयोजन पूरी पृथ्वी के लिए पर्याप्त हैं और इनके द्वारा पृथ्वी में एक जगह से दूसरी जगह संकेत भेजे जा सकते हैं। चूँकि एक भू-समकालिक उपग्रह हमेशा पृथ्वी में एक ही स्थान का अवलोकन करता है, इसे किसी लंबे समय में विकसित होने वाली घटना के निरीक्षण जैसे तेज आँधी या तूफान आदि का अध्ययन करने के लिए किया जा सकता है।

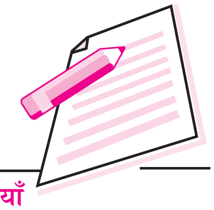


चित्र. 5.10: पृथ्वी की सूक्ष्म जाँच करता हुआ भूसमकालिक उपग्रह

उपग्रहों के उपयोग

मानव के लिए कृत्रिम उपग्रह बहुत उपयोगी हैं। नीचे उनके कुछ उपयोग दिए गए हैं:

1. **मौसम संबंधी भविष्वाणियाँ :** उपग्रह सभी प्रकार के आँकड़े इकट्ठा करते रहते हैं जो कि अल्पकालिक और दीर्घकालिक भविष्वाणियों के विषय में उपयोगी होते हैं। दूरदर्शन या समाचार पत्रों में आप जो मौसम के चार्ट देखते हैं, वे उपग्रह द्वारा



भेजे गए आँकड़ों के आधार पर तैयार किए जाते हैं। भारत जैसे देश जहाँ वर्षा पर काफी कुछ निर्भर करता है, वहाँ पर मानसून संबंधी जानकारी के लिए ये उपग्रह उपयोगी हैं। इसके अलावा हमें बड़े क्षेत्रफल पर फसलों के अस्वस्थ रुझानों, संभावित बाढ़ या जंगल की आग लगने और फैलने संबंधी जानकारियाँ देकर ये हमें सावधान कर सकते हैं।

2. **नौ-संचालन :** कुछ उपग्रहों के संयोजन से किसी स्थान के बारे में बहुत सही जानकारी प्राप्त की जा सकती है। इसका उपयोग, तब किया जा सकता है जब हम रास्ता भटक गये हों और खो गये हों। उपग्रहों की सहायता से बड़े-बड़े भूखण्डों के विस्तृत जानकारी देने वाले मानचित्र बन गये हैं। अन्यथा जिन्हें बनाने में बहुत समय तथा ऊर्जा व्यय होती।

3. **दूरसंचार :** उपग्रहों द्वारा दूरदर्शन रेडियों एंव दूरभाष संकेतों को संसार में किसी भी जगह से कहीं भी भेजा जा सकता है। इससे अब संसार सिमटकर छोटा हो गया लगता है जिसे कभी-कभी ग्लोबल विलेज (वैश्विक गाँव) भी कहा जाता है।

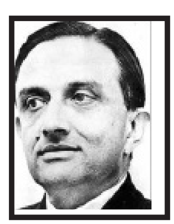
4. **वैज्ञानिक शोध :** उपग्रहों के माध्यम से वैज्ञानिक उपकरणों को अंतरिक्ष में पृथ्वी, चन्द्रमा, उल्काओं, ग्रहों, सूरज, सितारों व आकाशगंगाओं के प्रेक्षण के लिए भेजा जा सकता है। आपने हबल अंतरिक्ष दूरबीन और चन्द्र x- किरण दूरबीन का नाम सुना होगा। अंतरिक्ष में दूरदर्शक यंत्र होने का लाभ यह है कि दूर स्थित वस्तुओं से आने वाले प्रकाश को वायुमण्डल से नहीं गुजरना पड़ता है और इस प्रकार उसकी तीव्रता में मुश्किल से ही कोई कमी आती है। इसलिए हबल दूरदर्शी द्वारा लिए गऐ चित्र अन्य दूरदर्शक (पृथ्वी पर रखे) यंत्रों से अधिक स्पष्ट होते हैं।

   हाल ही में, यूरोपीय वैज्ञानिकों के एक संगठन ने हमारे सौर मण्डल के बाहर 20 प्रकाश वर्ष की दूरी पर एक पृथ्वी के समान ग्रह की उपस्थिति का अवलोकन किया।

5. **सैन्य गतिविधियों का निरीक्षण :** दुश्मन की सैन्य टुकड़ियों की गतिविधियाँ देखने के लिए कृत्रिम उपग्रह बहुत सहायक हैं। कृत्रिम उपग्रह का खर्चा वहन कर सकने में सक्षम लगभग सभी देशों के पास अपने उपग्रह हैं।

विक्रम अंबालाल-साराभाई

(1919-1971)



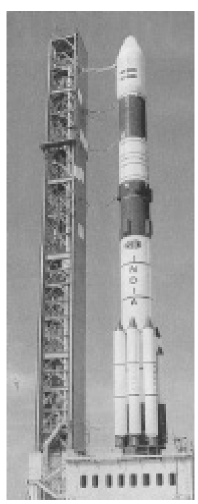
गुजरात प्रांत के अहमदाबाद के एक औद्योगिक परिवार में जन्में श्री विक्रम साराभाई हमेशा के लिए भारतीय विज्ञानियों के प्रेरणाश्रोत बने रहेंगे। उनका महत्वपूर्ण योगदान कॉस्मिक किरणों की सामयिक विविधता से रहा है। आपने अहमदाबाद में भौतिक शोध प्रयोगशाला की स्थापना की और भारतीय अंतरिक्ष अनुसंधान के अग्रदूत रहे। आपने ही सर्वप्रथम यह अनुभव किया कि अंतरिक्ष अनुसंधान के अंतर्गत दूरसंचार, शिक्षा, धातुकीय, रिमोटसेसिंग भूगणित आदि को जोड़ा जाना चाहिए।

5.7.1 भारतीय अंतरिक्ष अनुसंधान संगठन (Indian Space Research Organisation)

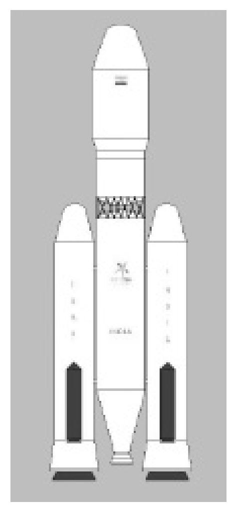
भारत एक बहुत बड़ा और घनी आबादी वाला देश है। यहाँ अधिकतर लोग गाँवों में रहते हैं और मानसून तथा वर्षा पर अत्यधिक आश्रित हैं। इसलिए मौसम का पूर्वानुमान करना सरकार के लिए एक महत्वपूर्ण कार्य है। बड़ी आबादी की संचार आवश्यकताओं की पूर्ति करना भी आवश्यक है। हमारे भूखण्ड पर कई स्थानों पर खनिज, तेल या गैस की उपस्थिति का अन्वेषण नहीं हो पाया है। उपग्रह तकनीक इन सभी समस्याओं का कम खर्चीला समाधान प्रस्तुत करती है। इन सब बातों को ध्यान में रखते हुए भारत सरकार ने 1969 में भारतीय अंतरिक्ष अनुसंधान संगठन (ISRO) की स्थापना की। ISRO ने दूरसंचार, दूरदर्शन, मौसम विज्ञानी सेवाओं, दूर संवेदी एंव वैज्ञानिक अनुसंधान के लिए अंतरिक्ष प्रणाली का विकास करने की दृष्टि से बहुत प्रबल कार्यक्रम का अनुसरण किया। इसने ध्रुवीय एंव भूसमकालिक उपग्रहों को छोड़ने के लिए प्रक्षेपण यानों का सफलता पूर्वक विकास कर लिया है। वास्तव में इसने दूसरे देशों जैसे जर्मनी, बेल्जियम, कोरिया आदि के उपग्रहों का प्रक्षेपण किया है और पाँच देशों के अतिविशिष्ट क्लब में सम्मिलित हो गया है। इसके वैज्ञानिक कार्यक्रम के अंतर्गत

(i) मौसम, पर्यावरण और वैश्विक बदलाव
(ii) ऊपरी वायुमण्डल
(iii) खगोलिकी एंव खगोल भौतिकी, और
(iv) भारतीय समुद्र आदि शामिल हैं।

अब यह चन्द्रमा पर जाने की तैयारी कर रहा है।



चित्र. 5.11: PSLV
(ध्रुवीय उपग्रह प्रक्षेपण यान)



चित्र. 5.12: GSLV
(भूसमकालिक उपग्रह प्रक्षेपण यान)

पाठगत प्रश्न 5.7

1. कुछ वैज्ञानिक लेखक विश्वास करते हैं कि कभी मनुष्य मंगल ग्रह में उपनिवेश स्थापित कर लेंगे। मान लीजिए ऐसा विचार रखने वाले लोग एक मंगल समकालिक उपग्रह को

कक्ष में स्थापित करना चाहते हैं। मंगल का परिक्रमण काल 24.6 घंटा है। इसका द्रव्यमान 6.4×10^{23} kg. एंव त्रिज्या 3400 km है। ऐसे उपग्रह की मंगल की सतह से ऊँचाई कितनी होगी?

2. अंतरिक्ष में दूरदर्शक यंत्र होने के क्या लाभ हैं?

आपने क्या सीखा

- ब्रह्माण्ड में किन्हीं दो कणों (वस्तुओं) के बीच गुरुत्वाकर्षण बल काम करता है। यह बल इन दो कणों (वस्तुओं) के द्रव्यमानों के गुणनफल के समानुपाती तथा उनके बीच की दूरी के वर्ग का व्युत्क्रमानुपाती होता है।
- न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण के नियमों में G एक सार्वत्रिक नियतांक है इसका मान ब्रह्माण्ड में सभी जगह समान रहता है।
- पृथ्वी का गुरुत्वाकर्षण बल सभी वस्तुओं को अपनी ओर खींचता है।
- पृथ्वी की सतह पर गुरुत्वजनित त्वरण g का मान 9.8 m s^{-2} है। g का मान पृथ्वी की सतह पर बदलता है क्योंकि पृथ्वी पूर्ण गोलाकार नहीं है।
- गुरुत्वीय त्वरण का मान ऊँचाई, गहराई और अक्षांश के साथ बदलता है।
- किसी वस्तु पर लगने वाले गुरुत्वीय बल को उसका भार कहते हैं।
- r दूरी द्वारा पृथक्कृत M एवं m द्रव्यमान के दो कणों की स्थितिज ऊर्जा, $V = -\dfrac{GMm}{r}$ होती है।
- केपलर के प्रथम नियमानुसार किसी ग्रह की कक्षा दीर्घ वृत्ताकार होती है और सूर्य इसके किसी एक फोकस पर विद्यमान होता है। केपलर के दूसरे नियमानुसार उपग्रह को सूर्य से जोड़नेवाली रेखा समान समय में समान क्षेत्रफल प्रसर्प (sweep) करती है।
- केपलर के तीसरे नियम के अनुसार किसी ग्रह के परिक्रमण काल का वर्ग ग्रह की सूर्य की माध्य दूरी के तीसरे घात का समानुपाती होता है।
- यदि कोई वस्तु पलायन वेग या इससे अधिक वेग प्राप्त कर ले तो वह पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र से बाहर चली जा सकती है।
- किसी उपग्रह का कक्षीय वेग उसकी पृथ्वी से दूरी पर निर्भर करता है।

पाठांत प्रश्न

1. आप जानते हैं कि गुरुत्वीय आकर्षण पारस्परिक हैं। यदि ऐसा है तो क्या सेब भी पृथ्वी को आकर्षित करता है? यदि, हाँ तो इसके फलस्वरुप पृथ्वी अपना स्थान क्यों नहीं बदलती?
2. हम पृथ्वी की सतह पर एक निश्चित दूरी द्वारा विलगित दो कणों के बीच कार्यकारी गुरुत्वाकर्षण बल का मान ज्ञात करने के लिए एक प्रयोग करते हैं। माना कि यह बल F है। इसी समायोजन को हम चन्द्रमा पर ले जाकर पुन: प्रयोग करते हैं। वहाँ पर दो द्रव्यमानों (कणों) के बीच लगने वाले बल का मान क्या होगा?

3. मान लें कि पृथ्वी बिना द्रव्यमान बदले अपने आकार की दो गुना हो जाती है। तब आपका भार क्या हो जाएगा यदि इस समय आपका भार 500 N है?

4. कल्पना करें कि अचानक पृथ्वी अपना गुरुत्वाकर्षण बल खो देती है। पृथ्वी की सतह पर रहने वाले लोगों पर इसका क्या प्रभाव पड़ेगा?

5. चित्र 5.6 में पृथ्वी की संरचना दिखाई गई है। भूपर्पटी की तली (गहराई 25 km) तथा प्रावार की तली (गहराई 2855kg) पर g के मान की गणना करें।

6. चन्द्रमा के परिक्रमण काल एंव इसकी कक्षा की त्रिज्या के आधार पर पृथ्वी के द्रव्यमान का व्यंजक ज्ञात कीजिए।

7. माना पृथ्वी पर आपका भार 500N है। चन्द्रमा पर आपका भार कितना होगा? चन्द्रमा पर आपका द्रव्यमान कितना होगा?

8. एक ध्रुवीय उपग्रह को पृथ्वी की सतह से 800 km ऊँचाई पर स्थापित किया गया है। इसका परिक्रमण काल व कक्षीय वेग ज्ञात करें।

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

5.1

1. चन्द्रमा का परिक्रमण काल $T = 27.3\text{d}$

$$= 27.3 \times 24 \times 3600 \text{ s}$$

चन्द्रमा की कक्षा की त्रिज्या $R = 3.84 \times 10^8$ m.

चन्द्रमा की कक्षीय चाल $\upsilon = \dfrac{2\pi R}{T}$

अभिकेन्द्र-त्वरण $= \upsilon^2/R$

$$= \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \cdot \frac{1}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 \times 3.84 \times 10^8 \text{m}}{(27.3 \times 24 \times 3600)^2 \text{ s}^2}$$

$$= \frac{4\pi^2 \times 3.84}{(27.3 \times 2.4 \times 3.6)^2} \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$$

$$= .00272 \text{ m s}^{-2}$$

यदि हम g को 3600 से भाग देकर अभिकेन्द्र-त्वरण का मान ज्ञात करें तो हम देखेंगे कि दोनों के मान समान हैं।

$$= \frac{9.8}{3600} \text{ m s}^{-2} = 0.00272 \text{ m s}^{-2}$$

2. $F = \dfrac{G\, m_1\, m_2}{r^2}$

F बल है $\therefore$ $G = \dfrac{\text{बल} \times r^2}{(\text{द्रव्यमान})^2} = \dfrac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

3. $F = G\dfrac{m_1\, m_2}{r^2}$

यदि $m_1 = 1\text{kg.}$, $m_2 = 1\text{kg}$, $r = 1$ m, तब F = G

अथवा G दो एक kg के 1 मीटर की दूरी पर रखे द्रव्यमानों के बीच लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल के बराबर होता है।

4. (i) $F \propto 1/r^2$, यदि r दो गुना कर दिया जाय तो बल एक चौथाई रह जाएगा।

(ii) $F \propto m_1 m_2$, यदि m_1 और m_2 दोनों के मान दो गुना कर दिए जाएं तो F चार गुना हो जाएगा।

(iii) $F \propto \dfrac{m_1\, m_2}{r^2}$,

यदि प्रत्येक द्रव्यमान दो गुना कर दिया जाएं और उनके बीच की दूरी भी दो गुनी कर दी जाएं तो

F अपरिवर्तित रहेगा।

5. $F = G\dfrac{50\text{ kg} \times 60\text{ kg}}{1\text{ m}^2}$; $G = 6.68 \times 10^{-11}\dfrac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

$$= 6.67 \times 10^{-11}\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \times \frac{3000\text{ kg}^2}{1\text{ m}^2} = 6.67 \times 10^{-11} \times 3 \times 10^3\text{ N}$$

$$= 2 \times 10^{-7}\text{ N}$$

5.2

1. $$g = \frac{GM}{R^2} = 6.67 \times 10^{-11}\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\cdot\frac{5.97\times10^{24}\text{kg}}{(6.371\times10^6)^2\text{m}^2} = \frac{6.97\times59.7}{6.371\times6.371}\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$= 9.81\text{ m s}^{-2}$$

2. ध्रुवों पर g का मान

$$g_{\text{pole}} = \frac{GM}{R^2_{\text{pole}}} = 6.67 \times 10^{-11}\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\cdot\frac{5.97\times10^{24}\text{kg}}{(6.371\times10^6)^2\text{m}^2}$$

$$= \frac{6.97\times59.7}{6.371\times6.371}\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 9.81\text{ m s}^{-2}$$

इसी प्रकार:

$$g_{\text{equator}} = \frac{6.97 \times 59.7}{6.378 \times 6.378} \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 9.79 \text{ m s}^{-2}$$

3. प्रत्येक स्थिति में g ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर कार्य करता है। ऐसा हमेशा होता है।

4. $g_{\text{moon}} = 6.67 \times 10^{-11} \dfrac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \times \dfrac{7.3 \times 10^{22} \text{ kg}}{(1.74 \times 10^6)^2 \text{m}^2}$

$$= \frac{6.67 \times 7.3}{1.74 \times 1.74} \times 10^{-1} \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1.61 \text{ m s}^{-2}$$

5.3

1. माना कि r दूरी पर g का मान g_1 है।

   पृथ्वी के बाहर

   तब $\dfrac{g}{g_1} = \dfrac{r^2}{\text{R}^2}$

   यदि $g_1 = g/2 \Rightarrow r^2 = 2R^2 \Rightarrow r = \sqrt{2}\,R = 1.412\,R$

   $\therefore$ पृथ्वी की सतह से ऊँचाई $= 1.4142\,R - R$

   $= 0.4142\,R$

2. पृथ्वी के अन्दर g का मान केन्द्र से दूरी के अनुसार परिवर्तित होता है। माना गहराई d पर g का मान g_d है।

   तब $\dfrac{g_d}{g} = \dfrac{\text{R} - d}{\text{R}}$

   यदि $g_d = 80\%$, तब

   $$\frac{0.8}{1} = \frac{\text{R} - d}{\text{R}}$$

   $\therefore \quad d = 0.2\,R$

3. उदाहरण 5.3 में हमने $\omega = 7.27 \times 10^{-5}$ rad s^{-1} गणना की

   $\therefore \text{R}\omega^2 \cos 30^\circ = 6.37 \times 10^6 \times (7.27 \times 10^{-5})^2 \text{ s}^{-2} . \sqrt{3}/2 = 0.029 \text{ m s}^{-2}$

ध्रुवों पर g अर्थात् $g_{poles} = 9.853 \text{ m s}^{-2}$

(उदाहरण 5.2 में गणना की गई है)

$\therefore$ दिल्ली में $g = 9.853 \text{ m s}^{-2} - 0.029 \text{ m s}^{-2}$

$$= 9.824 \text{ m s}^{-2}$$

4. सूत्र (5.9) का प्रयोग करने पर

$$g_h = \frac{g}{1 + \frac{2h}{R}} = \frac{9.81 \text{ m s}^{-2}}{1 + \frac{2000 \text{ km}}{6371 \text{ km}}}$$

$$= \frac{9.81 \text{ m s}^{-2}}{\frac{28371 \text{ km}}{6371 \text{ km}}} = 7.47 \text{ m s}^{-2}$$

r के साथ परिवर्तन का प्रयोग करने पर

$$g = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

$$= 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5.97 \times 10^{24} \text{kg}}{(7.371 \times 10^6)^2 \text{m}^2}$$

$$= 7.33 \text{ ms}^{-2}$$

यह अधिक सटीक परिणाम देता है क्योंकि सूत्र (5.9) $h << R$ के लिए है। इस मामले में $h << R$ नहीं है।

5.4

1. चन्द्रमा पर g का मान पृथ्वी पर g के मान का 1/6 होता है। अतः आपका भार पृथ्वी की अपेक्षा चन्द्रमा में 1/6 हो जाएगा। द्रव्यमान अपरिवर्तित रहता है।

2. मंगल का द्रव्यमान $= 6 \times 10^{23}$ kg

   मंगल की त्रिज्या $= 4.3 \times 10^6$ m

$$\therefore \quad g_{\text{Mars}} = G\frac{M}{R^2} = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{6 \times 10^{23} \text{kg}}{(4.3 \times 10^6)^2 \text{m}^2} = 2.16$$

$$\frac{\text{मंगल का भार}}{\text{पृथ्वी का भार}} = \frac{m.2.16}{m.9.81} = 0.22$$

अतः मंगल ग्रह में आपका भार पृथ्वी पर आपके भार का लगभग एक चौथाई हो जाता है। द्रव्यमान समान रहता है।

टिप्पणियाँ

3. दो पलड़ों वाली तुला वास्तव में दोनों द्रव्यमानों की तुलना करती है क्योंकि g दोनों पलड़ों पर काम करता है और निरस्त हो जाता है। स्प्रिंग तुला भार मापती है। पलड़ों वाली तुला द्वारा चन्द्रमा पर भी मापन किया जा सकता है। लेकिन स्प्रिंग तुला का पाठ्यांक चन्द्रमा पर पृथ्वी की तुलना में 1/6 रह जाएगा।

4. गुरुत्वीय विभव का SI मात्रक $J\,kg^{-1}$ है।

5.5

1. हाँ, जब भी दो वस्तुओं के बीच लगने वाला बल गुरुत्वीय प्रकृति का हो तो केपलर के नियम प्रयोग किए जा सकेंगे।

2. केपलर के तृतीय नियम के अनुसार

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \quad \text{अथवा} \quad T^2 \propto r^3 \Rightarrow T \propto r^{3/2}$$

इसलिए अधिक दूरी पर स्थित उपग्रह का आवर्तकाल अधिक होता है।

माना $T_1 = 90$ मिनट, $r_1 = 1000\text{ km} + 6371\text{ km}$

$$r_2 = 2000\text{ km} + 6371\text{ km}$$

[पृथ्वी के केन्द्र से]

$$\therefore \quad T_2^2 = \frac{T_1^2 . r_2^3}{r_1^3} = (90\text{ min})^2 \left(\frac{8371\text{ km}}{7371\text{ km}}\right)^3$$

$$T_2 = 108.9\text{ min}$$

3. केपलर के तृतीय नियम के अनुसार

$$\frac{T_{earth}^2}{T_{sedna}^2} = \frac{r_{earth}^3}{r_{sedna}^3} \qquad \text{[सूर्य से दूरी]}$$

$T_{earth} = 1$ वर्ष, $r_{earth} = 1$ AU

$$T_{sedna}^2 = \frac{(1\text{वर्ष})^2(86\text{ AU})^3}{(1\text{AU})^3} = (86)^3(\text{वर्ष})^2$$

$\therefore\ T_{sedna} = 797.5$ वर्ष

4. यदि पृथ्वी के केन्द्र से r दूरी पर स्थित m द्रव्यमान के उपग्रह का कक्षीय वेग υ हो तो अभिकेन्द्र बल और गुरुत्वीय बलों की तुलना करने पर

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

जहाँ M पृथ्वी का द्रव्यमान है।

5. समीकरणों (5.16) और (5.17) से

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 . r^3}{GM.}$$

or $T^2 \ \alpha \ r^3$.

5.6

1. $\upsilon_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

$$= \sqrt{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} . \frac{5.97 \times 10^{24} \text{kg}}{6.371 \times 10^6 \ \text{m}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 5.97 \times 10}{6.371}} \ 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

$$= 11.2 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} = 11.3 \text{ km s}^{-1}$$

2. $\upsilon_{esc} \ \alpha \ \sqrt{\frac{1}{R}}$

यदि R 1/4R हो, तो υ_{esc} का मान दो गुना हो जाएगा।

3. $\upsilon_{esc} \ \alpha \ \sqrt{\frac{M}{R}}$

यदि M 8 गुना हो जाय और R दो गुना हो जाए तो

$\upsilon_{esc} \ \alpha \ \sqrt{4} = 2$ गुना हो जाएगा।

5.7

1. $(R+h)\dfrac{4\pi^2}{T^2}=\dfrac{GM}{(R+h)^2}$

$$\Rightarrow (R+h)^3=\frac{GM}{4\pi^2}\ T^2=\frac{6.67\times10^{-11}\times6.4\times10^{23}\times(14.6\times3600)^2}{4\times(3.14)^2}$$

$$=8370\times10^{18}\ \text{m}$$

$$R+h=20300\ \text{km}$$

$$h=26900\ \text{km}$$

2. (a) प्रतिबिंब ज्यादा स्पष्ट बनते हैं:

(b) x-किरण दूरदर्शी आदि भी कार्य करते हैं।

पाठांत प्रश्नों के उत्तर

3. 125 N

5. □ g, 5.5 m s^{-2}

7. भार $=\dfrac{500}{6}$ N, द्रव्यमान चन्द्रमा पर भी 50 kg ही रहेगा।

8. T □ $1\dfrac{1}{2}$ h, $v=7.47$ km s^{-1}

6

कार्य, ऊर्जा और शक्ति

आप जानते हैं कि वस्तु में गति लगाए गए बल से उत्पन्न होती है और इसका विवरण न्यूटन के गतिविषयक नियमों द्वारा दिया जाता है। आप यह भी जानते हैं कि बल के प्रयोग से वेग का परिमाण एंव दिशा कैसे परिवर्तित होते हैं। इस पाठ में हमने ***कार्य*** और ***ऊर्जा*** की संकल्पनाओं का समावेश किया है। वर्तमान समाज को अनेक प्रकार के कार्य करने के लिए बहुत अधिक ऊर्जा की आवश्यकता होती है। आदि मानव कार्य करने के लिए माँसपेशियों की शक्ति का प्रयोग करता था। बाद में मनुष्य की मदद के लिए पशुओं की ऊर्जा उपयोग में लाई जाने लगी। अनेक प्रकार की मशीनों के आविष्कार के साथ कार्य करने की क्षमता में काफी वृद्धि हुई है। हमारी सभ्यता का विकास कार्य करने में उपयोगी ऊर्जा की उपलब्धता पर निर्भर करता है। अतः ऊर्जा और कार्य इन दोनों का हमारी दुनिया से गहरा संबंध है। इस पाठ में आप कार्य और ऊर्जा का अर्थ समझेगें।

उपरोक्त विवेचन से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि नए साधनों के प्रयोग से, अर्थात् जैसे-जैसे हम मानव से पशु और फिर मशीनों के प्रयोग की ओर उन्मुख हुए, कार्य करने की दर में सुधार हुआ। कार्य करने की दर को ***शक्ति*** कहते हैं।

उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के पश्चात् आप

- *बल द्वारा किए गए कार्य को परिभाषित कर सकेंगे और कार्य के मात्रक बता पाएंगे;*
- *किसी पिंड पर आरोपित बल द्वारा किए गए कार्य की गणना कर सकेंगे;*
- *कार्य ऊर्जा प्रमेय का कथन कर पाएंगे;*
- *किसी तंत्र की शक्ति को परिभाषित कर पाएंगे;*
- *किसी द्रव्यमान के एक स्थान से दूसरे स्थान पर जाने में गुरुत्व द्वारा किए गए कार्य की गणना कर सकेंगे;*
- *ऊर्जा के अर्थ को समझा सकेंगे;*

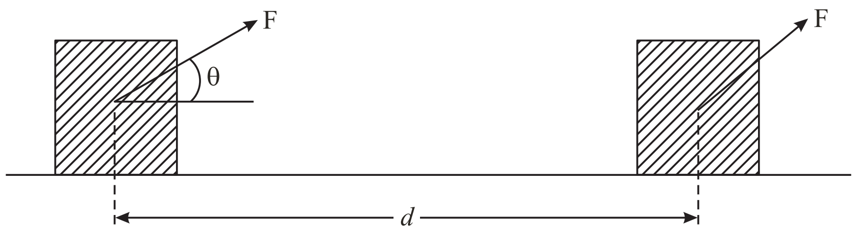
टिप्पणियाँ

- *गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा और प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा के व्यंजक व्युत्पन्न कर पाएंगे?*
- *किसी भौतिक तंत्र के लिए ऊर्जा संरक्षण के सिद्धांतों को लागू कर पाएंगे और*
- *प्रत्यास्थ संघट्टों में ऊर्जा एंव संवेग संरक्षण के सिद्धान्तों को लागू कर पाएंगे।*

6.1 कार्य

कार्य शब्द का अर्थ अलग-अलग व्यक्तियों के लिए अलग-अलग होता है। जब आप अध्ययन करते हैं तो आप मानसिक कार्य करते हैं। जब एक श्रमिक भवन के ऊपरी तलों पर ईटें या सीमेंट ले जाता है तो गुरुत्व के विपरीत शारीरिक कार्य करता है। विज्ञान में कार्य का एक विशेष अर्थ है। कार्य का तकनीकी अर्थ सदैव सामान्य अर्थ जैसा नहीं होता है। कार्य को निम्न भाँति परिभाषित किया जाता है।

माना कि किसी वस्तु पर एक अचर बल F कार्य करता है। जिसके कारण इस वस्तु में क्षैतिज तल पर एक सीधी रेखा की दिशा में विस्थापन d होता है। (चित्र (6.1)। बल द्वारा किया गया कार्य बल के विस्थापन की दिशा में घटक और विस्थापन के गुणनफल के बराबर होता है



चित्र. 6.1 : एक पिंड पर लगा बल F इसे एक क्षैतिज दूरी d के बराबर विस्थापित करता है। बल विस्थापन की दिशा से θ कोण बनाता है।

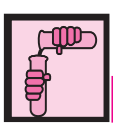
यदि बल $\boldsymbol{F}$ विस्थापन की दिशा से θ कोण बनाता है तो विस्थापन की दिशा में बल का घटक $F\cos\theta$ होता है। तब बल द्वारा किया गया कार्य

$$W = F\cos\theta . d \tag{6.1}$$

सदिश रुप में, किया गया कार्य निम्न सूत्र के अनुसार दिया जाता है।

$$W = \mathbf{F}.\mathbf{d} \tag{6.2}$$

ध्यान दें, यदि $d = 0$ तो $W = 0$ अर्थात्, चाहे लगाए गए बल का परिमाण कितना भी हो यदि वस्तु में कोई विस्थापन नहीं होता है तो बल द्वारा किया गया कुल कार्य शून्य होता है। इस बात पर भी ध्यान दें कि यद्यपि बल और विस्थापन दोनों सदिश राशियाँ हैं, कार्य एक अदिश राशि है।



क्रियाकलाप 6.1

मान लीजिए आप और आपके मित्र एक कमरे की दीवार को खिसकाने का प्रयत्न करते हैं। चाहे आप जितना भी बल लगाएं दीवार नहीं खिसकती। इसका अर्थ यह हुआ कि ऐसी स्थिति में लगाए गए बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है।

कार्य का मात्रक समीकरण (6.2) के द्वारा परिभाषित किया जाता है। यदि आरोपित बल न्यूटन में और विस्थापन मीटर में व्यक्त किया जाए तो कार्य का (मात्रक) जूल होता है।

(बल की इकाई)×(विस्थापन की इकाई) = न्यूटन . मीटर = N m (6.3)

इसको एक विशेष नाम जूल दिया गया है और इसे *J* से व्यक्त करते हैं।

एक जूल, एक न्यूटन बल द्वारा एक मीटर विस्थापन में किए गए कार्य के बराबर होता है। जूल कार्य का SI मात्रक है।

उदाहरण 6.1 : कार्य का विमीय सूत्र ज्ञात कीजिए।

हल : W = बल × विस्थापन

= द्रव्यमान × त्वरण × विस्थापन

∴ कार्य की विमा = $[M] \times [LT^{-2}] \times [L]$

$= [ML^2T^{-2}]$

वैद्युत मापनों में कार्य की इकाई किलोवाट घंटा (kW h) है। इसका जूल के साथ निम्नवत् संबंध है।

$$1\text{kW h} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$$

इसका हम इसी पाठ में अन्यत्र विस्तारपूर्वक अध्ययन करेंगे।

उदाहरण 6.2 : एक वस्तु पर 6N का बल क्षैतिज से 60° का कोण बनाते हुए लगाया गया है। वस्तु को क्षैतिज दिशा में 2 मीटर खिसकाने में हुए कार्य की गणना कीजिए।

हल : समीकरण (6.2) से हम जानते हैं कि

$$W = Fd \cos\theta = 6{\times}2 \times \cos 60^\circ = 6{\times}2 \times (½) = 6 \text{ J}$$

उदाहरण 6.3 : एक व्यक्ति भू तल से 5 kg आलू उठाकर 4m की ऊँचाई के प्रथम तल तक ले जाता है। उसके द्वारा किए गए कार्य की गणना कीजिए।

हल : क्योंकि आलूओं को ऊपर उठाया जा रहा है। अत: व्यक्ति को गुरुत्व के विरुद्ध कार्य करना होता है। हम लिख सकते हैं

व्यक्ति द्वारा लगाया गया बल = mg

$= 5 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m s}^{-2}$

$= 49$ N

अत: उसके द्वारा किया गया कार्य = 49×4 (N m)

$= 196$ J

6.1.1 धनात्मक एवं ऋणात्मक कार्य

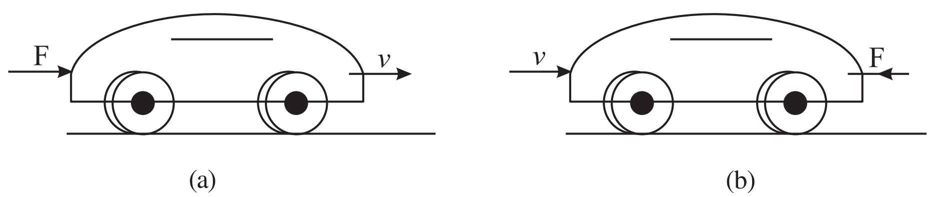
जैसा कि आपने देखा कि किया गया कार्य समीकरण (6.2) द्वारा परिभाषित किया जाता है। जहाँ पर बल और विस्थापन के बीच का कोण θ भी महत्वपूर्ण है। तथ्य यह है कि इसके कारण ऐसी स्थितियाँ उत्पन्न होती हैं जहाँ पर कार्य धनात्मक अथवा ऋणात्मक हो जाता है। नीचे दिये गए उदाहरणों पर विचार कीजिए।

चित्र. 6.2 (a) में कार $+x$ दिशा में गति करती हुई दिखाई गई है और एक बल F उसी दिशा में लगाया गया है। कार की चाल बढ़ती जाती है। बल और विस्थापन दोनों एक ही दिशा में कार्य कर रहे हैं अर्थात् $\theta = 0^o$ इसलिए कार्य

$$W = Fd \cos 0^o$$

$$= Fd \qquad (6.4)$$

इस दशा में कार्य धनात्मक है।



चित्र. 6.2 : एक क्षैतिज सड़क पर चलती हुई कार a) बल F कार की गति की दिशा में कार्य करता है तथा कार की गति में त्वरण उत्पन्न होता है b) बल F कार की गति की दिशा के विपरीत कार्य करता है और कार कुछ दूरी चलने के बाद विराम अवस्था में आ जाती है।

चित्र. 6.2 (b) में कार $+x$ दिशा में गति करती है और इसे रोकने के लिए गति की विपरीत दिशा में बल **F** लगाया गया है। अत: इस स्थिति में $\theta = 180^o$ इसलिए किया गया कार्य

$$W = Fd \cos 180^o.$$

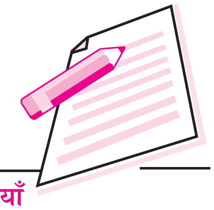
$$= -Fd \qquad (6.5)$$

अत: बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक है। वास्तव में θ के 90^o और 270^o के बीच के मानों के लिए बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है।

ऊपर के उदाहरण से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं:

a) जब हम कार का त्वरित्र (accelerator) दबाते हैं तो कार की गति की दिशा में बल आरोपित होता है। परिणामस्वरूप कार की चाल बढ़ती है। किया गया कार्य धनात्मक होता है।

b) जब कार के ब्रेक इस्तेमाल किए जाते हैं तो गति की विपरीत दिशा में बल लगता है। कार की चाल कम होने लगती है और अंततोगत्वा यह रुक जाती है। इस दशा में कार्य ऋणात्मक होता है।



c) यदि बल और विस्थापन एक दूसरे के लम्बवत हों, अर्थात् $\theta = 90^\circ$ का कोण बनाते हैं तो ऐसी दशा में बल द्वारा कोई कार्य नहीं किया जाता है।

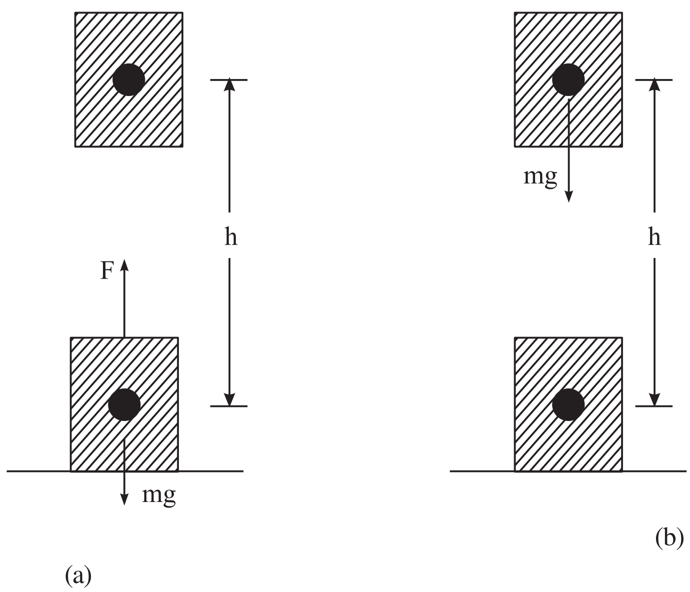
6.1.2 गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य

चित्र.6.3(a) में एक द्रव्यमान m(भार $= mg$) को h ऊँचाई तक उठाया जाता है और चित्र 6.3 (b) में इसी द्रव्यमान को h दूरी तक ही नीचे उतारा जाता है। दोनों स्थितियों में वस्तु का भार mg है। आप पहले पाठ में पाठ में पढ़ चुके हैं कि भार एक बल है।

चित्र. 6.3 (a) में गुरुत्वीय बल mg (जो कि नीचे की ओर लगा है) के विपरीत कार्य किया जा रहा है। यहाँ विस्थापन ऊपर की ओर है ($\theta = 180^\circ$), अतः

$$W = Fd\cos 180^\circ \quad \text{(विस्थापन एवं बल की दिशाएं विपरीत हैं। इसलिए } \theta = 180^\circ\text{)}$$

$$= -\,mgh$$



चित्र. 6.3 : a) वस्तु को गुरुत्वीय बल के विपरीत ऊपर उठाया जा रहा है।
b) वस्तु को पृथ्वी की ओर लाया जा रहा है।

चित्र. 6.3(b) में द्रव्यमान को नीचे लाया जा रहा है। इस स्थिति में बल mg और विस्थापन d एक ही दिशा में हैं ($\theta = 0^\circ$) अतः किया गया कार्य

$$W = Fd\cos 0^\circ$$

$$= +\,mgh \qquad (6.6)$$

टिप्पणी – ऊपर प्राप्त परिणामों की व्याख्या करने में सावधानी बरतनी चाहिए। जब किसी वस्तु को ऊपर उठाया जाता है तो गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक – लेकिन वस्तु को ऊपर उठाने में व्यक्ति द्वारा किया गया कार्य धनात्मक है। जब वस्तु को नीचे लाया जाता

है तो गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य धनात्मक है लेकिन व्यक्ति द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक है। इन दोनों स्थितियों में यह माना गया है कि वस्तु को बिना त्वरण के स्थानान्तरित किया जा रहा है।

पाठगत प्रश्न 6.1

1. जब एक कण वृत्ताकार पथ में चक्कर लगाता है तो उस पर एक बल कार्य करता है। इस बल द्वारा कण पर किए गए कार्य की गणना कीजिए।

2. निम्नांकित में से प्रत्येक के लिए एक उदाहरण दें। जबकि एक बल द्वारा किया जा रहा कार्य
   a) शून्य हो।
   b) ऋणात्मक हो।
   c) धनात्मक हो।

3. एक अनाज के 2 kg के थैले को 5 मीटर ऊँचाई तक उठाया जाता है।
   a) उठाने वाले बल द्वारा कितना कार्य किया जाता है?
   b) गुरुत्वीय बल द्वारा कितना कार्य किया जाता है?

4. एक बल $\mathbf{F} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})$ N द्वारा उत्पन्न विस्थापन $d = (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})$ मीटर है। किए गए कार्य की गणना कीजिए।

5. एक बल $\mathbf{F} = (5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})$ N किसी वस्तु को $\mathbf{d} = (3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}})$ m दूरी विस्थापित करता है।

   a) विस्थापन का परिमाण ज्ञात करें।

   b) बल का परिमाण ज्ञात करें।

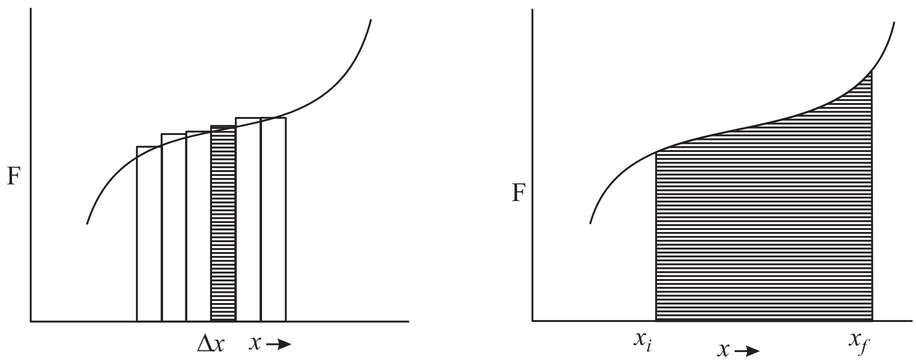
   c) बल द्वारा कितना कार्य किया जाता है?

6.2 परिवर्ती बल द्वारा किया गया कार्य

अभी तक आपने उन प्रकरणों का अध्ययन किया है जिनमें किसी वस्तु पर कार्य करने वाले बल का मान अचर हो। लेकिन हो सकता है सदैव ऐसा न हो। कुछ स्थितियों में कार्य के लिए उत्तरदायी बल समय के साथ बदलता रहता है। अब हम ऐसी स्थिति पर विचार करते हैं जहाँ पर बल का परिमाण F(x) वस्तु की स्थितियों x में परिवर्तन के साथ परिवर्तित होता है। आइए इस परिवर्ती बल के द्वारा किए गए कार्य की गणना करें। यह मान लेते हैं कि विस्थापन में x_i से x_f तक परिवर्तन होता है। जहाँ x_i और x_f वस्तु की प्रारंभिक एंव अंतिम स्थितियाँ हैं।

इस प्रकार की स्थितियों में छोटे-छोटे विस्थापन अंतरालों Δx में बहुत से किए गए कार्यों की गणना की जाती है। दरअसल Δx इतना कम लिया जाता है कि इस अंतराल में $F(x)$ का मान अचर माना जा सके। छोटे विस्थापनों Δx में किया गया कार्य

$$\Delta W = F(x)\, \Delta x \tag{6.7}$$



चित्र. 6.4 : एक परिवर्ती बल F वस्तु को प्रारंभिक स्थिति x_i से अंतिम स्थिति x_f तक विस्थापित करता है। बल का दूरी के साथ विस्थापन (यादृच्छिक) सतत वक्र द्वारा दर्शाया गया है। एक छोटे विस्थापन में किए गए कार्य का अंकित मान चित्र (6.4) में दर्शाया गया क्षेत्रफल $F(x)\Delta x$ है, जिसे चित्र में आच्छादित क्षेत्रफल द्वारा दर्शाया गया है।

x_i तथा x_f के बीच बल द्वारा किया गया कुल कार्य सभी छोटे-छोटे क्षेत्रफलों के योग के बराबर होता है।

$$W = \Sigma \Delta W$$

$$= \Sigma F(x)\, \Delta x \tag{6.8}$$

पट्टी की चौड़ाई को यादृच्छिक रुप से छोटा बनाया जा सकता है जिससे कि इस प्रकार की सभी छोटी-छोटी पट्टियों का क्षेत्रफल एक साथ जोड़ने पर x_i और x_f के बीच घिरे क्षेत्रफल के बराबर होता है। इसकी गणितीय अभिव्यक्ति इस प्रकार की जाती है।

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} F(x)\, \Delta x \tag{6.9}$$

6.2.1 एक स्प्रिंग द्वारा किया गया कार्य

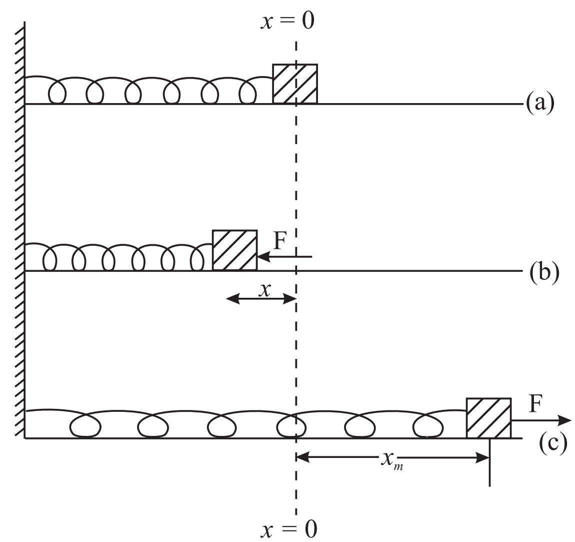
परिवर्ती बल का एक सरल उदाहरण एक स्प्रिंग द्वारा आरोपित बल है। आइए अब हम इस प्रकरण में, किए गए कार्य के लिए, एक व्यंजक व्युत्पन्न करें।

चित्र. 6.5(a) में एक हल्के स्प्रिंग, जिसका एक सिरा एक दृढ़ भित्ति के साथ जुड़ा है और जिसके दूसरे सिरे पर m द्रव्यमान का एक ब्लॉक जुड़ा है, की संतुलन अवस्था को दर्शाया गया है। इस व्यवस्था को एक चिकनी क्षैतिज मेज पर रखा गया है। हम x-अक्ष को क्षैतिज दिशा के अनुदिश ले लेते हैं। माना द्रव्यमान m की स्थिति $x = 0$ है। अब स्प्रिंग को बाह्य बल **F** लगाकर

दबाया (या खींचा) गया। स्प्रिंग के प्रत्यास्थता गुणों के कारण इसमें एक आंतरिक बल $\mathbf{F}_s$ उत्पन्न हो जाऐगा। यह बल $\mathbf{F}_s$, x का मान बढ़ने के साथ बढ़ेगा और जब संपीडन (या दैर्ध्यवृद्धि) का मान अधिकतम, $x = x_m$, होगा तो इसका मान $\mathbf{F}$ हो जाऐगा।

हुक के नियमानुसार (जो केवल x के अल्प मानों के लिए सत्य है) $|\mathbf{F}_s| = kx$, जहाँ k को स्प्रिंग नियतांक कहा जाता है। क्योंकि $\mathbf{F}_s$ की दिशा सदैव संपीडन (या दैर्ध्य वृद्धि) के विपरीत होती है इसकों हम इस प्रकार लिख सकते है।

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_s = -k\mathbf{x} \tag{6.10}$$



चित्र. 6.5 : एक स्प्रिंग-द्रव्यमान निकाय जिसका एक सिरा दृढ़तापूर्वक जुड़ा है और दूसरे सिरे पर एक द्रव्यमान m है। यह तंत्र एक चिकने क्षैतिज तल पर स्थित है। (a) स्प्रिंग के मुक्त सिरे की विरामावस्था $x = 0$ पर है। b) बाह्य बल F लगाकर स्प्रिंग को दबाया जाता है। c) बाह्य बल F लगाकर स्प्रिंग को खींचा जाता है। अधितम संपीडन/दैर्घ्य x_m है।

अब हम किए गए कार्य का मान ज्ञात करते हैं और यह भी जाँच करते हैं कि यह धनात्मक है या ऋणात्मक। संपीडन की घटना में बाह्य बल $\mathbf{F}$ और विस्थापन $\mathbf{x}$ दोनों बाई ओर को है। अत: बाह्य बल द्वारा किया गया कार्य धनात्मक है। लेकिन विस्थापन की समान दिशा के लिए स्प्रिंग में उत्पन्न प्रत्यानयन बल (restoring force) दाई ओर कार्य करता है। अर्थात् $\mathbf{F}$ और $\mathbf{x}$ विपरीत दिशा में हैं। स्प्रिंग बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक है। आप स्प्रिंग के मामले में स्वयं परीक्षण करके इसी निष्कर्ष पर पहुँचेगें। **''बाह्य बल द्वारा किया गया कार्य धनात्मक है लेकिन स्प्रिंग बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक है और इसका परिमाण** $(\frac{1}{2})\ kx_m^2$ **है।''**

एक सरल गणना द्वारा किए गए कार्य के लिए एक व्यंजक प्राप्त किया जा सकता है। $x = 0$, पर $\mathbf{F}_s = 0$, जैसे-जैसे x बढ़ता है, $\mathbf{F}_s$ भी बढ़ता है और $x = x_m$ पर इसका मान $\mathbf{F}$ के बराबर हो जाता है। चूँकि विस्थापन के साथ बल के मान में परिवर्तन रेखीय है। अत: संपीडन (या विस्तार) दोनों स्थितियों में औसत बल का मान लगभग $= \left(\dfrac{0+\mathbf{F}_s}{2}\right) = \dfrac{\mathbf{F}_s}{2}$ है।

बल द्वारा किए गए कार्य का परिमाण W= बल × विस्थापन

$$= \frac{\mathbf{F}_s}{2} \cdot \mathbf{x},$$

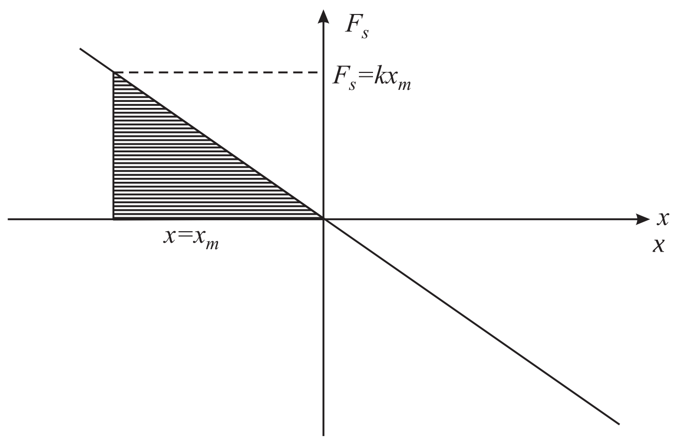
लेकिन $|F_s| = k\,|x_m|$

अत:

$$W = \frac{1}{2} k\, x_m \times x_m$$

$$= \frac{1}{2} k\, x_m^2 \qquad (6.11)$$

किए गए कार्य के मान को आलेखन विधि द्वारा भी प्राप्त किया जा सकता है। यह चित्र. 6.6 में दर्शाया गया है।



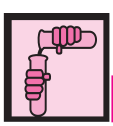
चित्र. 6.6: किया गया कार्य मात्रात्मक रुप से छायाँकित किए गए त्रिभुज के क्षेत्रफल के बराबर होता है।

छायांकित त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई

$$W = \frac{1}{2} x_m \times kx_m$$

$$= \frac{1}{2} kx_m^{\,2} \qquad (6.12)$$

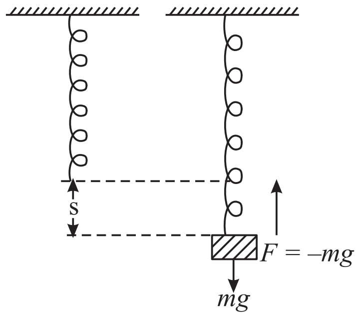
यह विश्लेषणात्मक रुप से प्राप्त समीकरण (6.11) के ही समान है।



क्रियाकलाप 6.2

स्प्रिंग नियतांक का मान ज्ञात करना

एक स्प्रिंग को ऊर्ध्वाधर लटकाएं जैसा कि चित्र 6.7 (a) में दर्शाया गया है। अब स्प्रिंग के निचले सिरे पर एक m द्रव्यमान का गुटका जोड़ दें। ऐसा करने पर स्प्रिंग कुछ दूरी तक खिंचती है।



चित्र. 6.7 : किसी स्प्रिंग की लम्बाई में भार के कारण वृद्धि

इस विस्तार को मापिए। मान लीजिए यह चित्र 6.7 (b) में दर्शाए अनुसार B है। क्योंकि स्प्रिंग बल (प्रत्यानयन बल) जिसकी दिशा ऊर्ध्वारत: ऊपर की ओर है, गुटके के साम्यावस्था में भार mg को संतुलित करता है। आप स्प्रिंग नियताँक का मान इस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं

$$F_s = k.s$$

या $$mg = k.s$$

अत: $$k = \frac{mg}{s} \qquad (6.13)$$

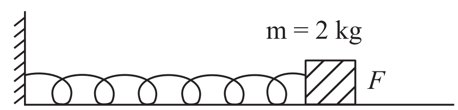
उदाहरण 6.4: एक 2 किलोग्राम द्रव्यमान को एक हल्के स्प्रिंग से जोड़ा जाता है, जिसका स्प्रिंग नियताँक $k = 100\ \text{Nm}^{-1}$ है। स्प्रिंग को 10 cm खींचने में बाह्य बल द्वारा किए कार्य की गणना कीजिए।

हल:

$$W = \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 100 \times (0.1)^2$$

$$= 50 \times 0.01 = 0.5\ \text{J}$$



चित्र. 6.8: एक क्षैतिज सतह पर एक स्प्रिंग के साथ-साथ 2 kg द्रव्यमान जोड़ा गया है।

जैसा कि पहले बताया जा चुका है, स्प्रिंग में प्रत्यानयन बल द्वारा किया गया कार्य = – 0.5 J.

पाठगत प्रश्न 6.2

1. स्प्रिंग नियतांक परिभाषित कीजिए। इसका SI मात्रक लिखिए।
2. 10 N का एक बल, एक स्प्रिंग में 1 cm खिंचाव उत्पन्न करता है। 5 cm खिंचाव उत्पन्न करने के लिए कितने बल की आवश्यकता होगी? इस बल द्वारा कितना कार्य किया जाएगा?

6.3 शक्ति (Power)

आप पहले ही एक बल द्वारा किए गए कार्य की गणना करना सीख चुके हैं। इन गणनाओं में यह विचार नहीं किया कि यह कार्य 1 सेकन्ड में किया गया था या एक घंटे में। लेकिन हमारे दैनिक जीवन में किसी कार्य को करने में लिया गया समय महत्वपूर्ण है। उदाहरण के

तौर पर एक व्यक्ति एक ट्रक में सीमेंट के बोरे लादने में कई घंटों का समय लगा सकता है जबकि मशीन इस कार्य को बहुत कम समय में कर सकती है। इसलिए कार्य करने की दर जानना महत्वपूर्ण है। **कार्य करने की दर को शक्ति कहते हैं।**

यदि Δt समय में ΔW कार्य किया जाता है तो औसत शक्ति को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है।

$$\text{औसत शक्ति} = \frac{\text{किया गया कार्य}}{\text{कार्य करने में लिया गया समय}}$$

गणित की भाषा में हम इसको इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad (6.14)$$

यदि कार्य करने की दर नियत नहीं है तो ऐसी स्थिति में हम तात्क्षणिक शक्ति (Instantaneous Power) को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं।

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \qquad (6.15)$$

शक्ति की परिभाषा हमें शक्ति का SI मात्रक ज्ञात करने में सहायता करती है।

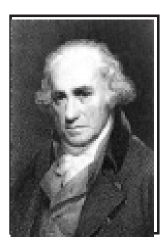
$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$$= \text{जूल/सेकेंड} = \text{वाट}$$

इस प्रकार शक्ति का SI मात्रक वाट है जिसे W से दर्शाया जाता है।

यदि कोई अभिकर्ता 1 सेकंड समय में 1 जूल कार्य करता है तो उसकी शक्ति 1 वाट (1W) होती है। और मेगावाट (M W) हैं। 1 kW = (10^3 W) तथा 1MW = (10^6 W)

जेम्स वाट
(1736–1819)



स्काटलैंड देश के निवासी, आविष्कारक, यांत्रिक अभियंता, जेम्स वाट, वाष्प इंजन की दक्षता में सुधार करने के लिए ख्यातिप्राप्त हैं। इससे औद्योगिक क्रांति का मार्ग प्रशस्त हुआ। उन्होंने शक्ति के मात्रक के रुप में अश्व शक्ति को समाविष्ट किया। उनके सम्मान में शक्ति के SI मात्रक का नाम वाट रखा गया।

जेम्स वाट द्वारा किए गए महत्वपूर्ण आविष्कार है: वाष्पचालित रेल का इंजन, दूरियाँ नापने के लिए दूरदर्शी में लगाया जाने वाला एक संलग्नक (attachment)।

उदाहरण 6.5 : शक्ति की विमाएं ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि

$$\text{शक्ति } P = \frac{\text{कार्य}}{\text{समय}}$$

$$= \text{बल} \times \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

$$\therefore P \text{ की विमाएं} = [\text{द्रव्यमान}] \times [\text{त्वरण}] \times \frac{[\text{दूरी}]}{[\text{समय}]}$$

$$= [\mathrm{M}] \times \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2} \times \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}$$

$$= [\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-3}]$$

आपने बिजली के मिस्त्री को मशीन की शक्ति को अश्व शक्ति के रुप में व्यक्त करते सुना होगा। यह मात्रक ब्रिटिश प्रणाली के अन्तर्गत प्रयोग में लाया जाता था और संक्षेप में इसे *hp* लिखा जाता है। यह शक्ति का एक बड़े परिमाण वाला मात्रक है।

$$1\text{hp} = 746\text{ W} \tag{6.16}$$

शक्ति का मात्रक कार्य (ऊर्जा) के एक नए मात्रक को परिभाषित करने में प्रयोग किया जाता है। ऐसा एक मात्रक किलोवाट घंटा (kilowatt hour) है। इस मात्रक का प्रयोग सामान्यतया विद्युत संबंधी मापनों में किया जाता है।

$$1 \text{ किलोवाट घंटा (kW h)} = 1\text{ kW} \times 1\text{ h}$$

$$= 10^3\text{ W} \times 3600\text{s}$$

$$= \frac{10^3\text{ J}}{1\text{ s}} \times 3600\text{ s}$$

$$= 36{,}00{,}000\text{ J} = 3.6 \times 10^6\text{ J}$$

अथवा

$$1\text{ kW h} = 3.6\text{ MJ (मेगा जूल)} \tag{6.17}$$

घर में खपत हाने वाली बिजली का मापन किलावाट घंटों में किया जाता है। सामान्य आदमी की भाषा में 1kW h(1 किलोवाट घंटा) = एक इकाई बिजली की खपत

पाठगत प्रश्न 6.3

1. एक 100 kg द्रव्यमान की वस्तु को 10 सेकंड में 8 मीटर की ऊँचाई तक उठाया जाता है। उठाने वाले की शक्ति की गणना कीजिए।

2. 10 अश्व शक्ति को किलो वाट में व्यक्त कीजिए।

6.5 कार्य तथा गतिज ऊर्जा

आपको ज्ञात है, कि कार्य करने की क्षमता को ऊर्जा कहते हैं। यदि किसी में ऊर्जा है तो इसका तात्पर्य यह हुआ कि उसमें कार्य करने की क्षमता है। सड़क पर चलने वाली मोटर गाड़ी, ईंधन (सी.एन.जी., पेट्रोल, डीजल) की रासायनिक ऊर्जा का उपयोग करती है। यह अपने सामने आनेवाली वस्तु को कुछ दूरी तक धकेल सकती है। अर्थात् यह कार्य कर सकती है। सभी गतिशील वस्तुओं में ऊर्जा निहित होती है और इसकी सहायता से वे विराम अवस्था में आने से पूर्व कार्य कर सकती हैं। इस प्रकार की ऊर्जा को गतिज ऊर्जा (kinetic energy) कहते हैं। गतिज ऊर्जा किसी वस्तु में उसकी गति के कारण होती है।

आइए, हम एक m द्रव्यमान की वस्तु पर सरल रेखीय गति की दिशा में एक अचर बल F लगाए जाने की स्थिति पर विचार करते हैं। यह बल F एकसमान त्वरण a उत्पन्न करता है, जिसका F से संबंध $F = ma$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। अब माना कि वस्तु की चाल समय t_1 पर υ_1 और समय t_2 पर υ_2 है। इस समय अंतराल $(t_2 - t_1)$ में वस्तु s दूरी तय करती है। गति के समीकरणों का प्रयोग करने पर हम लिख सकते हैं।

$$\upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 + 2as$$

या

$$a = \frac{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}{2s} \qquad (6.18)$$

इस परिणाम को न्यूटन के द्वितीय गति नियम के साथ संयुक्त करने पर हम लिख सकते हैं कि

$$F = m \times \frac{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}{2s}$$

हम जानते हैं कि बल द्वारा किया गया कार्य

$$W = Fs$$

अतः

$$W = m \times \frac{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}{2s} s$$

$$= \frac{1}{2} m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_1^2$$

$$= K_2 - K_1 \qquad (6.19)$$

जहाँ $K_2 = \frac{1}{2} m\upsilon_2^2$ और $K_1 = \frac{1}{2} m\upsilon_1^2$ क्रमशः वस्तु की अंतिम एंव प्रारंभिक गतिज ऊर्जा निर्दिष्ट करते हैं।

$(K_2 - K_1)$ गतिज ऊर्जा में परिवर्तन है जो कि बल द्वारा किए गए कार्य के बराबर है।

गतिज ऊर्जा एक अदिश राशि है (यह द्रव्यमान एवं वेग के वर्ग के गुणनफल पर निर्भर करती है। इससे कुछ अन्तर नहीं आता कि द्रव्यमान एवं वेग में कौन कम या अधिक है। कुल मान $\frac{1}{2} m\upsilon^2$ से ही गतिज ऊर्जा का निर्धारण होता है।

उदाहरण 6.6 : 4.0 m s^{-1} के प्रारंभिक वेग से 10 kg द्रव्यमान की एक वस्तु चल रही है। इस पर 30 N का एक बल 2 सेकन्ड के लिए लगाया जाता है।

i) दो सेकंड के बाद वस्तु का अंतिम वेग क्या होगा?

ii) इस अवधि में कितना कार्य हो जाएगा?

iii) प्रारंभिक गतिज ऊर्जा कितनी है?

iv) अंतिम गतिज ऊर्जा कितनी है?

v) इस अवधि में वस्तु द्वारा कितनी दूरी तय की गई?

vi) दर्शाएं कि किया गया कार्य गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर है।

हल :

i) बल $(F) = ma$

या $a = F/m$

$= 30/10 = 3 \text{ m s}^{-2}$

अंतिम वेग $\upsilon_2 = \upsilon_1 + at$

$= 4 + (3 \times 2)$

$= 10 \text{ m s}^{-1}$

ii) 2 सेकंड में तय की गई दूरी

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 = (4\times2) + \frac{1}{2}(3\times4) = 8 + 6 = 14 \text{ m}$$

∴ किया गया कार्य $W = F \times S$

$= 30 \times 14 = 420 \text{ J}$

iii) प्रारंभिक गतिज ऊर्जा

$$K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(10 \times 16) = 80 \text{ J}$$

iv) अंतिम गतिज ऊर्जा

$$K_2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2$$

$$= \frac{1}{2}(10 \times 100) = 500 \text{ J}$$

v) तय की गई दूरी (जैसी कि ऊपर गणना की जा चुकी है) = 14 मीटर

vi) गतिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$K_2 - K_1 = (500 - 80) = 420 \text{ J}$$

जो कि किए गए कार्य के बराबर है।

कार्य-ऊर्जा प्रमेय

''किसी वस्तु पर लग रहे सभी बलों के परिणामी बल द्वारा किया गया कार्य वस्तु की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है।''

टिप्पणियाँ

पाठगत प्रश्न 6.4

1. क्या किसी कण की गतिज ऊर्जा का मान ऋणात्मक हो सकता है? क्यों?
2. एक कण की गतिज ऊर्जा में क्या परिवर्तन होगा यदि

   a) कण का वेग दो गुना कर दिया जाए?

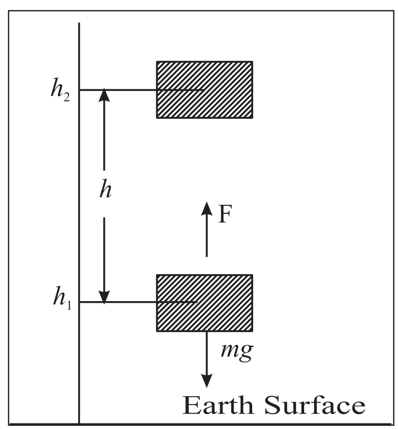
   b) कण का द्रव्यमान m आधा अर्थात् $m/2$ हो जाए?
3. 3.6 J गतिज ऊर्जा से चल रही कोई वस्तु 180 N m^{-1} बल नियताँक के एक स्प्रिंग से संघट्ट करती है। स्प्रिंग में अधिकतम कितना संपीडन होगा?

4- एक 1000 kg द्रव्यमान की कार 90 km h^{-1} की चाल से जा रही है। ब्रेक प्रयोग किए जाने पर कार ब्रेक लगाए गए स्थान से 15 मीटर दूर जाकर रुकती है। रोधकों (breaks) द्वारा लगाया जाने वाला औसत बल कितना है? यदि कार ब्रेक लगाने के बाद 25 सेकंड में रुकती है तो, रोधकों (brakes) की औसत शक्ति की गणना करें।

5. यदि एक बाह्य बल किसी स्प्रिंग के संपीडन में 375 J कार्य करता है तो स्प्रिंग द्वारा स्वंय कितना कार्य किया गया?

6.6 स्थितिज ऊर्जा

हम पिछले अनुच्छेद में यह विवेचन कर चुके हैं कि गतिशील वस्तु में एक ऊर्जा निहित होती है। इस ऊर्जा को **गतिज ऊर्जा** का नाम दिया गया है। वस्तुओं में उनकी स्थिति के कारण भी एक ऊर्जा होती है जिसे **स्थितिज ऊर्जा** कहते हैं। इसका एक चिर परिचित उदाहरण गुरुत्वीय क्षेत्र में वस्तु की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा है। आइए इस ऊर्जा को समझें।



चित्र. 6.9: m द्रव्यमान के पिंड को h_1 से h_2 ऊँचाई तक उठाया गया है।

6.6.1 गुरुत्वीय क्षेत्र में स्थितिज ऊर्जा

माना एक व्यक्ति m द्रव्यमान की किसी वस्तु को भूतल से ऊपर h_1 ऊँचाई से h_2 ऊँचाई पर ले जाता है। हम यह भी मान लेते हैं कि गुरुत्वजनित त्वरण का मान नियत रहता है। द्रव्यमान को गुरुत्वीय बल के विरुद्ध $h = (h_2 - h_1)$ दूरी तक विस्थापित किया गया है। इस बल का परिमाण mg है और यह ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर कार्य कर रहा है। इसलिए व्यक्ति द्वारा किया गया कार्य

$$W = \text{बल} \times \text{दूरी}$$

$$= mgh \qquad (6.20)$$

यह कार्य धनात्मक है और द्रव्यमान m में ऊर्जा के रुप में संचित हो जाता है। किसी वस्तु की दिकस्थान में स्थिति के कारण, उसमें निहित ऊर्जा वस्तु की गुरुत्वीय **स्थितिज ऊर्जा** कहलाती है। इसके कारण वस्तु में कार्य करने की क्षमता रहती है। यदि द्रव्यमान को मुक्त छोड़ दिया जाए तो यह नीचे गिरेगा और इस गिरने की अवधि में इससे कुछ कार्य लिया जा सकता है। उदाहरणतया यदि इसे घिरनी से गुजरती हुई किसी डोरी से एक दूसरे द्रव्यमान के साथ जोड़ दिया जाए तो यह उस दूसरे द्रव्यमान को ऊपर उठा सकती है।

इस विवेचना में प्रारंभिक ऊँचाई h_1 का चयन यादृच्छिक है। महत्वपूर्ण विषय ऊँचाई में परिवर्तन $(h_2 - h_1)$ है। इसलिए हम कहते हैं कि दिक्स्थान में किसी भी बिंदु को शून्य स्थितिज ऊर्जा के संदर्भ बिंदु के रुप मे चुना जा सकता है। सामान्यत: धरातल पर स्थित किसी बिंदु को शून्य स्थितिज ऊर्जा के संदर्भ बिंदु के रुप में लिया जा सकता है।

उदाहरण 6.7 : एक ट्रक में चीनी के बोरे लदे हैं बोरों सहित ट्रक का कुल द्रव्यमान 100,000 kg है। ट्रक एक पहाड़ी पर घुमावदार रास्ते पर ऊपर चढ़ रहा है और 1 घंटे में 700 मीटर ऊँचाई तक जाता है। इस कार्य के लिए इंजन की औसत शक्ति कितनी होनी चाहिए?

हल :

$$W = mgh$$

$$= (100{,}000\ kg) \times (9.8\ \mathrm{m\ s^{-2}} \times 700\ m)$$

$$= 9.8 \times 7 \times 10^7\ \mathrm{J}$$

$$= 68.6 \times 10^7 \mathrm{J}$$

लिया गया समय = 1 घंटा = 60 × 60 सेकंड

= 3600 सेकंड

औसत शक्ति, $P = W/t$

$$= \frac{68.6 \times 10^7\ \mathrm{J}}{3600\ \mathrm{s}}$$

$$= 1.91 \times 10^5\ \mathrm{W}$$

हम जानते हैं कि 746 W = 1 hp (अश्व शक्ति)

$$\therefore \qquad P = \frac{1.91 \times 10^5}{746} = 2.56 \times 10^2 = 256\ hp$$

उदाहरण 6.8 : जल विद्युत उत्पादन में ऊँचाई से गिरते पानी द्वारा टरबाईन की पंखुड़ियों को घुमाकर विद्युत उत्पन्न की जाती है। एक पावर स्टेशन में $1000 \times 10^3\ kg$ पानी एक सेकण्ड में 51 मीटर ऊँचाई से गिरता है।

i) गिरते हुए जल द्वारा किए गए कार्य की गणना कीजिए।

ii) आदर्श स्थितियों में कितनी शक्ति उत्पन्न की जा सकती है?

हल :

i) शीर्ष पर पानी की स्थितिज ऊर्जा = mgh

$$\text{P.E.} = (1000 \times 10^3 \text{ kg}) \times (9.8 \text{ ms}^{-2}) \times (51 \text{ m}).$$
$$= 9.8 \times 51 \times 10^6 \text{ J}$$
$$= 500 \times 10^6 \text{ J}$$

पानी की स्थितिज ऊर्जा में ह्रास होता है और यह टरबाइन की पंखुड़ियों को घुमाने में प्रयोग होती है।

$$W = \text{बल} \times \text{दूरी}$$
$$= mg \times h$$
$$= 1000 \times 10^3 \times 9.8 \times 51 \text{ J}$$
$$= 500 \times 10^6 \text{ J}$$
$$= 500 \text{ M J}$$

ii) प्रति सेकंड किया गया कार्य

$$P = W/t$$
$$= \frac{500 \text{ M J}}{1 \text{ s}}$$
$$= 500 \text{ MW}$$

यहाँ आदर्श स्थितियों से तात्पर्य यह है कि घर्षण बलों के कारण कोई ऊर्जा क्षय नहीं होती। मशीनों में निश्चित रुप से ऊर्जा ह्रास होता है। यह ह्रास कम से कम किए जा सकते हैं लेकिन पूर्ण रुप से खत्म नहीं किए जा सकते हैं।

6.6.2 कमानी (स्प्रिंग) की स्थितिज ऊर्जा

अब आप यह समझ चुके हैं कि किसी स्प्रिंग को संपीडित करने या खींचने के लिए एक बाह्य बल की आवश्यकता होती है। ये स्थितियाँ चित्र 6.5 में दशाई गई हैं। मान लें कि स्प्रिंग का बल नियताँक k है। इस स्प्रिंग को x दूरी के बराबर संपीडित किया जाता है। समीकरण (6.11) की सहायता से बाह्य बल द्वारा स्प्रिंग को संपीडित करने में किया गया कार्य

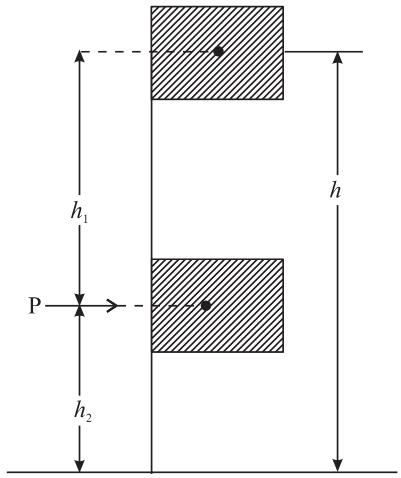
$$W = \frac{1}{2} kx^2$$

यह कार्य स्प्रिंग में प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा के रुप में संचित हो जाता हैं जब स्प्रिंग को मुक्त किया जाता है तो यह झटके के साथ पीछे हटता है और स्प्रिंग में संचित प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा m द्रव्यमान की गतिज ऊर्जा में बदल जाती है।

6.6.3 ऊर्जा का संरक्षण

हम अपने चारों ओर ऊर्जा के अनेक रुप देखते हैं, जिनमें से कुछ हमारे लिए अन्य रुपों की अपेक्षा अधिक जाने पहचाने हैं। उदाहरण के लिए विद्युत ऊर्जा, तापीय ऊर्जा, गुरुत्वीय ऊर्जा, रासायनिक ऊर्जा और नाभिकीय ऊर्जा आदि। इन ऊर्जाओं का एक दूसरे के साथ निकट संबंध

है क्योंकि इनमें से प्रत्येक का अन्य रुपों में परिवर्तन संभव है। ऊर्जा संबंधी एक मूलभूत नियम है: ऊर्जा संरक्षण का सिद्धांत। इसके अनुसार **''एक विलगित निकाय की कुल ऊर्जा सदैव स्थिर रहती है''**। ऊर्जा का रुप परिवर्तित हो सकता है। यह एक रुप से दूसरे रुप में परिवर्तित हो सकती है। लेकिन निकाय की पूरी ऊर्जा सदैव अपरिवर्तित रहती है। एक विलगित निकाय में, यदि एक प्रकार की ऊर्जा का ह्रास होता है तो समान मात्रा में दूसरे प्रकार की ऊर्जा में वृद्धि होती है। अत: ऊर्जा न तो उत्पन्न की जा सकती है और न ही इसका क्षय होता है। हमारा ब्रह्माण्ड भी एक विलगित निकाय है क्योंकि इसके परे कुछ भी नहीं है। इसलिए यह कहा जाता है कि ब्रह्मांड की कुल ऊर्जा सदैव समान रहती है भले ही प्रत्येक क्षण ब्रह्मांड में अनेकों परिवर्तन होते रहते हैं। यह बहुत महत्व का नियम है। इस नियम द्वारा विज्ञान में अनेक नई खोजें हुई हैं और यह नियम कभी गलत नहीं पाया गया।



चित्र. 6.10 : m द्रव्यमान को पृथ्वी की सतह से h ऊँचाई तक उठाया जाता है। वहाँ से यह द्रव्यमान मुक्त रुप से गिर कर h_2 ऊँचाई पर आता है। बिंदु P पर कुल ऊर्जा उच्चतम बिंदु पर ऊर्जा के बराबर है।

एक थर्मल पावर स्टेशन में कोयले की रासायनिक ऊर्जा को विद्युत ऊर्जा में परिवर्तित किया जाता है। विद्युत ऊर्जा मशीनों को चलाती है। इन मशीनों में विद्युत ऊर्जा यांत्रिक ऊर्जा, प्रकाश ऊर्जा और ताप ऊर्जा में परिवर्तित होती है।

ऊर्जा संरक्षण का नियम जितना हम सोचते हैं उससे अधिक व्यापक है। यह बड़े ग्रहों और तारों से लेकर सबसे छोटे नाभिकीय कणों के लिए लागू होता है।

(a) मुक्त रुप से गिरते पिंडों के लिए यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण।

क्योंकि इस समय हमारे विवेचन का विषय यांत्रिक ऊर्जा है, आइए, यांत्रिक ऊर्जा के प्रकरण में ऊर्जा संरक्षण नियम की सत्यता की जाँच मुक्त रुप से गिरते हुए पिंडों के लिए करें।

मान लें कि m द्रव्यमान की एक वस्तु को धरातल से h ऊँचाई तक उठाया जाता है। किया गया कार्य mgh के बराबर हुआ जो कि वस्तु में स्थितिज ऊर्जा के रुप में संचित हो जाता है। अब इस वस्तु को मुक्त रुप से h_1 दूरी के बराबर (शीर्ष से) नीचे गिरने दिया जाता है। अब हम इस वस्तु की ऊर्जा का मान ज्ञात करते हैं। धरातल से वस्तु की ऊचाई $h_2 = h - h_1$ है (चित्र 6. 10)। इस बिंदु पर स्थितिज ऊर्जा $= mgh_2$

जब कोई वस्तु मुक्त रुप से गिरती है तो इसमें त्वरण उत्पन्न होता है और इसकी गति बढ़ती है। हम वस्तु के h_1 दूरी गिर जाने पर प्राप्त वेग की गणना समीकरण

$v^2 = u^2 + 2gs$ के उपयोग से कर सकते हैं। (6.21)

जहाँ s पिंड द्वारा चलित दूरी एवं u इसका प्रारंभिक वेग है। h_1 दूरी गिरने की प्रक्रिया में $u = 0$ एवं $s = h_1$

समी. 6.21 से $\qquad v^2 = 2gh_1$

बिंदु P पर गतिज ऊर्जा होगी

$$\text{K.E} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{m}{2} \times 2gh_1$$

$$= mgh_1 \qquad (6.22)$$

बिंदु P पर कुल ऊर्जा है

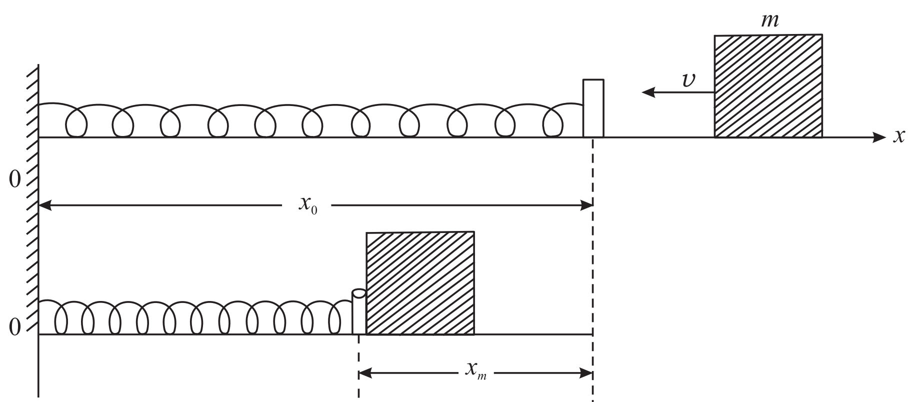
गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा $= mgh_1 + mgh_2 = mgh_1 + mg(h - h_1)$

$$= mgh \qquad (6.23)$$

यह अधिकतम ऊँचाई पर स्थितिज ऊर्जा के बराबर है। **अतः कुल ऊर्जा संरक्षित रहती है।**

(b) एक स्प्रिंग से जुड़े हुए द्रव्यमान के दोलन के लिए यांत्रिक ऊर्जा का संरक्षण

चित्र 6.11 एक चिकने क्षैतिज समतल पर स्थित एक स्प्रिंग को दर्शाता है जिसका एक सिरा दृढ़ दीवार से जुड़ा है और दूसरा सिरा समतल पर रखे एक गुटके के साथ जुड़ा है। स्प्रिंग की विश्रांत अवस्था में इसका मुक्त सिरा x_0 स्थिति में है। स्प्रिंग के अनुदिश एक m द्रव्यमान का गुटका v वेग से आकर इस मुक्त सिरे से टकराता है और इसे x_m स्थिति तक संपीडित कर देता है। यह अधिकतम संपीडन है। स्थिति x_0 पर स्प्रिंग-द्रव्यमान निकाय की कुल ऊर्जा $\frac{1}{2}mv^2$ है जो कि द्रव्यमान की गतिज ऊर्जा है। स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा शून्य है। अधिकतम संपीडन की स्थिति में, स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा $\frac{1}{2}k\,x_m^2$ है और द्रव्यमान की गतिज ऊर्जा शून्य है। अब इस स्थिति में कुल ऊर्जा $\frac{1}{2}k\,x_m^2$ है।



चित्र. 6.11 : एक m द्रव्यमान का गुटका क्षैतिज तल में v वेग से गतिशील है और यह एक स्प्रिंग से टकराता है। स्प्रिंग में अधिकतम संपीडन x_m है।

$$\text{स्पष्टतया}\quad \frac{1}{2}k\,x_m^2 = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (6.24)$$

संघट्ट के पूर्व (गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा) = संघट्ट उपरांत (गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा)

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kx_m^2 \qquad (6.25)$$

अर्थात् कुल ऊर्जा संरक्षित रहती है।

नाभिकीय अभिक्रियाओं में द्रव्यमान-ऊर्जा संरक्षण

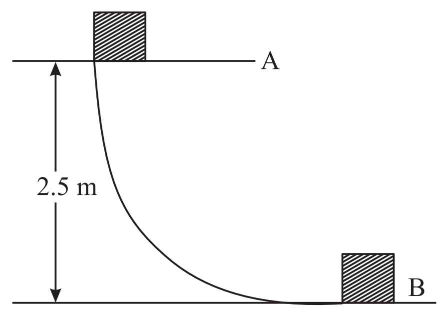
नाभिकीय ऊर्जा अन्य ऊर्जाओं से इस अर्थ में भिन्न है कि यह ऊर्जा के किसी प्रकार के रुपान्तरण से प्राप्त नहीं होती है। इसके विपरीत यह द्रव्यमान के ऊर्जा में रुपान्तरण से उत्पन्न होती है।

अत: नाभिकीय अभिक्रियाओं में द्रव्यमान संरक्षण एवं ऊर्जा संरक्षण के सिद्धांत मिलकर द्रव्यमान – ऊर्जा संरक्षण का नियम बनाते हैं।

उदाहरण 6.9 : एक 0.5 kg द्रव्यमान का गुटका एक चिकने वक्र तल पर फिसलते हुए 2.5 m ऊँचाई से नीचे गिरकर एक क्षैतिज तल पर पहुँच जाता है (चित्र. 6.12)। ऊर्जा-संरक्षण के सिद्धांत पर निम्नलिखित गणनाएं करें

i) बिंदु A पर ऊर्जा और

ii) बिंदु B पर गुटके की चाल।



चित्र. 6.12 : एक गुटका वक्र तल पर फिसलता है। बिंदु A पर कुल ऊर्जा (केवल स्थितिज) बिंदु B पर पूर्ण रुप से गतिज ऊर्जा में बदल जाती है।

हल :

i) A पर स्थितिज ऊर्जा = mgh

$= (0.5) \times (9.8) \times 2.5$ J

$= 4.9 \times 2.5$ J

$= 12.25$ J

बिंदु A पर गतिज ऊर्जा = 0

अत: कुल ऊर्जा = 12.25 J

ii) बिंदु A पर कुल ऊर्जा बिन्दु B पर कुल ऊर्जा के बराबर होनी चाहिए।

बिंदु A पर कुल ऊर्जा (स्थितिज ऊर्जा + गतिज ऊर्जा) = 12.25 J

बिंदु B पर कुल ऊर्जा (स्थितिज ऊर्जा + गतिज ऊर्जा) = $\frac{1}{2}mv^2$

क्योंकि बिंदु B पर स्थितिज ऊर्जा शून्य है और कुल ऊर्जा केवल गतिज ऊर्जा है।

अतः $$\frac{1}{2}mv^2 = 12.25$$

$$v^2 = \frac{12.25 \times 2}{0.5}$$

$$= 12.25 \times 4$$

$$v^2 = 49.00$$

$$v = 7.0 \text{ m s}^{-1}$$

टिप्पणी: यह परिणाम गति के समीकरणों की सहायता से भी प्राप्त किया जा सकता है।

$$v^2 = v_0^2 + 2gx$$

$$= 0 + 2 \times 9.8 \times 2.5$$

$$v^2 = 49$$

$$v = 7 \text{ m s}^{-1}$$

6.5.4 संरक्षी एंव क्षयकारी (असंरक्षी) बल

(a) संरक्षी बल

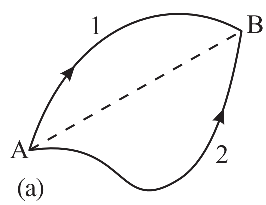
हमने देखा कि एक वस्तु पर लगे हुए गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य वस्तु के भार एंव उसके ऊर्ध्वाधर विस्थापन के गुणनफल के बराबर होता है। यदि किसी वस्तु को गुरुत्वीय बल के अधीन बिंदु A से B की स्थिति में विस्थापित किया जाता है तो किया गया कार्य इन बिंदुओं के बीच ऊर्ध्वाधर दूरी पर निर्भर करता है। यह A से B तक पहुँचने के लिए अपनाए गए पथ पर निर्भर नहीं करता है। जब कोई बल इस नियम का पालन करता है तो उसे संरक्षी बल कहा जाता है।

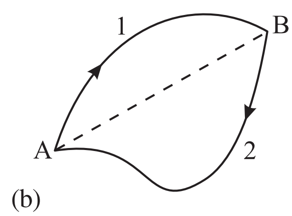
गुरुत्वीय बल, प्रत्यास्थ बल और स्थिर वैद्युत बल संरक्षी बलों के कुछ उदाहरण हैं।

एक संरक्षी बल का गुण यह है कि इसके द्वारा किया गया कार्य पथ पर निर्भर नहीं करता है। चित्र 6.13 (*a*) में

W_{AB} (पथ–1 के अनुदिश) = W_{AB} (पथ–2 के अनुदिश)

चित्र. 6.13 (b) वस्तु की दो स्थितियों को दर्शाता है। वस्तु A से B तक पथ 1 से पहुँचती है और पथ 2 से वापस A पर आ जाती है। परिभाषा के अनुसार एक **संरक्षी बल द्वारा पथ 1 की दिशा मे किया गया कार्य पथ 2 की दिशा में किए गए कार्य के बराबर और विपरीत होता है।**





चित्र. 6.13 :a) वस्तु को A से B तक दो अलग-अलग रास्तों से ले जाया जाता है b) इसे पथ 1 से A से B तक ले जाया जाता है और पथ 2 से B से A तक वापस लाया जाता है।

W_{AB} (पथ 1 के अनुदिश)= – W_{BA} (पथ 2 के अनुदिश)

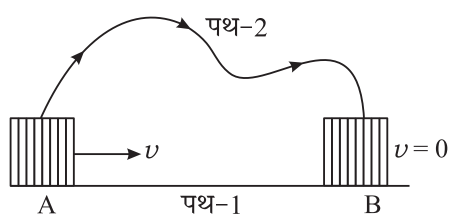
अथवा $$W_{AB} + W_{BA} = 0 \qquad (6.27)$$

इस परिणाम से संरक्षी बल का एक विशिष्ट गुण प्राप्त होता है कि जब कोई वस्तु एक बन्द पथ पर चलती हुई वापस प्रारंभिक बिंदु पर लौट आती है तो संरक्षी बल द्वारा इस पर किया गया कार्य शून्य होता है।

(b) असंरक्षी बल

घर्षण का बल असंरक्षी बल का एक अच्छा उदाहरण है। चित्र 6.14 एक खुरदरे क्षैतिज तल को दर्शाता है। एक m द्रव्यमान का गुटका बिंदु A पर υ चाल से चल रहा है। सीधी रेखा में कुछ दूर चलने पर यह गुटका बिंदु B पर रुकता है। बिंदु A पर गुटके की गतिज ऊर्जा E = $\frac{1}{2}m\upsilon^2$ थी। बिंदु B पर इसमें गतिज या स्थितिज ऊर्जा कुछ भी नहीं है। इसकी सारी ऊर्जा व्यय हो गई है। क्या आप जानते हैं कि यह ऊर्जा कहां गई? इसका रुपान्तरण हो गया है। वस्तु द्वारा घर्षण बलों के विरुद्ध कार्य किया गया या दूसरे शब्दों में घर्षण के बल ने गुटके पर ऋणात्मक कार्य किया। निकाय की गतिज ऊर्जा ताप ऊर्जा में रुपान्तरित हो जाती है। अब समान गतिज ऊर्जा युक्त गुटके को पथ 2 पर A से B की ओर चलाते हैं।

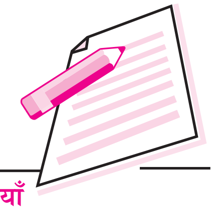
यह हो सकता है कि यह बिंदु B तक न पहुँच पाए। यह बिंदु B पर पहुँचने से बहुत पहले ही रुक सकता है। इसका स्पष्ट अर्थ हुआ कि इस पथ में कुछ और कार्य किए जाने की आवश्यकता है। अत: ऐसी स्थिति में किया गया कार्य पथ पर निर्भर करता है।



चित्र. 6.14: एक गुटका एक खुरदरे क्षैतिज तल में एक सरल रेखीय पथ पर चाल υ से पथ 1 पर चलता है और बिंदु B पर विराम अवस्था में आ जाता है b) में यह समान चाल υ से स्थिति A से चलना प्रारम्भ करता है लेकिन अब दूसरे रास्ते (पथ–2) B पर चल कर पर पहुँचता है।

पाठगत प्रश्न 6.5

1. ABC एक त्रिभुज है जिसमें AB क्षैतिज है और BC ऊर्ध्वाधर है। AB = 3 m., BC = 4 m और AC=5m है। एक 2 kg द्रव्यमान का गुटका A बिंदु पर है। स्थितिज ऊर्जाओं में क्या परिवर्तन होगा यदि गुटके को

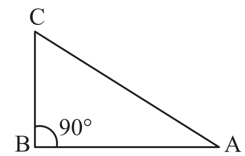


a) A से B तक ले जाया जाए।

b) B से C तक ले जाया जाए।

c) C से A ले जाया जाए।

d) गुरुत्वीय बल द्वारा B से C तक ले जाने के लिए कितना कार्य करना पड़ेगा? (धनात्मक या ऋणात्मक)?



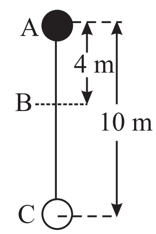
चित्र. 6.15

2. 0.5 kg द्रव्यमान की एक गेंद जमीन से 10 मीटर ऊँचे बिन्दु A पर स्थित है। कार्य ऊर्जा सिद्धांत का प्रयोग करते हुए बतलाइए कि वस्तु को मुक्त रुप से गिरने की अवस्था में

   a) बिंदु B पर गेंद की चाल क्या होगी?

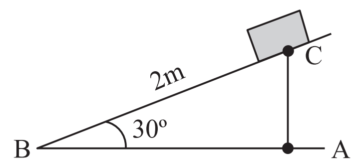
   b) बिंदु C पर गेंद की चाल क्या होगी?

   c) गुरुत्वीय बल द्वारा गेंद को A से C बिंदु पर लाने में कितना कार्य किया जाएगा? (धनात्मक या ऋणात्मक)?



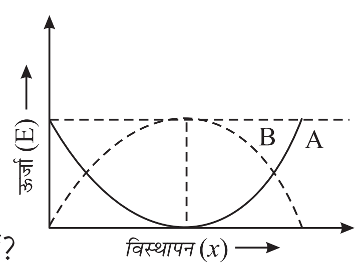
चित्र. 6.16

3. एक आनत तल के शीर्ष से एक गुटका फिसलता है। तल की लंबाई BC = 2 m है और यह क्षितिज से 30° का कोण बनाता है। गुटके का द्रव्यमान 2 kg है। बिंदु B पर गुटके की गतिज ऊर्जा 15.6 J है। असंरक्षी बलों के कारण कितनी स्थितिज ऊर्जा का क्षय होता है? घर्षण बलों का परिमाण क्या है?



चित्र. 6.17

4. चित्र 6.18 में एक साधारण लोलक के गोलक की ऊर्जा E और विस्थापन x के लिए दो वक्र दिये गए हैं। कौन सा वक्र गोलक की स्थितिज ऊर्जा को दर्शाता है और क्यों?



चित्र. 6.18

5. जब किसी निकाय में असंरक्षी बल कार्य करते हैं तो क्या कुल यांत्रिक ऊर्जा स्थिर रहती है?

6.6 प्रत्यास्थ एवं अप्रत्यास्थ संघट्ट

हम दो पिंडों के निकाय पर विचार करते हैं यह एक संवृत्त निकाय है। संवृत्त निकाय से तात्पर्य यह है कि इस पर कोई बाह्य बल कार्य नहीं करता है। यह संवृत निकाय दो गेदें, दो स्प्रिंगों या एक गेंद और एक स्प्रिंग का हो सकता है। जब दो वस्तुएं अन्योन्य क्रिया करती हैं तो इसे संघट्ट कहा जाता है। इसमें कोई बाह्य बल कार्य नहीं करता है।

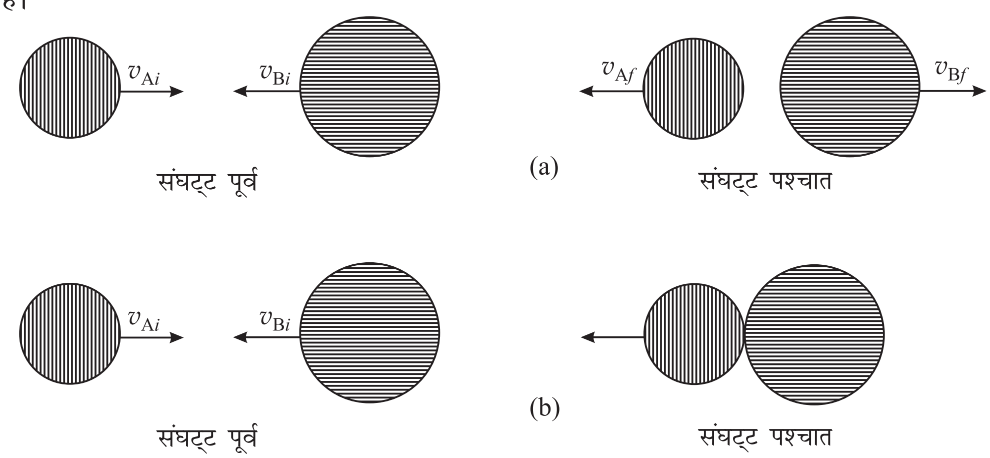
हम दो निकायों के संघट्ट का प्रकरण लेते हैं और विश्लेषण को सरल बनाने के लिए सम्मुख संघट्ट पर विचार करते हैं। इस प्रकार के संघट्ट में निकाय एक दूसरे के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा या इसके समान्तर गति करते हैं। ये संघट्ट दो प्रकार के होते हैं।

(i) पूर्ण प्रत्यास्थ संघट्ट: यदि दो पिण्डों के बीच कार्यकारी बल संरक्षी हों तो निकाय की कुल गतिज ऊर्जा नियत रहती है अर्थात् संघट्ट से पूर्व गतिज ऊर्जा संघट्ट के बाद की गतिज ऊर्जा के बराबर रहती है। इस प्रकार के संघट्टों को पूर्ण प्रत्यास्थ संघट्ट कहा जाता है।

(ii) पूर्ण अप्रत्यास्थ संघट्ट: जब दो संघट्ट करने वाले निकाय संघट्ट के पश्चात आपस में जुड़ जाते हैं और एक इकाई के रुप में चलते हैं तो इस प्रकार के संघट्ट को पूर्ण अप्रत्यास्थ संघट्ट कहते हैं। यह बन्दूक से चली उस गोली की गति के समान है जो लक्ष्य से टकराकर उस ही में धंस जाती है।

6.6.1 प्रत्यास्थ (सम्मुख) संघट्ट

दो गेंदे A और B, जिनके द्रव्यमान क्रमशः m_A और m_B है, सम्मुख संघट्ट करते हैं, चित्र. (6.19)। माना इन गेंदों के संघट्ट के पूर्व वेग υ_{Ai} और υ_{Bi} और संघट्ट के बाद के वेग υ_{Af} और υ_{Bf} है।



चित्र.6.19 : सम्मुख संघट्ट के विन्यास का प्रस्तुतीकरण- (a) प्रत्यास्थ संघट्ट; (b) अप्रत्यास्थ संघट्ट

संवेग संरक्षण एंव गतिज ऊर्जा संरक्षण के नियमों से हम पाते हैं:

संवेग संरक्षण के लिए

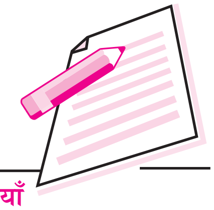
$$m_A\upsilon_{Ai} + m_B\upsilon_{Bi} = m_A\upsilon_{Af} + m_B\upsilon_{Bf} \tag{6.28}$$

गतिज ऊर्जा संरक्षण के लिए

$$\frac{1}{2}m_A\upsilon_{Ai}^2 + \frac{1}{2}m_{Bi}\ \upsilon_{Bi}^2 = \frac{1}{2}m_A\upsilon_{Af}^2 + \frac{1}{2}m_B\upsilon_{Bf}^2 \tag{6.29}$$

यहाँ पर केवल दो अज्ञात राशियाँ (संघट्ट के बाद के वेग) हैं और हमारे पास दो समीकरण हैं (6.28) एंव (6.29)। हल कठिन नहीं है लेकिन लंबा है। अत: हम केवल परिणाम व्यक्त करते हैं।

$$(\upsilon_{Bf} - \upsilon_{Af}) = -(\upsilon_{Bi} - \upsilon_{Ai}) \tag{6.30}$$



टिप्पणियाँ

$$v_{Af} = \frac{2m_B v_{Bi}}{m_A + m_B} + \frac{v_{Ai}(m_A - m_B)}{m_A + m_B} \qquad (6.31)$$

$$v_{Bf} = -\frac{2m_A v_{Ai}}{m_A + m_B} + \frac{(m_B - m_A)\, v_{Bi}}{(m_A + m_B)} \qquad (6.32)$$

अब हम कुछ विशेष स्थितियों का विवेचन करते हैं।

स्थिति I : मान लें संघट्ट करने वाली दो गेंदों के द्रव्यमान समान हैं अर्थात्- $m_A = m_B = m$ तो समीकरण (6.31 और 6.32) के अनुसार

$$v_{Af} = v_{Bi} \qquad (6.33)$$

और

$$v_{Bf} = v_{Ai} \qquad (6.34)$$

अर्थात् दो समान गेंदों के सम्मुख संघट्ट में संघट्ट के पश्चात उनका वेग विनिमय हो जाता है (अर्थात् एक दूसरे से बदल जाते हैं।)

संघट्ट के पश्चात : i) A का वेग B के संघट्ट-पूर्व वेग के समान है।

ii) B का वेग A के संघट्ट-पूर्व वेग के समान है

अब आप विचार करें कि यदि एक गेंद संघट्ट पूर्व स्थिर है, तो क्या होगा:

माना कि B गेंद विराम अवस्था में है

$$v_{Bi} = 0 \text{ तब } v_{Af} = 0 \text{ और } v_{Bf} = v_{Ai}$$

संघट्ट के पश्चात गेंद A स्थिर हो जाती है और गेंद B गेंद A के संघट्ट पूर्व वेग से गति करती है।

इसी प्रकार गेंदों की संघट्ट पश्चात गतिज ऊर्जा के बारे में भी समान निष्कर्ष पर पहुँचा जा सकता है। ($m_A \neq m_B$) की स्थिति में A की ऊर्जा में पूर्ण या आंशिक क्षय का मान B की गतिज ऊर्जा में वृद्धि के बराबर होता है। नाभिकीय रिएक्टरों में न्यूट्रॉनों की गति कम करने में इन सिद्धांतों की अहम भूमिका है।

स्थिति II : दूसरी रोचक स्थिति में जब कि दोनों कण असमान द्रव्यमान के हों

i) हम मान लेते हैं कि m_B, m_A से काफी बड़ा है। कण B प्रारम्भ में विराम अवस्था में है:

$$m_B >> m_A \text{ और } v_{Bi} = 0$$

द्रव्यमान m_B की तुलना में m_A को नगण्य माना जा सकता है। समीकरण (6.31) और (6.32) से हम पाते हैं

$$v_{Af} \approx -v_{Ai}$$

और

$$v_{Bf} \approx 0$$

संघट्ट के पश्चात भारी कण विराम की अवस्था में ही रहता है। और हल्का कण अपने प्रारंभिक वेग से उल्टी दिशा में वापस लौटता है।

ऐसा ही होता है जब एक बच्चा गेंद को दीवार पर मारता है।

इन परिणामों का प्रयोग परमाणु भौतिकी में किया जाता है। उदाहरण के तौर पर α – कण द्वारा भारी नाभिक, जैसे यूरेनियम, पर प्रहार किए जाने के प्रकरण में।

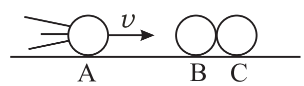
पाठगत प्रश्न 6.6

1 दो सख्त गेंदें एक दूसरे से टकराती हैं जबकि उनमें से एक स्थिर है। क्या संभव है कि –

a) संघट्ट के बाद दोनों गेंदें विराम अवस्था में हों?

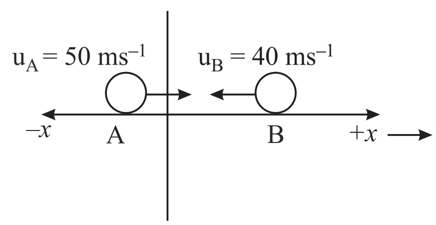
b) क्या यह संभव है कि संघट्ट के बाद उनमें से एक स्थिर रहे?

2. तीन सर्वसम गेंदें A, B, C का निकाय एक सरल रेखीय स्थिति में है जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। B और C जुड़ी हुई हैं और विराम अवस्था में हैं। A गेंद v वेग से चलती हुई B गेंद से टकराती हैं (सम्मुख संघट्ट)। संघट्ट पश्चात A, B और C के अलग-अलग वेग क्या होंगे?



चित्र. 6.20

3. 2 kg द्रव्यमान की गेंद A, + x दिशा में 50 m s^{-1} के वेग से गति करती हुई $-x$ दिशा में 40m s^{-1} के वेग से आती हुई 4 kg द्रव्यमान की गेंद B से सम्मुख संघट्ट करती है। संघट्ट के बाद A और B के वेग क्या हैं? संघट्ट प्रत्यास्थ हैं।



चित्र. 6.21

4. एक 1 kg द्रव्यमान की गोली विराम अवस्था में रखे हुए 1 kg द्रव्यमान के लकड़ी के गुटके से टकराती है और उसमें धंस जाती है। संघट्ट से पूर्व गोली का वेग 90m/s है।

a) संघट्ट के बाद निकाय का वेग क्या है?

b) संघट्ट से पूर्व एंव बाद में गतिज ऊर्जाओं की गणना कीजिए।

c) यह किस प्रकार का संघट्ट है: प्रत्यास्थ या अप्रत्यास्थ?

d) संघट्ट में कितनी ऊर्जा का क्षय हुआ है?

5. दो गेंदों के बीच प्रत्यास्थ संघट्ट में क्या प्रत्येक गेंद की गतिज ऊर्जा संघट्ट के बाद परिवर्तित होती है?

आपने क्या सीखा

- एक नियत बल द्वारा किया गया कार्य

$$W = \mathbf{F.d} = Fd\cos\theta$$

जहाँ θ, F और d के बीच का कोण है। कार्य का मात्रक जूल है। कार्य एक अदिश राशि है।

टिप्पणियाँ

- कार्य का मान मात्रात्मक रुप से F-x के ग्राफ के बीच के क्षेत्रफल के बराबर होता है।
- हुक का नियम पालन करने वाले प्रत्यास्थ बल द्वारा किया गया कार्य $W = \frac{1}{2}kx^2$ होता है। जहाँ k नियतांक है (प्रत्यास्थ पदार्थ स्प्रिंग या तार के लिए) W का चिह्न स्प्रिंग पर कार्य करने वाले बाह्य बल के लिए धनात्मक है और स्प्रिंग के प्रत्यानयन बल द्वारा किए गए कार्य के लिए ऋणात्मक है। x स्प्रिंग का संपीडन या खिंचाव है।
- k की इकाई न्यूटन/मीटर (N m^{-1}) है।
- कार्य करने की दर को शक्ति कहते हैं इसका मात्रक $P = W/t = J/\text{s}$ अर्थात वाट W है।
- किसी निकाय की ऊर्जा दो रुपों में विद्यमान होती है (i) गतिज ऊर्जा और (ii) स्थितिज ऊर्जा।
- v वेग से चलती हुई m द्रव्यमान की वस्तु की गतिज ऊर्जा $\text{E} = \frac{1}{2}mv^2$ होती है। यह एक अदिश राशि है।
- कार्य-ऊर्जा प्रमेय के कथनानुसार सभी बलों द्वारा किया गया कार्य वस्तु की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है।

$$W = K_\text{f} - K_\text{i} = \Delta K$$

- एक संरक्षी बल द्वारा एक कण पर किए गए कार्य का मान कण की यांत्रिक ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है अर्थात् गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जा के योग में परिवर्तन के बराबर। दूसरे शब्दों में संरक्षी बलों के अधीन यांत्रिक ऊर्जा अपरिवर्तित रहती है।

$$\begin{aligned}\Delta E &= (E_\text{f} - E_\text{i})_\text{P} + (E_\text{f} - E_\text{i})_\text{k} \\ &= (\Delta E)_\text{P} + (\Delta E)_\text{k}\end{aligned}$$

- एक संरक्षी बल द्वारा किसी वस्तु पर एक बंद पथ में किया गया कार्य (जबकि वस्तु अपनी प्रारंभिक अवस्था में पहुँच जाती है) शून्य होता है।
- एक संरक्षी बल द्वारा किया गया कार्य पथ पर निर्भर नहीं करता है। यह केवल वस्तु की प्रारंभिक एवं अंतिम स्थितियों पर निर्भर करता है।
- एक असंरक्षी बल द्वारा वस्तु पर किया गया कार्य वस्तु की गति के पथ पर निर्भर करता है। पूर्ण यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित नहीं रहती।
- एक कण की स्थितिज ऊर्जा एक संरक्षी क्षेत्र में उसकी स्थिति के कारण होती है।
- एक संपीडित या तने हुए स्प्रिंग में संचित ऊर्जा प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा कहलाती है। इसका मान $\frac{1}{2}kx^2$ होता है। जहाँ k स्प्रिंग नियतांक एंव x विस्थापन है।
- पृथ्वी की सतह के समीप m द्रव्यमान की किसी वस्तु में संचित ऊर्जा mgh होती है। इसे गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा कहते हैं। यहाँ h ऊर्ध्व दिशा में द्रव्यमान की स्थिति में परिवर्तन है। शून्य स्थितिज ऊर्जा का तल यादृच्छिक है।

- एक विलगित निकाय में एक प्रकार की ऊर्जा का दूसरे प्रकार की ऊर्जा में रुपान्तरण संभव है। लेकिन ऊर्जा को न तो उत्पन्न किया जा सकता है और न ही नष्ट किया जा सकता है। कुल ऊर्जा सदैव अचर रहती है।
- संवेग संरक्षण का नियम किसी भी प्रकार के संघट्ट की स्थिति में लागू होता है।
- प्रत्यास्थ संघट्ट में गतिज ऊर्जा भी संरक्षित रहती है जबकि अप्रत्यास्थ संघट्ट में ऐसा नहीं होता है।

पाठांत प्रश्न

1. यदि दो कणों की गतिज ऊर्जा समान हो तो क्या उनके संवेग भी समन होंगे? समझाइए।
2. एक गतिशील कण एक विराम अवस्था वाले कण से संघट्ट करता है। क्या यह संभव है कि संघट्ट के बाद वे दोनों विराम अवस्था में आ जाएं?
3. क्या किसी तंत्र की कुल यांत्रिक ऊर्जा का मान स्थिर हो सकता है जबकि तंत्र में क्षयी बल लगे हों?
4. एक बच्चा 20 m s^{-1} के वेग से एक गेंद को ऊर्ध्वाधरत: ऊपर की ओर फेंकता है।

   (a) किस बिन्दु पर गतिज ऊर्जा अधिकतम होगी?

   (b) किसी बिंदु पर स्थितिज ऊर्जा अधिकतम होगी?
5. एक 20 m s^{-1} वेग से चलता हुआ 3 kg द्रव्यमान का एक गुटका एक 1200 N m^{-1} बल नियतांक वाले स्प्रिंग से संघट्ट करता है। स्प्रिंग में उत्पन्न हुए अधितम संपीडन का मान ज्ञात कीजिए।
6. प्रश्न 5 में यदि गुटके की गतिज ऊर्जा स्प्रिंग की प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा से दो गुनी हो तो स्प्रिंग का संपीडन कितना होगा?
7. एक विद्युत बल्ब की शक्ति 60W है। 12 घंटा प्रतिदिन के हिसाब से 30 दिन में व्यय हुई विद्युत ऊर्जा का मान ज्ञात करें।
8. 1000 *kg* की पानी प्रति सेकंड 120 मीटर की ऊँचाई से नीचे गिरता है। इस गिरते हुए पानी से विद्युत ऊर्जा उत्पन्न की जाती है। जेनरेटर की शक्ति की गणना कीजिए (ऊर्जा ह्रास शून्य मानकर)
9. 1200 kg की 90 km h^{-1} चाल से जाती हुई कार ब्रेक लगाने पर 3 सेकन्ड में विराम की अवस्था में आ जाती है। गति मंदकों की औसत शक्ति की गणना कीजिए।
10. एक 400 ग्राम की 5 m s^{-1} के वेग से जाती हुई गेंद 600 ग्राम की विराम अवस्था में स्थित गेंद से प्रत्यास्थ संघट्ट करती है। संघट्ट के पश्चात गेंदों की चालों की गणना कीजिए।
11. एक 500 m/s के वेग से जाती हुयी 10 ग्राम की गोली एक 20 kg के लकड़ी के गुटके से टकराकर उसमें धंस जाती है।

(a) संघट्ट के बाद गुटके का वेग ज्ञात कीजिए।

(b) संघट्ट में कितनी ऊर्जा का क्षय होता है?

12. 6 kg की एक वस्तु क्षैतिज तल पर विराम की अवस्था में है। वस्तु पर एक 15N का क्षैतिज बल लगातार लगाया जाता है। वस्तु 10 सेकण्ड में 100 मीटर चलती है

    (a) लगाया गया बल कितना कार्य करता है?

    (b) 10 सेकण्ड के पश्चात ब्लॉक की गतिज ऊर्जा कितनी है?

    (c) घर्षण बलों का परिमाण व दिशा क्या है (यदि कोई है)?

    (d) गति के दौरान कितनी ऊर्जा का ह्रास होता है?

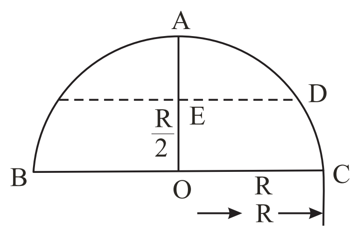
13. A, B, C और D अर्धगोलाकार उल्टे रखे हुए प्याले में चार बिंदु हैं। व्यास BC = 50 cm एक 250g का कण स्थिति A से चिकने तल पर फिसलना शुरु करता है। गणना करें

    (a) B सापेक्ष A बिंदु पर स्थितिज ऊर्जा

    (b) बिंदु B पर चाल (निम्नतम बिंदु)

    (c) बिंदु D पर गतिज एंव स्थितिज ऊर्जा

    क्या आप पाते हैं कि गुटके की यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित रहती है? क्यों?



14. एक स्प्रिंग का बल नियतांक 400N/m है। स्प्रिंग को

    (a) 6.0 cm खींचने में कितना कार्य करना पड़ेगा?

    (b) $x = 4.0$ cm से $x = 6.0$ cm तक खींचने में, जहाँ $x = 0$ स्प्रिंग की शिथिल अवस्था है।

15. एक कार का द्रव्यमान 1000 kg है। यह विराम स्थिति से 3 सेकण्ड में 15 m s^{-1} की गति प्राप्त करती है। गणना करें:

    (a) इंजन की औसत शक्ति

    (b) कार पर इंजन द्वारा किया गया कार्य

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

6.1

1. बल हमेशा कण की गति की दिशा के लम्बवत कार्य करता है। अतः बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होगा?

2. (a) किया गया कार्य शून्य है। (i) जब विस्थापन शून्य है। (ii) जब बल और विस्थापन के बीच का कोण 90° है।

   जब कोई द्रव्यमान क्षैतिज तल में चलता है तो गुरुत्व द्वारा किया कार्य शून्य होता है।

(b) जब एक वस्तु को ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंका जाता है तो गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है।

(c) जब वस्तु आरोपित बल की दिशा में गति करती है तो बल द्वारा किया गया कार्य धनात्मक होता है।

3. (a) $W = mgh = 2 \times 9.8 \times 5 = +98$ J

(b) गुरुत्व द्वारा किया कार्य $= -98$ J

4. $\mathbf{F} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})$ $\quad$ $\mathbf{d} = (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})$

$W = \mathbf{F.d} \qquad = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \cdot (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})$

$-2 + 6 = \mathbf{4}$

5. $\mathbf{F} = (5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})$ $\quad$ $\mathbf{d} = (3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}})$

(a) $|\mathbf{d}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$ m

(b) $|\mathbf{F}| = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} = 5.83$ इकाई

(c) $W = \mathbf{F.d} \qquad = (5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \cdot (3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}})$

$= 15 + 12 = 27$ J

6.2

1. स्प्रिंग नियतांक वह प्रत्यानयन बल है जो एक इकाई विस्थापन उत्पन्न करता है। अतः यह N m^{-1} में मापा जाता है।

2. $k = \dfrac{10\text{N}}{1\text{cm}} = \dfrac{10\text{N}}{1/100\text{m}} = 100$ N m

चूँकि $F = kx$, $x = 50$ cm विस्थापन के लिए किया गया कार्य $F = 100\dfrac{\text{N}}{\text{m}}\ (0.5\text{ m})$

$= 50$ N.

$$W = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times \frac{100\text{N}}{\text{m}} \times \frac{5}{100} \times \frac{5}{100}\ \text{m}^2$$

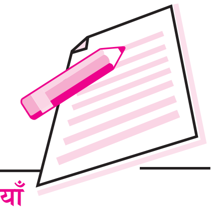
$= 1.25$ N m $= 1.25$ J.

6.3

1. $P = \dfrac{mgh}{t} = \dfrac{(100 \times 9.8 \times 8)}{10s}$ J $= 784$ W.

2. 10 H.P $= (10 \times 746)$ W $= \dfrac{10 \times 746}{1000}$ kW

$= 7.46$ kW



6.4

1. गतिज ऊर्जा = $\frac{1}{2}mv^2$. यह कभी भी ऋणात्मक नहीं होती क्योंकि

   (i) m कभी भी ऋणात्मक नहीं होता

   (ii) v^2 सदैव धनात्मक होता है।

2. (a) गतिज ऊर्जा = $\frac{1}{2}mv^2 = E$

   जब v को $2v$ कर दिया जाता है तो गतिज ऊर्जा 4 गुना अर्थात् $4E$ हो जाती है।

   (b) जब m, $\frac{m}{2}$ हो जाता है तो E, $\frac{E}{2}$ हो जाती है।

3. स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा = $\frac{1}{2}kx^2 = 3.6$ J

$$\therefore \quad x^2 = \frac{2\times 3.6}{k} = \frac{2\times 3.6}{180} = 0.04 \text{ m}$$

और $\quad x = 0.2$ m = 20 cm.

4. $v^2 = u^2 - 2as$, अंतिम वेग शून्य है एंव प्रारम्भिक वेग $\frac{90 \text{ km}}{\text{h}} = 25 \text{m s}^{-1}$

$$\therefore \frac{u^2}{2s} = a = \frac{25\times 25}{2\times 15} = 20.83 \text{ m s}^{-2}$$

$F = ma = 1000 \times 20.83 = 20830$ N.

शक्ति = $\frac{W}{t} = \frac{20830\times 15}{25} = 12498$ W

5. बाह्य बल द्वारा किया गया कार्य = 375 J

   स्प्रिंग द्वारा किया गया कार्य = – 375 J

6.5

1. (a) स्थितिज ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं,

   (b) स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन = $mgh = 2 \times 9.8 \times 4 = 78.4$ J

   (c) स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन = 78.4 J.

   (d) – 78.4 J.

2. (a) स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन = $mgh = 0.5 \times 9.8 \times 4 = 19.6$ J

   बिंदु B पर गतिज ऊर्जा = $\frac{1}{2}mv^2 = 19.6$ J

$$v^2 = \frac{19.6\times 2}{0.5}$$

$v^2 = 78.4 \Rightarrow v = 8.85 \text{ m s}^{-1}$

b) $\upsilon = 14 \text{ m s}^{-1}$

(c) $mgh = 0.5 \times 9.8 \times 10 = 49.0$ J (धनात्मक)

$\quad$ W = +49 J

3. BC = 2मीटर

$$\frac{AC}{BC} = \sin 30^\circ$$

$$AC = BC \sin 30^\circ$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

C से B तक परिवर्तन में स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$= \text{mgh} = 2 \times 9.8 \times 1 \quad = 19.6 \text{ J}$$

लेकिन B बिंदु पर गतिज ऊर्जा = 15.6 J

ऊर्जा ह्रास = 19.6 – 15.6 = 4J

यह ह्रास घर्षण बल के करण होता है।

$4\text{J} = F \times d = F \times 2$

$F = 2\text{N}$

4. जब एक सरल लोलक का गोलक आवर्त गति करता है तो $x = 0$ पर इसकी गतिज ऊर्जा अधिकतम और $x = x_m$ पर शून्य होती है।

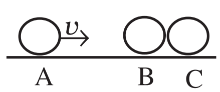
स्थितिज ऊर्जा $x = 0$ पर निम्नतम और $x = x_m$ पर अधिकतम होती है। अत: A स्थितिज ऊर्जा वक्र को दर्शाता है।

5. नहीं।

6.6

1. (a) नहीं, रेखीय संवेग संरक्षण के सिद्धांत के विपरीत है।

(b) हाँ

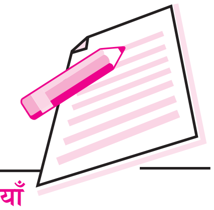
2. 

$\upsilon_A = 0, \upsilon_B = 0, \upsilon_C = \upsilon$

क्योंकि यही स्थिति (i) रेखीय संवेग संरक्षण और (ii) कुल गतिज ऊर्जा संरक्षण की शर्तें पूरी करती है।

3. $$\upsilon_{Af} = \frac{2m_B \upsilon_{Bi}}{m_A + m_B} + \frac{\upsilon_{Ai}(m_A - m_B)}{m_A + m_B}$$

$$= \frac{2 \times 4 \times (-40)}{6} - \frac{50(-2)}{6}$$



टिप्पणियाँ

$$= -\frac{320}{6} + \frac{100}{6}$$

$$= -\frac{220}{6}$$

$$= -35 \text{m s}^{-1}.$$

$$\upsilon_{Bf} = -\frac{2m_A \upsilon_{Ai}}{m_A + m_B} + \frac{(m_B - m_A)\,\upsilon_{Bi}}{(m_A + m_B)}$$

$$= \frac{2 \times 2 \times 50}{6} + \frac{(-40)(4-2)}{6}$$

$$= \frac{200}{6} - \frac{80}{6}$$

$$= \frac{120}{6} \quad = 20 \text{ m s}^{-1}.$$

अतः गेंद A, 35 m s^{-1} के वेग से वापस होती है और गेंद B, 20 m s^{-1} के वेग से आगे जाती है।

4. (a) 1.76 m s^{-1}.

   (b) 81 J and 1.58 J

   (c) अप्रत्यास्थ संघट्ट में

   (d) 79.42 J

5. हाँ, लेकिन दोनों गेंदों की संघट्ट से पहले एंव संघट्ट के बाद कुल ऊर्जा समान रहती है।

पाठांत प्रश्नों के उत्तर

5. 1 m.

6. 0.707 m

7. 21.6 kW

8. 1.2 MW

9. 125 kW

10. $\frac{1}{4}$ m s^{-1}, $\frac{19}{6}$ m s^{-1}

11. (a) $0.25\ \text{m s}^{-1}$

    (b) 1249.4 J

12. (a) 1500 J (b) 1200 J (c) 3 N गति की दिशा के विपरीत (d) 300 J

13. (a) 0.625 J (b) $\sqrt{5}\ \text{m s}^{-1}$ (c) 0.313 J

14. (a) 0.72 J (b) 0.4 J

15. (a) 37.5 kW (b) 1.25×10^5 J

7

दृढ़ पिंड की गति

अभी तक आपने एकल बिंदु द्रव्यमान की गति के विषय में अध्ययन किया। यह सरलीकरण यांत्रिकी के नियमों को समझने के लिये काफी उपयोगी है। लेकिन वास्तविक जीवन में वस्तुएं बहुत से अवयवों से मिलकर बनी होती हैं। एक छोटे से पत्थर के टुकड़े में लाखों कण होते हैं। क्या इस स्थिति में प्रत्येक कण के लिए आप अलग-अलग समीकरण लिखेंगे? इस प्रकार लाखों समीकरणों की आवश्यकता होगी। क्या इसका कोई सरल विकल्प है? इन प्रश्नों के उत्तर ढूँढ़ते समय आप द्रव्यमान केन्द्र और जड़त्व आघूर्ण आदि के बारे में जान सकेंगे। जड़त्व-आधूर्ण घूर्णन गति में वही भूमिका निबाहता है जो द्रव्यमान स्थानान्तरण-गति में निबाहता है।

इसके साथ ही हम भौतिकी की महत्वपूर्ण संकल्पना और बल आघूर्ण एवं कोणीय संवेग के विषय में भी पढ़ेंगे। यदि किसी घूर्णन करने वाले तंत्र पर कोई बाह्य असंतुलित बल आघूर्ण आरोपित नहीं होता, तो इसका कोणीय संवेग संरक्षित रहता है। इस बात की भौतिकी में बहुत उपयोगिता है। यह हमें बतलाता है कि कैसे एक तैराक एक डुबकी पटल (डाइविंग बोर्ड) से कलाबाजी करता हुआ नीचे पानी में कूदता है।

उद्देश्य

इस पाठ को पढ़ने के पश्चात आप:

- एक दृढ़ पिण्ड में द्रव्यमान केन्द्र को परिभाषित कर सकेंगे;
- यह व्याख्या कर पाएंगे कि दृढ़ पिण्ड की गति, स्थानांतरण गति और घूर्णन गति दोनों का संयोजन क्यों है;
- जड़त्व आघूर्ण को परिभाषित कर सकेंगे तथा लम्बवत् एवं समान्तर अक्षों के प्रमेयों का कथन कर सकेंगे;
- बल आघूर्ण परिभाषित कर सकेंगे तथा इसके द्वारा उत्पन्न घूर्णन की दिशा ज्ञात कर सकेंगे;
- एक दृढ़ पिण्ड की गति का समीकरण लिख सकेंगे;
- कोणीय संवेग संरक्षण के सिद्धांत को बतला सकेंगे और

टिप्पणियाँ

- एक नत समतल पर गतिमान दृढ़ पिण्ड की गति के अंत में उसके वेग की गणना कर सकेंगे।

7.1 दृढ़ पिण्ड

जैसा कि ऊपर बताया जा चुका है कि बिंदु द्रव्यमान एक आदर्श अवधारणा है जिसे विवेचन को सरल बनाने के लिए उपयोग में लाया जाता है। व्यवहार में जब दो पिण्डों के बीच अन्योन्य क्रिया होती है तथा उनके बीच की दूरी उनके आकार की तुलना में बहुत अधिक हो तो इस स्थिति में उनके आकार को नगण्य मानकर एक बिंदु द्रव्यमान के रुप में लिया जा सकता है। *क्या आप ऐसे दो उदाहरण दे सकते हैं जिनमें पिण्डों का आकार महत्व नहीं रखता हो?* सितारों का आकार आकाशगंगा की तुलना में बहुत कम होता है। अत: सितारों को बिंदु द्रव्यमान माना जा सकता है। इसी प्रकार पृथ्वी–चन्द्रमा निकाय में, चन्द्रमा का आकार नगण्य माना जा सकता है। परन्तु जब हम किसी अक्ष के इर्द गिर्द एक दृढ़ पिण्ड के घूर्णन पर विचार करते हैं तो पिण्ड का आकार महत्वपूर्ण हो जाता है। जब हम किसी निकाय के घूर्णन पर विचार करते हैं तो हम सामान्यतया यह मान लेते हैं कि घूर्णन की अवधि में इनके अवयव कणों के बीच की दूरी अचर रहती है। कणों के इस प्रकार के निकाय को **दृढ़ पिण्ड** कहते हैं।

दृढ़ पिण्ड एक ऐसा पिण्ड होता है जिसके अवयव कण गति की अवस्था में भी अपनी सापेक्ष स्थिति बनाए रखते हैं अर्थात् कणों के बीच की दूरी में परिवर्तन नहीं होता है।

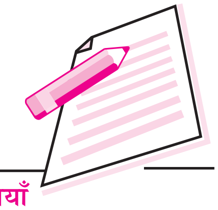
इस परिभाषा से स्पष्ट है कि गतिमान अवस्था में दृढ़ पिण्ड का आकार संरक्षित रहता है। तथापि, बिंदु कण की तरह एक दृढ़ पिण्ड भी आदर्श स्थिति है क्योंकि, यदि किसी दृढ़ पिण्ड पर अत्यधिक बल लगाएं तो उनके कणों के बीच की दूरी में परिवर्तन हो जाता हैं ,भले ही ये परिवर्तन अत्यन्त सूक्ष्म ही क्यों न हों। इस प्रकार से प्रकृति में कोई भी आदर्श दृढ़ पिण्ड नहीं है। सामान्यत: हम एक ठोस वस्तु को दृढ़ पिंड मान लेते हैं। एक क्रिकेट की गेंद, लकड़ी का गुटका, एक इस्पात की डिस्क और पृथ्वी तथा चन्द्रमा को भी इस अध्याय में दृढ़ पिंड मान लिया गया है।

क्या बाल्टी में पानी को एक दृढ़ पिण्ड माना जा सकता है? स्पष्ट रुप से एक बाल्टी में पानी दृढ़ पिण्ड नहीं हो सकता क्योंकि जब बाल्टी को इधर–उधर धकेला जाता है तो पानी आकार बदलता है।

अब आप यह जानना चाहेंगे कि दृढ़ पिंड के विषय में आपने क्या समझा है?

पाठगत प्रश्न 7.1

1. लकड़ियों की छ: छड़ों का एक फ्रेम बनाया गया है। छड़ें इस प्रकार से एक–दूसरे से सटी हैं कि ये घूम नहीं सकतीं अथवा अलग नहीं हो सकती हैं। क्या यह निकाय एक दृढ़ पिण्ड है?
2. क्या रेत के ढेर को एक दृढ़ पिण्ड माना जा सकता है? अपने उत्तर की व्याख्या करें।

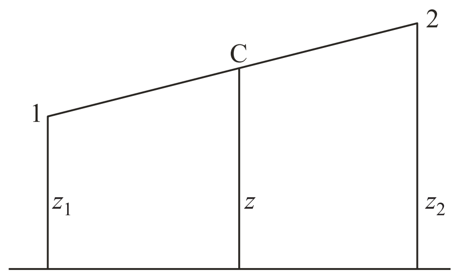


7.2 एक दृढ़ पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र

बहुत से कणों से बने दृढ़पिण्डों पर विचार करने से पूर्व एक काफी सरल निकाय पर विचार करें। माना समान द्रव्यमान के दो कण एक छड़ से जुड़े हुए हैं जिसका अपना कोई द्रव्यमान नहीं है और जो अवितान्य है (जिसकी लंबाई अचर है)। क्या हम इस तंत्र को दृढ़ पिंड कह सकते हैं?

इस निकाय में दो कणों के बीच की दूरी नियत है, अतः यह एक दृढ़ पिंड है।

मान लीजिए कि दो कण एक क्षैतिज समतल से z_1 और z_2 ऊँचाईयों पर हैं (चित्र 7.1)। यह भी मान लें कि उस छोटे-से क्षेत्र में, जिसमें इन दो कणों का निकाय घूमता है, गुरुत्वीय बल एक समान है। दोनों कणों पर mg बल कार्य करता है। अतः निकाय पर लगने वाला कुल बल $2mg$ है। अब हमें निकाय में एक ऐसे बिंदु का पता लगाना है कि यदि $2mg$ बल उस बिन्दु पर लगे तो निकाय की गति उसी प्रकार की हो जैसी कि दोनों कणों पर लगे प्रत्येक बल mg के लगने से होती है। मान लीजिए कि बल $2mg$ बिन्दु C पर लगता है जिसकी क्षैतिज समतल से ऊँचाई z है। कण 1 तथा 2 की स्थितिज ऊर्जाएं क्रमशः mgz_1 तथा mgz_2 हैं। बिंदु C पर माने गए कण की स्थितिज ऊर्जा $2mgz$ हुई। चूँकि इसका मान दोनों कणों की संयुक्त स्थितिज ऊर्जा के बराबर होना चाहिए। अतः



चित्र 7.1 : दो कणों का निकाय

$$2\,mgz = mgz_1 + mgz_2 \tag{7.1}$$

या

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} \tag{7.2}$$

ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में बिंदु C दो कणों के बीच स्थित होता है। यदि दोनों द्रव्यमान असमान हों, तब यह बिंदु बीच में नहीं रहेगा। यदि कण 1 का द्रव्यमान m_1 और कण 2 का द्रव्यमान m_2 हो तो समीकरण (7.1) का रुप निम्नवत हो जाएगा:

$$(m_1 + m_2)\,gz = m_1gz_1 + m_2\,gz_2 \tag{7.3}$$

अतः

$$z = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{(m_1 + m_2)} \tag{7.4}$$

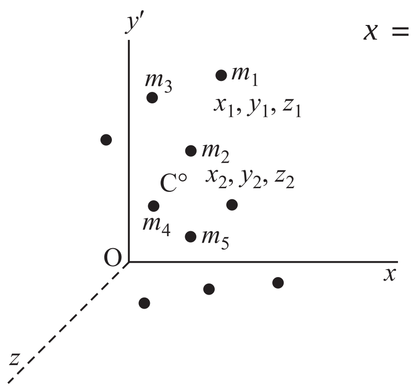
बिंदु C निकाय का द्रव्यमान केन्द्र (cm) कहलाता है। वास्तव में यह मात्र एक गणितीय साधन है और द्रव्यमान केन्द्र जैसा कोई भौतिक कण नहीं होता है। इस संकल्पना को समझने के लिए निम्न उदाहरण का सावधानीपूर्वक अध्ययन करें।

उदाहरण 7.1 : यदि उपर्युक्त स्थिति में एक कण का द्रव्यमान दूसरे कण का दुगुना हो तो, द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति ज्ञात करें।

हल : $m_1 = m$ और $m_2 = 2\,m$, तब समीकरण (7.4) से प्राप्त होगा।

$$z = \frac{m\,z_1 + 2\,m\,z_2}{(m+2\,m)} = \frac{z_1 + 2\,z_2}{3}$$

जब एक पिण्ड अनेक कणों से निर्मित होता है, तो द्रव्यमान केन्द्र को परिभाषित करने के लिए समीकरण (7.4) को व्यापक बना लेते हैं। यदि कण का द्रव्यमान m_1 और किसी एक फ्रेम के निर्देशांकों के सापेक्ष उसके निर्देशांक (x_1, y_1, z_1), द्रव्यमान m_2 के निर्देशांक (x_2, y_2, z_2) तथा इसी प्रकार अन्य द्रव्यमानों के निर्देशांक हों (चित्र 7.2) तो द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक होंगे:



चित्र. 7.2 : अनेक कणों से बने एक निकाय (पिण्ड) का द्रव्यमान केन्द्र

$$x = \frac{m_1\,x_1 + m_2\,x_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\,x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\,x_i}{M} \qquad (7.5)$$

इसी प्रकार

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\,y_i}{M} \qquad (7.6)$$

एवं

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\,z_i}{M} \qquad (7.7)$$

जहाँ $\sum_{i=1}^{N} m_i$ सभी कणों के द्रव्यमानों का योग दर्शाता है, अत: $\sum_{i=1}^{N} m_i$ वस्तु का कुल द्रव्यमान (M) है।

हमें द्रव्यमान केन्द्र को इतना सुस्पष्ट रुप से परिभाषित करने की क्या आवश्यकता है?

याद कीजिए, विस्थापन की दर को वेग कहते हैं और वेग की दर को त्वरण कहते हैं। यदि a_{1x} कण 1 के x-अक्ष के अनुदिश त्वरण के घटक को दर्शाता है और इसी प्रकार अन्य कणों के लिए भी संगत घटक लें तो समी. (7.5)की सहायता से हम लिख सकते हैं।

$$M\,a_x = m_1\,a_{1x} + m_2\,a_{2x} + \ldots \qquad (7.8)$$

जहाँ a_x, x-दिशा में द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण है। इसी प्रकार y- और z- अक्षों की दिशा में भी त्वरणों के लिए समान स्वरूप के समीकरण होंगे। सदिश निरुपण का उपयोग करते हुए इन तीनों समीकरणों को एक समीकरण के रुप में लिखा जा सकता है:

$$M\,\mathbf{a} = m_1\,\mathbf{a_1} + m_2\,\mathbf{a_2} + \ldots \qquad (7.9)$$

लेकिन द्रव्यमान एवं त्वरण का गुणनफल बल होता है। अत: $m_1 a_1$ कण 1 पर लगने वाले सभी बलों का योग है। इसी प्रकार $m_2 \mathbf{a_2}$ कण 2 पर लगने वाला नेट बल है। अर्थात् समीकरण (7.9) के दाहिनी ओर लिखे बल, पिण्ड पर लगने वाले समस्त बल हैं।

पिण्ड पर लगने वाले बल दो प्रकार के हो सकते हैं। कुछ बल पिण्ड पर बाहरी स्रोतों से लगते हैं। ऐसे बलों को **बाह्य बल** कहते हैं। इस बल का एक सुपरिचित उदाहरण गुरुत्व है। कुछ बल पिण्ड के अन्दर के कणों की पारस्परिक अन्योन्य क्रियाओं के फलस्वरुप भी लगते हैं। ऐसे बलों को **आंतरिक बल** कहते हैं। ऐसे बल का एक सुपरिचित उदाहरण ससंजक बल है।

एक दृढ़ पिण्ड के लिए आन्तरिक बलों का योग शून्य होता है क्योंकि वे एक-दूसरे को जोड़े के रुप में निरस्त करते हैं। अत: पिण्ड के अलग-अलग कणों के त्वरण बाह्य बलों के परिणामी के कारण होते हैं। इस संदर्भ में समीकरण (7.9) को इस प्रकार लिख सकते हैं-

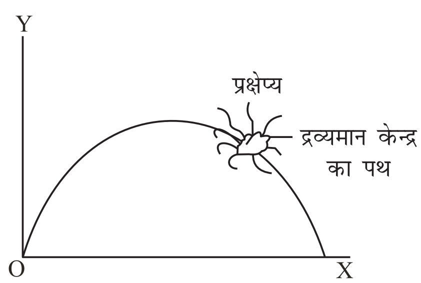
$$M\mathbf{a} = \mathbf{F}_{ext} \qquad (7.10)$$

इससे स्पष्ट है कि पिण्ड का ***CM* (द्रव्यमान केन्द्र) कुछ इस तरह से गतिमान होता है जैसे कि पिंड का सारा द्रव्यमान उस बिंदु पर स्थित हो तथा पिण्ड पर लगने वाले सभी बाहरी बल उस बिन्दु पर लग रहे हों।** ध्यान दें कि द्रव्यमान केन्द्र की परिभाषा से व्युत्पत्ति कितनी आसान हो जाती है। अब हमारा किसी पिण्ड के लाखों एकल कणों से कोई वास्ता नहीं रहता है, केवल द्रव्यमान केन्द्र निर्धारण की आवश्यकता रह जाती है- ताकि एक दिए गए पिंड की गति का निर्धारण किया जा सके। यह तथ्य कि द्रव्यमान केन्द्र की गति बाह्य बलों द्वारा निर्धारित होती है तथा आंतरिक बलों की इसमें कोई भूमिका नहीं है, मनोरंजक निष्कर्षों की ओर ले जाता है।

आप प्रक्षेप्य गति से सुपरिचित हैं। क्या आपको याद है कि प्रक्षेप्य द्वारा चला गया पथ कैसा होता है?

प्रक्षेप्य पथ परवलयाकार होता है।

मान लीजिए कि प्रक्षेप्य एक बम है और वह ऊपर आकाश में हवा के बीच अनेक टुकड़ों में विस्फोटित हो जाता है। विस्फोट आंतरिक बलों के कारण होता है। बाह्य बल में, (जो कि गुरुत्वीय बल है) कोई परिवर्तन नहीं आता है। अत: प्रक्षेप्य का द्रव्यमान केन्द्र उसी परवलय पर गति करता रहता है। जिस पर यदि विस्फोट नहीं होता तो वह गमन करता (चित्र 7.3)।

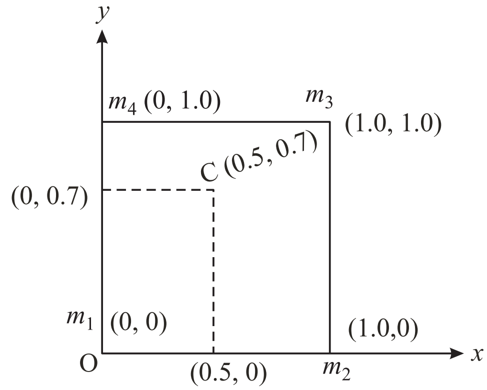


चित्र.7.3 : एक प्रक्षेप्य का द्रव्यमान केन्द्र

बम के टुकड़े सभी दिशाओं में परवलयाकार पथों में गति कर सकते हैं। लेकिन उनका द्रव्यमान केन्द्र मूल परवलय पर ही स्थित होता है। अब आप द्रव्यमान केन्द्र की संकल्पना का महत्व समझ गए होंगे। आगामी अनुच्छेदों में आपका सामना कुछ अन्य महत्त्वपूर्ण उदाहरणों से होगा।

अत: अब हम एक सरल उदाहरण द्वारा देखते हैं कि किसी निकाय का द्रव्यमान केन्द्र कैसे ज्ञात किया जाता हैं।

उदाहरण 7.2 : मान लीजिए 1.0 kg, 2.0 kg, 3.0 kg और 4.0 kg के चार द्रव्यमान एक वर्ग के चारों कोनों पर स्थित हैं: वर्ग की भुजा 1.0 m है। इस निकाय के द्रव्यमान केन्द्र (C.M) की गणना कीजिए।



चित्र. 7.4 : किसी वर्ग के चारों शीर्षों पर स्थित द्रव्यमानों के द्रव्यमान-केन्द्र का स्थिति निर्धारण

हल : वर्ग की रचना हम एक तल में कर सकते हैं। मान लीजिए यह तल (x,y) है। यह भी मानिए कि वर्ग का एक कोना तल के अक्षों के मूल बिन्दु पर पड़ता है। x तथा y दो अक्ष हैं।
चार द्रव्यमानों के निर्देशांक m_1 (0,0), m_2 (1.0,0), m_3 (1.0,1.0) और m_4 (0, 1.0) हैं और सभी (लंबाइयाँ) दूरियाँ मीटर में हैं। (चित्र 7.4)
समीकरणों (7.5) एंव (7.6) का उपयोग करने पर

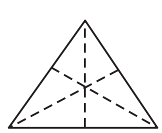
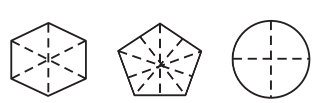
$$x = \frac{1.0 \times 0 + 2.0 \times 1.0 + 3.0 \times 1.0 + 4.0 \times 0}{1.0 + 2.0 + 3.0 + 4.0} \text{ मीटर} = 0.5 \text{ मीटर}$$

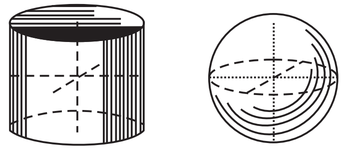
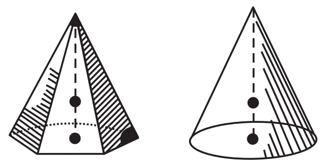
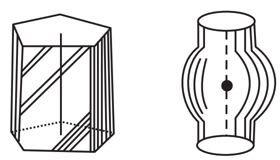
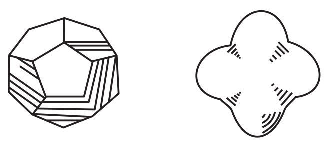
और
$$y = \frac{1.0 \times 0 + 2.0 \times 0 + 3.0 \times 1.0 + 4.0 \times 1.0}{1.0 + 2.0 + 3.0 + 4.0} \text{ मीटर} = 0.7 \text{ m}$$

द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक (0.5 m, 0.7 m) हैं और चित्र (7.4) में इसे C से निरुपित किया गया है। यह वर्ग के केन्द्र पर नहीं है। यद्यपि वर्ग एक सममित (symmetrical) आकृति है।
द्रव्यमान केन्द्र वर्ग के केन्द्र पर न होने के क्या कारण हैं?

इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के लिए द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक उस स्थिति के लिए प्राप्त करें जब सभी द्रव्यमान समान हैं।

सारणी 7.1 कुछ नियमित एवं सममित पिंडों के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति

चित्र	द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति
	त्रिभुजाकार प्लेट तीनों माध्यिकाओं का प्रतिच्छेदन बिंदु
	नियमित बहुभुज और वृत्ताकार प्लेट आकृति के ज्यामितीय केन्द्र पर

	बेलन तथा गोला आकृति के ज्यामितीय केन्द्र पर
	पिरामिड और शंकु आधार के केन्द्र और शीर्ष को जोड़ने वाली रेखा पर आधार से $h/4$ ऊँचाई पर
	अक्षीय सममिति वाली आकृति सममित आकृति के अक्ष पर
	सममित केन्द्र वाली आकृति

विस्तृत पिंडों के द्रव्यमान केन्द्रों की स्थिति की गणना आसानी से नहीं की जा सकती है। क्योंकि इसके लिए हमें पिंड का निर्माण करने वाले बहुत-से कणों पर विचार करना होगा। यह तथ्य कि किसी दृढ़ पिंड के सभी कणों का द्रव्यमान समान होता है और वे पिंड में समान रुप से वितरित रहते हैं - गणना को कुछ आसान बना देते हैं।

यदि किसी पिंड की आकृति नियमित और सममित हो, जैसे बेलनाकार अथवा गोलाकार तो गणना कुछ सरल हो जाती है। लेकिन ये गणनाएं इस पुस्तक के विषय क्षेत्र से बाहर हैं। फिर भी द्रव्यमान केन्द्र के महत्व को ध्यान में रखते हुए सारणी 7.1 में कुछ नियमित एवं सममित पिण्डों के द्रव्यमान केन्द्र दिए गए हैं।

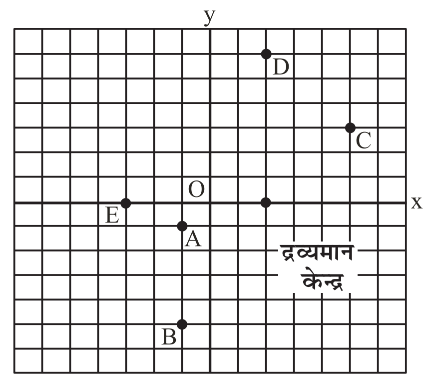
द्रव्यमान केन्द्र के विषय में दो बातें याद रखनी चाहिए (i) द्रव्यमान केन्द्र वस्तु की सीमा से बाहर हो सकता है, जैसे किसी अंगूठी के लिए (ii) जब दो वस्तुएं एक-दूसरे के चारों ओर घूमती हैं तो वे वास्तव में अपने उभयनिष्ट द्रव्यमान केन्द्र के चारों ओर घूमती हैं। उदाहरण के लिए तारों के बायनेरी (Binary) निकाय में (युग्मतारानिकाय में) तारे उभयनिष्ठ द्रव्यमान केन्द्र का चक्कर लगाते हैं। सूर्य-पृथ्वी निकाय भी अपने उभयनिष्ठ द्रव्यमान केन्द्र का परिक्रमण करता है। लेकिन चूँकि सूर्य का द्रव्यमान पृथ्वी की तुलना में काफी अधिक होता है, निकाय का द्रव्यमान-केन्द्र सूर्य के केन्द्र के काफी समीप होता है।

अब यह आपका अपनी प्रगति जाँचने का समय है।

टिप्पणियाँ

पाठगत प्रश्न 7.2

1. दिखाई गई ग्रिड में A, B, C, D और E कण हैं जिनके द्रव्यमान क्रमशः 1.0 kg, 2.0 kg, 3.0 kg, 4.0 kg और 5.0 kg है। निकाय के द्रव्यमान केन्द्र के स्थिति निर्देशांक ज्ञात करें (चित्र 7.5)।



चित्र. 7.5

2. यदि तीन कण m_1, m_2, और m_3 जिनके द्रव्यमान क्रमशः 1.0 kg, 2.0 kg और 3.0 kg हैं, एक समत्रिबाहु त्रिभुज के कोनों पर अवस्थित हैं। निकाय के द्रव्यमान केन्द्र के स्थिति निर्देशांक ज्ञात करें।

3. दर्शाइए कि दो द्रव्यमानों की उनके द्रव्यमान केन्द्र से दूरियाँ उनके द्रव्यमान की व्युत्क्रमानुपाती होती हैं।

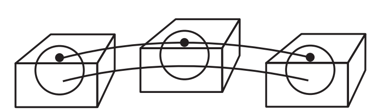
7.3 दृढ़ पिण्ड की स्थानान्तरीय एवं घूर्णन गति - एक तुलना

यदि एक दृढ़ पिण्ड इस प्रकार चलता है कि इसके सभी कण - समान्तर पथ के अनुदिश गति करते हैं (चित्र 7.6) तो इसकी गति को स्थानान्तरीय (Translational) गति कहते हैं। चूँकि सभी कण समान गति करते हैं, अतः इसका द्रव्यमान केन्द्र भी एकसमान पथ का अनुसरण करता है। अतः एक स्थानान्तरीय गति में वस्तु की गति समीकरण (7.10) द्वारा दिखायी जाती है:

$$M\mathbf{a} = \mathbf{F}_{ext}$$

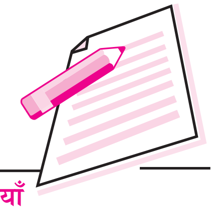
क्या अब आप किसी वस्तु के द्रव्यमान केन्द्र को परिभाषित किए जाने का लाभ समझ चुके हैं? इसकी सहायता से किसी वस्तु की स्थानान्तरीय गति एक तुल्य द्रव्यमान के एकल कण की गति के समीकरण से दिखाई जा सकती है। यह कण द्रव्यमान केन्द्र पर स्थित है और दृढ़ वस्तु पर लगने वाले सभी कार्यकारी बाह्य बलों का योग इस पर कार्य करता है। इस संकल्पना को ठीक ढंग से समझने के लिए निम्न क्रियाकलाप करें:

क्रियाकलाप 7.1



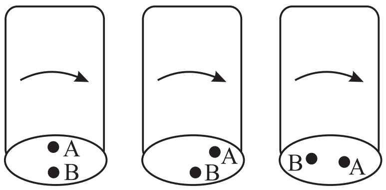
चित्र. 7.6 : एक लकड़ी का गुटका फर्श के तल पर चल रहा हैं। गुटका एक स्थानान्तरीय गति करता है।

एक लकड़ी का गुटका लें। इसकी किसी भी सतह पर दो या तीन चिह्न बनाएं। अब चिह्न को अपनी ओर रखें और गुटके को क्षैतिज तल में एक धक्का दें। इन चिह्नों द्वारा बनाए गए पथों के निशान देखें। ये सभी चिह्न सतह के समान्तर एक-दूसरे के समान्तर गति करते हैं। आप यह आसानी से देख सकते हैं कि पथों की लंबाइयाँ भी बराबर हैं। (चित्र 7.6)



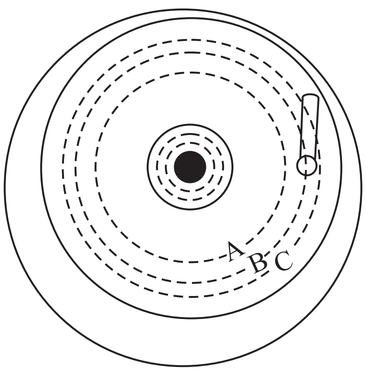
टिप्पणियाँ

क्रियाकलाप 7.2



चित्र. 7.7 :एक बेलन की लुढ़कने वाली गति A ने सतह के समान्तर गति: के साथ-साथ वृत्तीय गति भी की है।

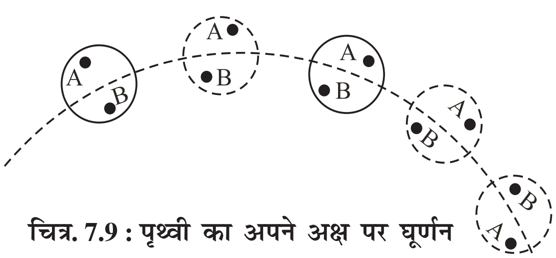
अब हम एक दूसरा सरल प्रयोग करते हैं। एक बेलनाकार लकड़ी का टुकड़ा लीजिए। इसके समतल सिरे पर एक या दो निशान बना दें। अब बेलन को धीरे से तल पर लुढ़का दें। निशान लगा हुआ समतल हिस्सा अपनी ओर रखे चित्र (7.7)। यह सतह के समान्तर चलने के साथ वृत्ताकार गति भी करता हैं अत: पिंड ने स्थानान्तरीय एवं घूर्णन दोनों प्रकार की गतियाँ की हैं। हालांकि दृढ़ वस्तुओं की आम गति स्थानान्तरीय (Translational) एवं घूर्णी, दोनों प्रकार की होती हैं लेकिन यदि पिंड का एक बिंदु नियत कर दिया जाए तो यह केवल घूर्णी गति ही कर सकता है। इस कार्य के लिए नियत कर दिया जाने वाला सबसे सुविधाजनक बिंदु इसका द्रव्यमान केन्द्र है।



चित्र. 7.8 : चक्की की शुद्ध घूर्णन गति

आपने आटा पीसने वाली चक्की अवश्य देखी होगी। पत्थर का हत्था एक वृत्तीय पथ में गति करता है। पत्थर के सभी बिंदु भी वृत्तीय पथ में गति करते हैं, जिनका अक्ष – चक्की के पत्थर के केन्द्र से गुजरता है (चित्र 7.8)।

एक दृढ़ पिंड की गति जिसमें सभी कण संकेंद्री वृत्तीय पथ में गति करते हैं, घूर्णन गति कहलाती है।



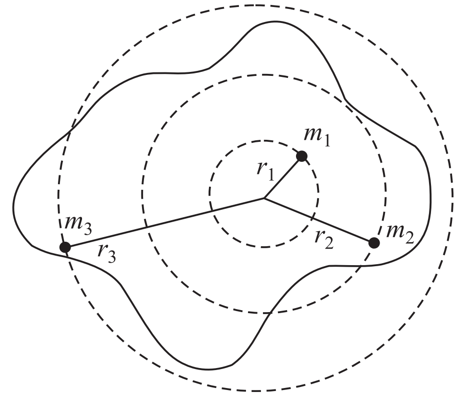
चित्र. 7.9 : पृथ्वी का अपने अक्ष पर घूर्णन

हम ऊपर देख चुके हैं कि एक दृढ़ पिंड की स्थानान्तरीय गति एकल कण की गति के समीकरण के तुल्य दर्शाई जा सकती है। आप इन समीकरणों से पूर्व परिचित हैं। अत: इस अध्याय में हम केवल एक दृढ़ वस्तु की घूर्णन गति पर ही ध्यान केन्द्रित करेंगे। पिंड के किसी एक बिंदु को स्थिर करके घूर्णन गति की जा सकती है (इस स्थिति में इसकी स्थानान्तरीय गति नहीं होगी)। गणितीय सुविधा के लिए इस बिंदु को द्रव्यमान केन्द्र (CM) लिया जाता है। ऐसी स्थिति में घूर्णन द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परित: होता है। इसका एक अच्छा उदाहरण पृथ्वी का अपनी धुरी पर घूर्णन है (चित्र 7.9)। आपने पिछले अध्याय में अध्ययन किया कि रेखीय गति में वस्तु का द्रव्यमान एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। यह किसी लगाए गए बल द्वारा किसी वस्तु में उत्पन्न त्वरण का निर्धारण करता है। क्या हम कोई इसी प्रकार की किसी राशि का निर्धारण घूर्णी गति के लिए भी कर सकते हैं। आइए देखें।

टिप्पणियाँ

7.3.1 जड़त्व आघूर्ण

मान लीजिए C एक दृढ़ पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र है और पिंड C से गुजरने वाले अक्ष के चतुर्दिक घूर्णन गति करता है (चित्र 7.10)।



चित्र. 7.10 :एक समतल पटल का अपने द्रव्यमान केन्द्र से गुजरती अक्ष के चारों ओर घूर्णन

मान लीजिए m_1, m_2, m_3... द्रव्यमान के कण घूर्णन अक्ष से क्रमशः r_1, r_2, r_3... दूरी पर स्थित हैं और क्रमशः υ_1, υ_2, υ_3 वेग से गति कर रहे हैं। m_1 द्रव्यमान के कण 1 की गतिज ऊर्जा (½) $m_1 \upsilon_1^2$ है। इसी प्रकार m_2 द्रव्यमान के कण की गतिज ऊर्जा (½) $m_2 \upsilon_2^2$ है। सभी कणों की गतिज ऊर्जा को जोड़ने पर हमें पिंड की कुल ऊर्जा प्राप्त होती है। यदि T पिंड की कुल गतिज ऊर्जा बतलाता है, तो हम लिख सकते हैं।

$$T = (½)\, m_1 \upsilon_1^2 + (½)\, m_2 \upsilon_2^2 + ...$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2}\right) m_i \upsilon_i^2 \qquad (7.11)$$

जहाँ $\displaystyle{}_{i=1}^{i=n}$ सभी कणों के योग को दर्शाता है।

अध्याय 4 में हम पढ़ चुके हैं कि कोणीय चाल (ω) व रेखीय चाल (υ) के बीच के संबंध के लिए समीकरण $\upsilon = r\,\omega$ है। इस परिणाम को समीकरण (7.11) में प्रयोग करने पर,

$$T = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2}\right) m_i (r_i \omega)^2 \qquad (7.12)$$

यहाँ ध्यान दें कि हमने ω के साथ i का प्रयोग नहीं किया है क्योंकि दृढ़ पिंड के सभी कणों की कोणीय चाल ω बराबर होती है। समीकरण (7.12) को इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$T = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i\, r_i^2\right)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\, \mathrm{I}\, \omega^2 \qquad (7.13)$$

राशि

$$I = \sum_{i} m_i\, r_i^2 \qquad (7.14)$$

को पिंड का जड़त्व-आघूर्ण कहते हैं।

उदाहरण 7.3 : m द्रव्यमान के चार कण एक वर्ग जिसकी प्रत्येक भुजा L है, के चारों कोनों पर स्थित हैं। उनका जड़त्व-आघूर्ण, वर्ग के केन्द्र से गुजरती और इसके तल के लम्बवत अक्ष के परितः परिकलित कीजिए।

हल : सरल ज्यामिती से हम जानते हैं कि प्रत्येक कण की इसके अक्ष से दूरी $r = L\sqrt{2}$. अतः

$$I = mr^2 + mr^2 + mr^2 + mr^2$$
$$= 4m\,r^2$$
$$= 4\,m\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2 \qquad (\text{चूँकि } r = \frac{L}{\sqrt{2}}).$$
$$= 2\,m\,L^2$$

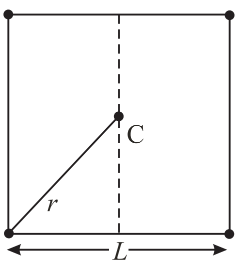


Fig. 7.11

यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि जड़त्व आघूर्ण को किसी घूर्णन अक्ष के संदर्भ में परिभाषित किया जाता है। इसलिए, जब भी आप जड़त्व आघूर्ण की चर्चा करें, तो घूर्णन अक्ष भी इंगित किया जाना चाहिए। वर्तमान उदाहरण में I, वर्ग के केन्द्र से होती हुई तथा चारों द्रव्यमानों के तल के लम्बवत् अक्ष के परितः पिंड का जड़त्व-आघूर्ण है (चित्र 7.10)।

जड़त्व-आघूर्ण kg m^2 में व्यक्त किया जाता है। एक दृढ़ पिण्ड का जड़त्व-आघूर्ण बहुधा

$$I = MK^2 \text{ के रूप में लिखा जाता है।} \qquad (7.15)$$

जहाँ M वस्तु का कुल द्रव्यमान है और K वस्तु की परिभ्रमण-त्रिज्या (Radius of gyration)) है। परिभ्रमण-त्रिज्या घूर्णन अक्ष से वह दूरी है जिस पर समस्त पिण्ड के द्रव्यमान को रखा हुआ माना जा सकता है। जिससे कि हमें वही जड़त्व-आघूर्ण प्राप्त हो जो कि वास्तव में पिंड का है। यहाँ यह याद रखना महत्वपूर्ण है कि किसी अक्ष के गिर्द एक वस्तु का जड़त्व-आघूर्ण उस अक्ष के चतुर्दिक द्रव्यमान के वितरण पर निर्भर करता है। यदि द्रव्यमान का वितरण परिवर्तित होता है, तो उसका जड़त्व आघूर्ण भी बदल जाएगा। इसे उदाहरण 7.3 की सहायता से समझा जा सकता है। माना कि हम दो विपरीत कोनों में m द्रव्यमान और रख देते है। तब वर्ग के लंबवत C से गुजरने वाली अक्ष के संदर्भ में-

$$\mathrm{I} = mr^2 + 2mr^2 + mr^2 + 2mr^2$$
$$= 6m\,r^2$$

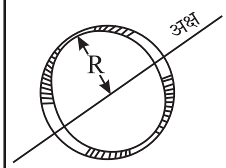
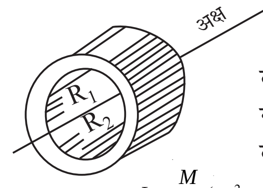
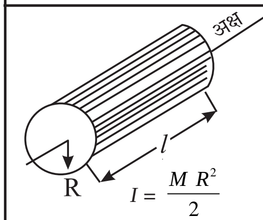
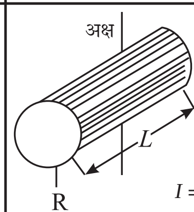
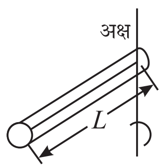
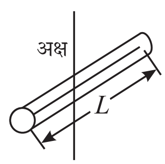
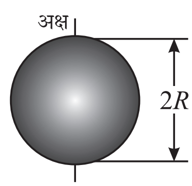
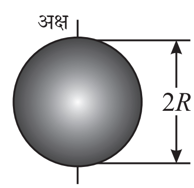
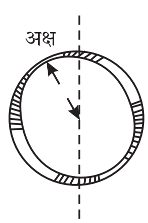
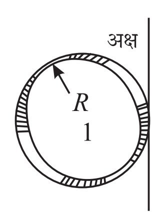
स्पष्टतया जड़त्व-आघूर्ण $6mL^2$ से $3\,mL^2$ में परिवर्तित हो गया है।

समीकरण 7.13 को पुनः ध्यान से देखिए तथा रेखीय गति में किसी पिण्ड की गतिज ऊर्जा के समीकरण से इसकी तुलना कीजिए। क्या आपको कोई सादृश्य दिखलाई देता है? आप देखेंगे कि

टिप्पणियाँ

रेखीय गति में जो भूमिका द्रव्यमान की है वही भूमिका घूर्णन गति में जड़त्व आघूर्ण की है और रेखीय गति में रेखीय वेग की जो भूमिका है वैसी ही भूमिका, घूर्णन गति में कोणीय वेग की है।

सारणी 7.2 कुछ नियमित और एक समान पिण्डों के जड़त्व-आघूर्ण

 $I = MR^2$ छल्ले का केन्द्रीय अक्ष के परित:	 $I = \frac{M}{2}(R_1^2 + R_2^2)$ वलयाकार बेलन या छल्ले का अपनी अक्ष के गिर्द
 $I = \frac{MR^2}{2}$ ठोस बेलन का बेलन की अक्ष के परित:	 $I = \frac{MR^2}{4} + \frac{M\ell^2}{12}$ ठोस बेलन (या डिस्क) का एक केन्द्रीय व्यास के गिर्द
 $I = \frac{ML^2}{12}$ पतली छड़ का इसके केन्द्र पर अभिलंबवत् अक्ष के गिर्द	 $I = \frac{ML^2}{3}$ एक पतली छड़ का इसके अक्ष के लंबवत एक सिरे से गुजरती रेखा के गिर्द
 $I = \frac{2MR^2}{5}$ ठोस गोले का किसी व्यास के गिर्द	 $I = \frac{2MR^2}{3}$ पतले गोलीय कोश का किसी व्यास के गिर्द
 $I = \frac{MR^2}{2}$ छल्ले का किसी व्यास के गिर्द	 $I = \frac{3MR^2}{2}$ छल्ले का एक स्पर्श रेखा के गिर्द

A. जड़त्व-आघूर्ण का भौतिक महत्व

जड़त्व-आघूर्ण का भौतिक महत्व घूर्णन गति में वैसा ही है, जैसा रेखीय गति में द्रव्यमान का होता है। जैसे रेखीय गति में द्रव्यमान वस्तु की रेखीय गति की अवस्था में परिवर्तन का विरोध करता है, वैसे ही जड़त्व-आघूर्ण घूर्णन गति में परिवर्तन का विरोध करता है। जड़त्व-आघूर्ण के इस गुण का व्यावहारिक जीवन में बहुत उपयोग किया गया है। घूर्णन गति पैदा करने वाली मशीनों में एक अवयव प्राय: एक डिस्क होती है जिसका जड़त्व-आघूर्ण बहुत अधिक होता है। रेल का वाष्प इंजन और स्वचालित वाहन इसके उदाहरण हैं। वह डिस्क जिसका जड़त्व आघूर्ण बहुत अधिक होता है, गतिपालक चक्र (Fly wheel) कहलाती है। गतिपालक चक्र की कार्यशैली को समझने के लिए कल्पना कीजिए कि रेलगाड़ी का चालक अचानक ही रेलगाड़ी की चाल बढ़ाना चाहता है, लेकिन गतिपालक चक्र इस गति का विरोध करता है। यह गति को धीरे-धीरे बढ़ने देता है। इसी प्रकार यह अचानक चाल कम करने के प्रयास का भी विरोध करता है। इसकी वजह से गाड़ी शनै:शनै रुक पाती है।

इस प्रकार से गतिपालक चक्र, अधिक जड़त्व-आघूर्ण के कारण रेलगाड़ी में लगने वाले झटकों को कम करता है और यात्री सुगमतापूर्व यात्रा कर पाते हैं।

हमने देखा कि घूर्णन गति में कोणीय वेग की सादृश्यता रेखीय गति में रेखीय वेग से है। कोणीय त्वरण (जिसे प्राय: α से दर्शाते हैं), कोणीय वेग में परिवर्तन की दर होती है, जो कि रेखीय गति में रेखीय त्वरण के सदृश्य होती है।

B. समान रुप से घूर्णन कर रहे दृढ़ पिण्ड के लिए गति के समीकरण

किसी पटल के बिंदु 0 के लम्बवत अक्ष के गिर्द घूर्णन पर विचार करें। यदि यह एकसमान कोणीय वेग ω से गति कर रहा है, जैसा कि दर्शाया गया है, तो यह t सेकन्ड में θ कोण से घूम जाएगा,

$$\theta = \omega t \qquad 7.16(a)$$

तथापि, यदि पटल पर लगातार एकसमान बल-आघूर्ण लगाया जाए (बल आघूर्ण बल का घुमाने वाला प्रभाव है।), तो इस वस्तु में एक समान कोणीय त्वरण उत्पन्न होगा। निम्नलिखित समीकरण इसकी घूर्णन गति का निरुपण करते हैं;

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t$$

7.16(b)

जहाँ ω_i प्रारंभिक कोणीय वेग है तथा ω_f अंतिम कोणीय वेग है।

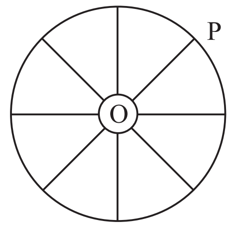
इसी तरह हम लिख सकते हैं

$$\theta = \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \qquad 7.16(c)$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2 \alpha \theta \qquad 7.16(d)$$

ध्यान से देखने पर आप को इन समीकरणों की स्थानान्तरीय गति के समीकरणों से सादृश्यता स्पष्ट हो जाएगी।

उदाहरण 7.4 : एक साइकिल का पहिया एक क्षैतिज अक्ष के गिर्द चक्कर लगाने के लिए स्वतंत्र है। यह प्रारम्भ में विरामावस्था में है। इस पर खींची गई एक रेखा OP की कल्पना करें। यदि समान कोणीय त्वरण 2.5 rad s^{-2} हो, तो रेखा OP, 2 सेकन्ड में कितने कोण से घूम जाएगी?



चित्र.7.13 : एक साइकिल के पहिए का घूर्णन

हल : रेखा OP का कोणीय विस्थापन

$$\theta = \omega_0 t + (½)\, \alpha\, t^2 = 0 + (½) \times (2.5 \text{ rad s}^{-2}). \times 4 \text{ s}^2 = 5 \text{ rad}$$

हमने ऊपर सीखा है कि घूर्णन गति में पिंड का द्रव्यमान केन्द्र स्थिर रखा जाता है। ऐसा केवल सुविधा की दृष्टि से किया जाता है। लेकिन कई बार हम द्रव्यमान केन्द्र के अतिरिक्त किसी अन्य बिंदु को भी स्थिर रख सकते हैं और पिण्ड उसके गिर्द घूर्णन गति कर सकता है। तब घूर्णन अक्ष इस बिन्दु से होकर जाएगा। इस स्थिर बिन्दु से जाने वाली अक्ष के गिर्द जड़त्व आघूर्ण, दृढ़ पिण्ड के गिर्द जड़त्व आघूर्ण से भिन्न होगा। जड़त्व आघूर्ण के प्रमेयों द्वारा इन दोनों जड़त्व आघूर्णों के बीच एक संबंध प्राप्त किया जा सकता है।

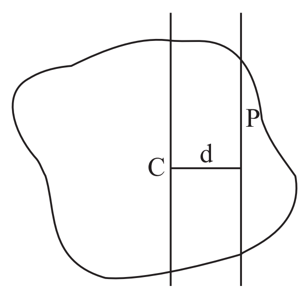
7.3.2 जड़त्व-आघूर्ण के प्रमेय

दो अक्षों के गिर्द जड़त्व-आघूर्णों के बीच परस्पर संबंध दर्शाने वाले दो प्रमेय हैं। ये है –

(i) समान्तर अक्ष प्रमेय

(ii) लम्बवत् अक्ष प्रमेय

अब हम प्रमेयों की व्याख्या करेंगे और इनके उपयोगों की चर्चा करेंगे:



चित्र.7.14 : CM से गजरने वाली अक्ष के समान्तर

(*i*) समान्तर अक्ष प्रमेय

मान लीजिए कि कोई दृढ़ पिण्ड द्रव्यमान केन्द्र के अतिरिक्त किसी अन्य बिंदु P से होकर जाने वाली अक्ष के गिर्द घूर्णनगति करता है। इस अक्ष के गिर्द जड़त्व-आघूर्ण की गणना इस अक्ष के समान्तर केन्द्र से जाने वाली अक्ष के गिर्द जड़त्व-आघूर्ण के ज्ञान से की जा सकती है। यदि p से गुजरनेवाली अक्ष के परित: जड़त्व-आघूर्ण को I से प्रदर्शित करें और द्रव्यमान केन्द्र से जाने वाली समान्तर अक्ष के गिर्द जड़त्व आघूर्ण I_C से प्रदर्शित किया जाय, तब

$$I = I_C + M d^2 \tag{7.17}$$

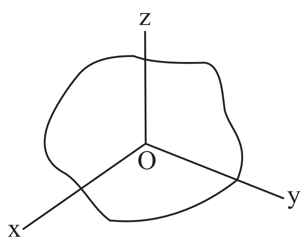
जहाँ M पिण्ड का द्रव्यमान है और d दोनों अक्षों के बीच की दूरी है, इसे समान्तर अक्ष प्रमेय कहते हैं।

(*ii*) लम्बवत् अक्ष प्रमेय

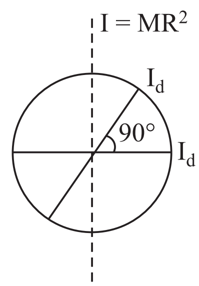
आइए अब हम परस्पर तीन लम्बवत अक्षों पर विचार करें। जिनमें से दो अक्ष- x और अक्ष-y पिण्ड के समतल में हैं और तीसरी अक्ष z पिण्ड के समतल के लम्बवत् है (चित्र 7.15)। लम्बवत अक्ष प्रमेय का कथन है कि **x**–अक्ष और **y**–अक्ष के गिर्द जड़त्व आघूर्णो का योग **z**–अक्ष के गिर्द जड़त्व आघूर्ण के बराबर होता है।

अर्थात्
$$I_z = I_x + I_y \tag{7.18}$$

अब हम एक छल्ले का उदाहरण लेते हैं, जैसा कि चित्र (7.16) में दिखाया गया है। तालिका 7.2 से आप जानते हैं कि एक छल्ले का अपनी अक्ष के गिर्द जड़त्व आघूर्ण MR^2 होता है, जिसमें M द्रव्यमान और R त्रिज्या है। लम्बवत् अक्ष के प्रमेय के अनुसार यह जड़त्व आघूर्ण दोनों व्यासों के गिर्द – जड़त्व आघूर्ण के योग के बराबर होना चाहिए क्योंकि दोनों व्यास परस्पर लम्बवत् हैं। लूप की सममिति से पता चलता है कि किसी भी व्यास के गिर्द जड़त्व आघूर्ण बराबर होता है। इसका अर्थ यह हुआ कि सभी व्यास



चित्र.7.15 : लम्बवत् अक्ष प्रमेय



चित्र.7.16 : एक छल्ले का जड़त्व आघूर्ण

तुल्य हैं। अत: कोई भी दो लम्बवत् व्यास चुने जा सकते हें। अब चूँकि प्रत्येक व्यास के गिर्द जड़त्व आघूर्ण समान हैं, माना यह I_d है। तब समीकरण 7.18 के अनुसार

$$MR^2 = 2I_d$$

अत:

$$I_d = (½) MR^2$$

अत: एक छल्ले का अपने किसी व्यास के गिर्द जड़त्व आघूर्ण (½) MR^2 होता है।

अब हम रिम पर एक बिंदु P लेते हैं। इस बिन्दु P पर लूप की स्पर्श रेखा पर विचार करते हैं। यह रेखा लूप (छल्ले) की अक्ष के समान्तर है। दोनों अक्षों के बीच की दूरी त्रिज्या R के बराबर है। स्पर्श रेखा के गिर्द जड़त्व आघूर्ण की गणना, समान्तर अक्ष प्रमेय का उपयोग करके की जा सकती है। स्पर्श रेखा के गिर्द आघूर्ण

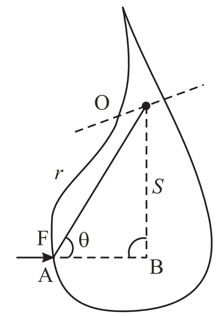
$$I_{\text{स्पर्शरेखीय}} = MR^2 + MR^2 = 2MR^2.$$

यहाँ यह स्पष्ट कर देना आवश्यक है कि तालिका 7.2 में बहुत:सी प्रविष्टियों में समान्तर एंव लम्बवत् अक्ष प्रमेयों का उपयोग करके गणना की गई हैं।

टिप्पणियाँ

7.3.3 बल-आघूर्ण और बल युग्म

क्रियाकलाप 7.3



चित्र.7.17 : एक वस्तु का घूर्णन

क्या आपने कभी ध्यान दिया है कि कब्जों से दूर बल लगाकर एक किवाड़ को आसानी से खोला जा सकता है? यदि आप कब्जों के पास बल लगाकर किवाड़ खोलना चाहें तो क्या होता हैं? इस क्रियाकलाप को कई बार करके देखिए। आप महसूस करेंगे कि कब्जों के नजदीक बल लगाकर किवाड़ खोलने में अधिक बल की आवश्यकता होती है। ऐसा क्यों होता है? इसी प्रकार स्पैनर द्वारा एक पेंच को घुमाने के लिए एक लम्बे हत्थे की आवश्यकता होती है। हत्था लम्बा रखने का क्या उद्देश्य है? आइये, अब हम इन प्रश्नों का उत्तर खोजते हैं।

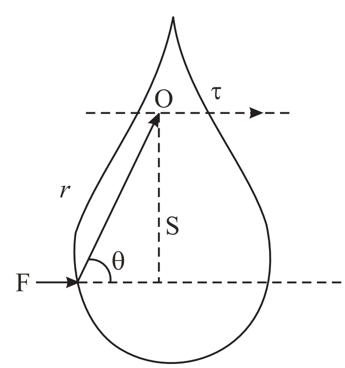
मान लें कि पिण्ड में एक स्थिर बिंदु O है और इस बिन्दु से गुजरने वाली अक्ष के गिर्द यह पिण्ड घूम सकता है (चित्र 7.17)। एक F परिमाण का बल AB रेखा की दिशा में बिंदु A पर लगाया जाता है। यदि AB रेखा बिंदु O से गुजरती है तो ऐसी स्थिति में लगाया गया बल वस्तु को घुमा नहीं पाएगा। यह AB रेखा बिंदु O से जितनी अधिक दूर होगी उतनी ही आसानी से बल प्रयोग द्वारा पिंड को O से गुजरने वाली अक्ष के गिर्द घुमाया जा सकेगा। बल के इस घूर्णन प्रभाव को बल आघूर्ण कहते हैं। इस बल-आघूर्ण का परिमाण

$$\tau = F\,s = F\,r\sin\theta \qquad (7.19)$$

जहाँ पर s घूर्णन अक्ष की उस रेखा से दूरी है जिसकी दिशा में बल लगा है। बल-आघूर्ण का मात्रक, न्यूटन मीटर (Nm) है। बल-आघूर्ण वास्तव में एक सदिश राशि है। समीकरण (7.19) को सदिश रुप में इस प्रकार भी लिखा जा सकता है:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (7.20)$$

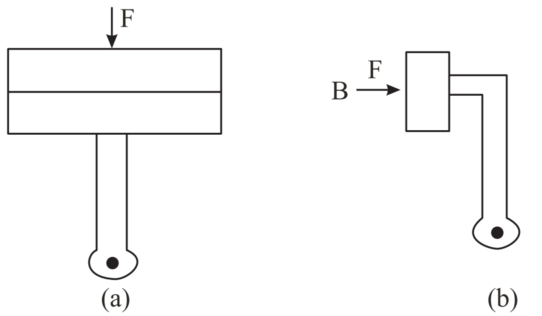
समीकरण (7.20) से बल आघूर्ण का परिमाण एवं दिशा दोनों प्रदर्शित होते हैं। पिण्ड किस दिशा में घूमेगा? इसे ज्ञात करने के लिए सदिशों के सदिश गुणनफल के नियम पर विचार कीजिए (पाठ 1 को देखिए)। $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{r}$ और $\mathbf{F}$ दोनों के लम्बवत् है; जो कि यहाँ पर काग़ज का तल है। (अर्थात् कागज के तल के लम्बवत् है) (चित्र.7.18)। यदि हम दाएं हाथ के अंगूठे को उंगलियों के लम्बवत् रखे और उंगलियों को इस प्रकार मोड़ें कि ये $\mathbf{r}$ से $\mathbf{F}$ की ओर संकेत करें, तो अंगूठे की दिशा बल आघूर्ण की दिशा को दर्शाएगी।



चित्र. 7.18 : दाहिने हाथ के अंगूठे का नियम

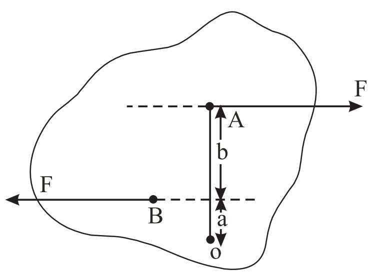
इस नियम का प्रयोग करके दर्शाइए कि चित्र 7.18 में बल का घूर्णन प्रभाव काग़ज की सतह के लम्बवत् नीचे की ओर लगता है। यह वस्तु के घूर्णन की दक्षिणावर्त दिशा के संगत है।

उदाहरण 7.5 : चित्र.7.19 एक साइकिल पैडल दिखाता है (*i*) मान लें जब आप पैडल को नीचे दबा रहे हैं तो आपका पैर शीर्ष पर हैं आप के द्वारा उत्पन्न बल आघूर्ण कितना है? (ii) अधिकतम बल-आघूर्ण उत्पन्न करने के लिए आपका पैर कहाँ पर होना चाहिए।



चित्र.7.19 : साइकिल पैडल **(a)** शीर्ष पर जबकि $\tau = 0$; **(b)** जबकि τ अधिकतम है

हल : (i) जब आप का पैर शीर्ष पर है तो बल की कार्य रेखा पैडल के केन्द्र से होकर गुजरती है। अत: $\theta = 0$, और $\tau = Fr \sin\theta = 0$.



चित्र.7.20 : किसी वस्तु पर कार्य कर रहे दो विपरीत

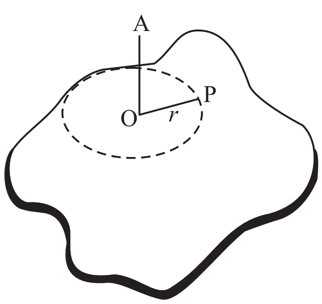
(ii) अधिकतम बल आघूर्ण प्राप्त करने के लिए $\sin\theta = 1$ होना चाहिए। यह तब होता है, जबकि आपका पैर B स्थिति में हो और आप पैडल को नीचे की ओर दबा रहे हों।

यदि किसी पिण्ड पर बहुत-से बल आघूर्ण कार्य कर रहें हों, तो परिणमी बल आघूर्ण सभी बल-आघूर्णों का सदिश योग होता है। घूर्णनगति में बल-आघूर्ण और रेखीय गति में बल की भूमिका में क्या आप कोई सादृश्य देखते हैं?

चित्र 7.20 की भाँति वस्तु पर लगने वाले समान परिमाण एवं विपरीत दिशाओं में लगे बलों पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि पिंड O से गुजरने वाले अक्ष के गिर्द घूमने के लिए स्वतंत्र है। पिण्ड पर लगे दोनों बल आघूर्णों का परिमाण

$$\tau_1 = (a + b) F$$

और $\tau_2 = a F$



चित्र. 7.21 : किसी अक्ष के परित: घूमती हुई एक दृढ़ वस्तु

आप सत्यापित कर सकते हैं कि इन दोनों बल आघूर्णों के घूर्णन प्रभाव विपरीत दिशा में हैं। अत: पिंड पर नेट घूर्णन प्रभाव का परिमाण बड़े बल आघूर्ण की दिशा में होगा, जो कि इस प्रकरण में τ_1 है।

$$\tau = \tau_1 - \tau_2 = bF \qquad (7.21)$$

टिप्पणियाँ

अतः हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि विपरीत दिशाओं में लगे दो समान बल जिनकी क्रिया रेखाएं अलग-अलग हैं ऐसा बल-युग्म बनाते हैं जिसके बल-आघूर्ण का परिमाण एक बल और बलों के बीच की लम्बवत् दूरी के गुणनफल के बराबर होता है।

बल-आघूर्ण के लिए एक और नया व्यंजक है जो कि इससे और रेखीय गति में प्रयुक्त बल में समानता प्रदर्शित करता है। बिंदु O से जानेवाली अक्ष के गिर्द घूमते हुए किसी दृढ़ पिण्ड पर विचार कीजिए (चित्र. 7.21)। स्पष्टरुप से पिण्ड का एक कण P अक्ष के गिर्द एक वृत्ताकार मार्ग में घूमता है जिसका अर्धव्यास r है। यदि वृत्तीय गति असमान हो तो कण स्पर्श रेखा एवं त्रिज्या दोनों की दिशाओं में बल का अनुभव करता है। त्रिज्या बल $m\omega^2 r$, अभिकेन्द्र बल है। यह कण को वृत्ताकार पथ में बनाए रखता है। स्पर्श रेखीय दिशा में लगने वाला बल, वेग υ के परिमाण को बदलता है। याद रखें कण में वेग की दिशा सदैव वृत्ताकर पथ की स्पर्श रेखा की दिशा में होती है। इसका परिमाण ma होता है, जहाँ a स्पर्शरेखीय त्वरण है। त्रिज्य बल कोई बल-आघूर्ण उत्पन्न नहीं करता है। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है? स्पर्शरेखीय बल mar परिमाण का बल आघूर्ण निर्मित करता है। क्योंकि $a = r\,\alpha$ (α कोणीय त्वरण है) है अतः बल आघूर्ण का परिमाण $= m\,r^2\,\alpha$ होता है। यदि हम पिण्ड के सभी कणों पर विचार करें तो

$$\tau = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2 \alpha = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\alpha$$
$$= I\,\alpha. \qquad (7.22)$$

$\because$ α का मान सभी कणों के लिए समान है।

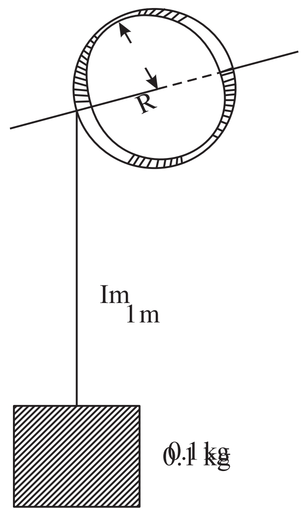
इस समीकरण और $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ के बीच तुलना से स्पष्ट हो जाता है कि $\boldsymbol{\tau}$ की घूर्णनगति में वैसी ही भूमिका है जैसी कि $\mathbf{F}$ की रैखिक गति में होती है। सारणी 7.3 में रेखीय और घूर्णन गतियों में प्रयुक्त होने वाली राशियों के बीच समानता को दर्शाया गया है। इस सारणी की सहायता से हम घूर्णन गति में प्रयुक्त होने वाली किसी भी राशि के समीकरण को लिख सकते हैं, यदि हमें रेखीय गति में उस राशि के लिए सादृश्य ज्ञात हो।

सारणी 7.3 : रेखीय और घूर्णन गति में प्रयुक्त होने वाली राशियों में समानता

रेखीय गति		स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन गति	
विस्थापन	x	कोणीय विस्थापन	θ
वेग	$\upsilon = \frac{dx}{dt}$	कोणीय वेग	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
त्वरण	$a = \frac{dv}{dt}$	कोणीय त्वरण	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
द्रव्यमान	M	जड़त्व आघूर्ण	I
बल	$F = m\,a$	बल आघूर्ण	$\tau = I\,\alpha$
कार्य	$W = \int F\,dx$	कार्य	$W = \int \tau\,d\theta$
गतिज ऊर्जा	$\frac{1}{2} M\,\upsilon^2$	गतिज ऊर्जा	$(\frac{1}{2})\,I\,\omega^2$
शक्ति	$P = F\upsilon$	शक्ति	$P = \tau\,\omega$
रेखीय संवेग	$M\upsilon$	कोणीय संवेग	$I\,\omega$

समीकरण (7.22) की सहायता से हम किसी पिंड में दिए गए बल-आघूर्ण द्वारा उत्पन्न कोणीय त्वरण की गणना कर सकते हैं।

उदाहरण 7.6 : बिना घर्षण के 1.0 kg और 0.1 मीटर अर्धव्यास की एकसमान डिस्क इसके केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के गिर्द घूम सकती है। इस डिस्क की रिम में नगण्य द्रव्यमान की एक डोरी पड़ी है (चित्र 7.2)। यदि डोरी पर 0.1 kg द्रव्यमान लटका दिया जाए तो डिस्क के (i) कोणीय त्वरण (ii) एक सेकण्ड में घूमे गए कोण तथा (iii) एक सेकण्ड में जनित कोणीय वेग की गणना करें। ($g = 10$ m s^{-2})



चित्र. 7.22

हल : (i) यदि R और M डिस्क की त्रिज्या और द्रव्यमान दर्शाते हैं तो सारणी 7.2 की सहायता से हम पाते हैं कि जड़त्व आघूर्ण का समीकरण $I = (½)\,MR^2$ है। यदि F डोरी के सिरे से जुड़े द्रव्यमान के कारण लगे बल F $(= mg)$ को दर्शाता है, तो $\tau = FR$ तब समीकरण (7.22) देता है:

$$\alpha = \tau/I = FR/I = 2F/MR$$

$$= \frac{2\times(0.1\text{kg})\times(10\text{ms}^{-2})}{(1.0\text{kg})\times(0.1\text{ m})} = 20 \text{ rad s}^{-2}.$$

(ii) जिस कोण पर डिस्क घूमती है, उस कोण की गणना के लिए हम समीकरण (7.16) का प्रयोग करते हैं। क्योंकि प्रारंभिक वेग शून्य है। अतः

$$\theta = (½) \times 20 \times 1.0 = 10 \text{ rad (रेडियन)}$$

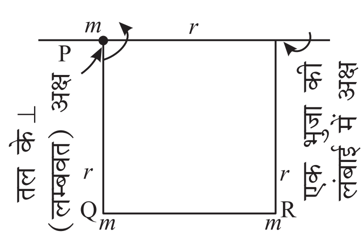
(iii) एक सेकण्ड के बाद वेग की गणना के लिए

$$\omega = \alpha\, t = 20 \times 1.0 = 20 \text{ rad s}^{-1}$$

अब, अपनी प्रगति की जाँच करने के लिए निम्न प्रश्नों के उत्तर दें।

पाठगत प्रश्न 7.3

1. r लम्बाई के एक वर्ग के कोणों पर चार कण रखे हैं जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान **m** है। वर्ग के तल के लम्बवत् एक कोने से होकर जाने वाली अक्ष के गिर्द जड़त्व-आघूर्ण की गणना कीजिए। वर्ग की एक भुजा से होकर जाने वाली अक्ष के गिर्द भी जड़त्व आघूर्ण की गणना कीजिए। अपने उत्तर की जाँच लम्बवत् अक्ष प्रमेय का प्रयोग करके कीजिए।



टिप्पणियाँ

2. एक ठोस गोले की परिभ्रमण-त्रिज्या की गणना कीजिए यदि यह गोला इसके किसी बिन्दु के ऊपर खींची गई स्पर्श रेखा के परित: घूर्णन कर रहा हो। आप सारणी 7.2 का उपयोग कर सकते हैं।

7.4 कोणीय संवेग

सारणी 7.3 से आप जानते हैं कि रेखीय संवेग के तुल्य घूर्णन गति में कोणीय संवेग होता है। इसके भौतिक महत्व को समझने से पूर्व हम चाहते हैं कि आप एक क्रियाकलाप करें।

क्रियाकलाप 7.4

एक ऐसा घूमने वाला स्टूल लीजिए जिसके घूमने में अधिक घर्षण न लगता हो। अपने एक साथी को उसकी बाँहे सिमटवाकर स्टूल पर बिठाइए। स्टूल को तेजी से घुमाइए और उसे घूमता छोड़ दीजिए। घूर्णन की चाल मापिए। अब अपने साथी को बाँहे फैलाने को कहिए और फिर से घूर्णन की चाल मापिए। पुन: अपने साथी को बाँहें समेटने के लिए कहें और स्टूल की चाल में परिवर्तन देखें।

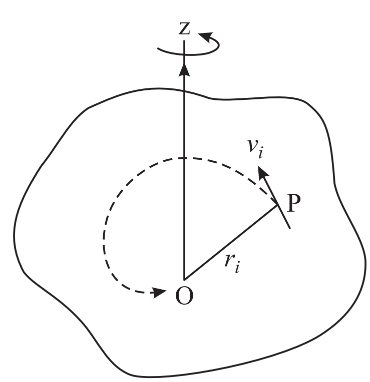
इस प्रयोग में बाँहों को फैलाने और समेटने पर स्टूल की चाल में परिवर्तन क्यों हुआ? आइए, इसे समझें।

मान लीजिए कि एक दृढ़ पिण्ड एक स्थिर बिंदु O से जाने वाले अक्ष(z -अक्ष) के गिर्द घूमता है। पिण्ड के सभी बिन्दु इस अक्ष के चतुर्दिक अपने वृत्ताकार पथों पर घूमते हैं। एक कण P पर विचार करें जो अक्ष से r दूरी पर है (चित्र 7.23)। इस कण का रेखीय वेग $r_i\omega$ ओर रेखीय संवेग $m_i r_i \omega$ है। रेखीय संवेग और अक्ष से दूरी के गुणनफल को कोणीय संवेग कहते हैं। कोणीय संवेग को L से निरुपित करते हैं। दृढ़ पिण्ड के सभी कणों के कोणीय संवेगों को जोड़ लिया जाए तो दृढ़ पिण्ड का कोणीय संवेग

$$L = \sum_i m_i \omega r_i \, r_i = \left(\sum_i m_i \, r_i^2 \right) \omega$$

$$= I\omega \qquad (7.23)$$

ध्यान दीजिए कि सभी कणों का कोणीय वेग बराबर होता है। कोष्ठकों के बीच की राशि जड़त्व आघूर्ण है। रेखीय संवेग की भांति कोणीय संवेग भी सदिश राशि है। समीकरण (7.23) केवल सदिश **L** के घूर्णन-अक्ष की दिशा में घटक को दर्शाती है। यहाँ यह महत्वपूर्ण है कि I को स्थिर अक्ष के संदर्भ में प्रयोग किया जाना चाहिए। कोणीय संवेग का मात्रक kg $m^2 s^{-1}$ है।



चित्र.7.23 : एक बिंदु 'O' के गिर्द एक अक्ष पर घूमता दृढ़ पिंड

याद कीजिए कि ω के परिवर्तन की दर α है। और $I\alpha = \tau$ अतः कोणीय संवेग की परिवर्तन दर बल-आघूर्ण के बराबर है।

सदिश राशियों के निरुपण के रुप में घूर्णन करते दृढ़ पिंड का समीकरण

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \tag{7.24}$$

7.4.1 कोणीय संवेग संरक्षण

समीकरण (7.24) दर्शाता है कि यदि किसी निकाय पर कोई बाह्य परिणामी बल-आघूर्ण शून्य हो, अर्थात $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$, तो निकाय का कुल कोणीय संवेग अचर रहता है। यह कोणीय संवेग संरक्षण का सिद्धान्त है। यह सिद्धांत ऊर्जा संरक्षण, रेखीय संवेग संरक्षण की तरह भौतिकी का एक बहुत महत्वपूर्ण सिद्धांत है। कोणीय संवेग संरक्षण के सिद्धांत से हमें अनेक प्रश्नों के उत्तर मिल जाते हैं। वायु में तैरती खिलौना छतरी की दिशा स्थिर क्यों रहती है? खेल छतरी (खिलौना छतरी) में उसको घुमा देना एक ट्रिक हैं। घुमाव देने से खेल छतरी में कोणीय संवेग उत्पन्न हो जाता है। वायु में छोड़ देने के पश्चात् इस पर कोई बल आघूर्ण नहीं लगता। इसका कोणीय संवेग अचर रहता है। चूँकि कोणीय संवेग एक सदिश राशि है, इसलिए, इसकी दिशा और परिमाण दोनों अचर रहते हैं। अतः खिलौना छतरी जब तक हवा में रहती है, तब तक इसकी दिशा स्थिर रहती है।

घूमने वाले स्टूल के मामले में जब स्टूल पर कोई बल आघूर्ण काम नहीं करता है तो स्टूल और उस पर बैठे व्यक्ति का संवेग संरक्षित रहना चाहिए। जब व्यक्ति अपने हाथ फैलाता है तो तंत्र का जड़त्व आघूर्ण बढ़ जाता है। तब समीकरण (7.23) के अनुसार कोणीय वेग घट जाता है। इसी प्रकार जब वह अपने हाथ सिकोड़ता है, तो निकाय का जड़त्व आघूर्ण कम होता है जिससे कोणीय वेग में वृद्धि होती है। ध्यान दीजिए कि जड़त्व आघूर्ण में अन्तर मूल रुप से घूर्णन अक्ष से कणों की दूरी में परिवर्तन के कारण होता है।

अब संवेग संरक्षण के कुछ और उदाहरणों पर विचार करें। माना हमारे पास M द्रव्यमान की एक गोलाकार गेंद है जिसकी त्रिज्या R है। एक बल आघूर्ण लगाकर इसे घुमा दिया जाता है और फिर बल आघूर्ण को हटा दिया जाता है। ऐसी स्थिति में जब गेंद पर कोई बल-आघूर्ण लग ही नहीं रहा है तो गेंद में जितना भी कोणीय संवेग उत्पन्न हो गया हो, उसे संरक्षित रहना चाहिए। गेंद का जड़त्व आघूर्ण $(2/5)\,MR^2$ है। (सारणी 7.2)। अतः इसका कोणीय संवेग है:

$$L = \frac{2}{5}MR^2\omega \tag{7.25}$$

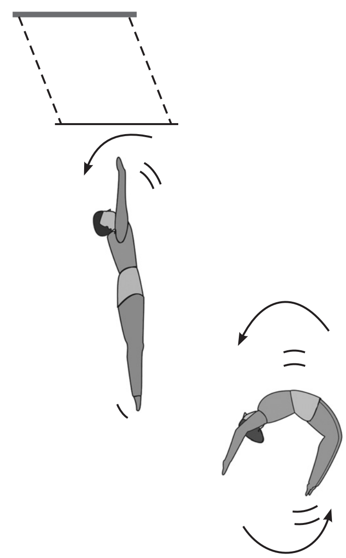
अब कल्पना कीजिए कि गेंद की त्रिज्या किसी प्रकार कम हो जाती है। तब कोणीय संवेग के संरक्षण के लिए ω का मान बढ़ जाना चाहिए और को तेजी से घूमना चाहिए। ऐसा वास्तव में कुछ तारों के साथ होता है; जो कि पल्सर बन जाते हैं (पृष्ठ 174 पर बॉक्स देखें)। यदि गेंद की त्रिज्या अचानक बढ़ जाय तो क्या होगा?

टिप्पणियाँ

आप समीकरण (7.25) की सहायता से दर्शा सकते हैं कि यदि R बढ़ता है तो कोणीय संवेग में संरक्षण के लिए ω का मान बदलना चाहिए। इसकी त्रिज्या की बज़ाय यदि किसी प्रकार निकाय के जड़त्व आघूर्ण का मान बदल जाए तो ω का मान पुनः बदल जाएगा। इसके लिए एक रोचक प्रभाव के लिए निम्न बाक्स को देखिए।

दिन की लंबाई नियत नहीं है।

वैज्ञानिकों ने यह पाया है कि पृथ्वी के अपनी धुरी पर घूर्णन के समय इसके घूर्णन-काल अर्थात दिन की लंबाई में बहुत अल्प अंतराल के और अनियमित परिवर्तन होते हैं। इसके जिस एक कारण का पता चला है- वह है मौसम। मौसम में परिवर्तन के कारण पृथ्वी के वायुमण्डल में बड़े पैमाने की गतिविधियाँ होती हैं जिसके कारण पृथ्वी की अक्ष के चारों ओर द्रव्यमान वितरण में परिवर्तन उत्पन्न होता है और इससे पृथ्वी का जड़त्व-आघूर्ण भी बदल जाता है। चूँकि पृथ्वी का कोणीय वेग $L = I\omega$ संरक्षित रहना चाहिए। इसलिए I के मान में परिवर्तन के फलस्वरुप पृथ्वी की घूर्णन गति अथवा दिन की लंबाई बदलती है।



चित्र.7.24 : गोताखोरी के लिए बने पटल से छलांग लगाता गोताखोर

कलाबाज (Acrobats), स्केटर्स, गोता खोर तथा अन्य खिलाड़ी संवेग संरक्षण के सिद्धांत का शानदार उपयोग करके अपने करतब दिखाते हैं।

राष्टीय और अन्तर्राष्ट्रीय तैराकी प्रतियोगिताओं (जैसे ऐशियाई खेल, ओलम्पिक खेल या राष्ट्रीय खेल में आपने देखा होगा कि गोताखोर कैसे गोताखोरी के लिए बने पटलों से छलांग लगाते हैं। छलांग लगाते समय गोताखोर हवा में अपने शरीर को मोड़ लेता है मोड़ने से उसमें कुछ कोणीय संवेग उत्पन्न होता है। जब गोताखोर हवा में होता है तो उस पर कोई बल-आघूर्ण नहीं लगता है। लेकिन उसका कोणीय संवेग स्थिर रहता है। जब शरीर मोड़ने से R का मान कम हो जाता है और वह तेजी से घूमने लगता है। जब वह शरीर को फैला लेता है तो उसका जड़त्व-आघूर्ण अधिक हो जाता है (चित्र 7.24) और फलतः उसका घूमना धीमा हो जाता है। इस प्रकार शरीर की आकृति में नियंत्रण के फलस्वरुप गोताखोर हवा में अनेक करतब दिखा सकता है।

उदाहरण 7.7 : शीला घूर्णन करते हुए एक मंच के केन्द्र पर खड़ी है। इस मंच में घर्षणरहित बियरिंग लगी हैं। उसके प्रत्येक हाथ में एक 2.0 kg की वस्तु है जो कि निकाय के घूर्णन अक्ष से 1.0 m की समान्तर दूरी पर है। निकाय प्रारंभ में 10 चक्कर/मिनट की चाल से गतिशील है। गणना करें (a) प्रारंभिक कोणीय वेग रेडियन प्रति सेकंड में (b) कोणीय वेग जब वस्तुएँ घूर्णन अक्ष से 0.2 मीटर की दूरी पर लाई जाती हैं (c) निकाय की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन (d) यदि गतिज ऊर्जा में वृद्धि होती है, तो इसका क्या कारण है? (यह मान लें कि शीला और प्लेटफार्म का जड़त्व-आघूर्ण I_{SP} 1.0 kg m^2 है।

हल : (a) 1 चक्कर = 2π radian

$\therefore$ प्रारंभिक कोणीय वेग $\omega = \dfrac{10 \times 2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 1.05 \text{ rad s}^{-1}$

(b) यहाँ पर कोणीय संवेग के सिद्धांत का प्रयोग करना आवश्यक है।

प्रारंभिक जड़त्व आघूर्ण $\quad I_i = I_{SP} + m r_i^2 + m r_i^2$

$$= 1.0 \text{ kg } m^2 + (2.0 \text{ kg}) \times (1m)^2 + (2.0 \text{ kg}) \times (1m)^2$$
$$= 5.0 \text{ kg } m^2.$$

जब वस्तुएं 0.2 m की दूरी पर लाई जाती हैं, तो अंतिम जड़त्व आघूर्ण

$$I_t = I_{SP} + mr_f^2 + mr_f^2$$
$$= 1.0 \text{ kg } m^2 + 2.0 \text{ kg} \times (0.2)^2 m^2 + 2.0 \text{ kg} \times (0.2)^2 m^2$$
$$= 1.16 \text{ kg } m^2.$$

कोणीय संवेग संरक्षण के सिद्धांत के अनुसार,

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

या

$$\omega_f = \frac{I_i \omega_i}{I_f} = \frac{(5.0 \text{ kg } m^2) \times 1.05 \text{ rad s}^{-1}}{1.16 \text{ kg } m^2}$$
$$= 4.5 \text{ rad s}^{-1}$$

(c) माना कि गतिज ऊर्जा में परिवर्तन ΔE है। तब

$$\Delta E = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_i \omega_i^2$$
$$= \frac{1}{2} \times 1.16 \text{ kg } m^2 \times (4.5 \text{ rad s}^{-1})^2 - \frac{1}{2} \times 5.0 \text{ kg } m^2 \times (1.05 \text{ rad s}^{-1})^2$$
$$= 9.05 \text{J}$$

चूँकि अंतिम गतिज ऊर्जा प्रारंभिक गतिज ऊर्जा से अधिक है, इसलिए निकाय की गतिज ऊर्जा बढ़ती है।

(d) जब शीला वस्तुओं को अक्ष की ओर खींचती है, तो निकाय पर कार्य करती है। यह किया गया कार्य निकाय की गतिज ऊर्जा को बढ़ा देता है।

पाठगत प्रश्न 7.4

1. एक हाइड्रोजन अणु दो एकसमान परमाणुओं से बना है। प्रत्येक परमाणु का द्रव्यमान m है और उनके बीच की दूरी d है। यह दूरी स्थिर रहती है। यह अणु दोनों परमाणुओं के बीच के बिन्दु से जाने वाली अक्ष के गिर्द ω कोणीय वेग से घूमता है। अणु के कोणीय संवेग की गणना कीजिए।

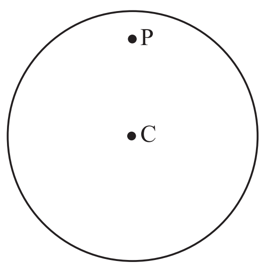
टिप्पणियाँ

2. एक वृताकार डिस्क का द्रव्यमान 2.0 kg और त्रिज्या 20 cm है। यह अपने समतल के लम्बवत व्यास के एक कोने से जाने वाली अक्ष के गिर्द 10 rad s^{-1} के कोणीय वेग से घूमती है। घूर्णन अक्ष के गिर्द इसका कोणीय संवेग निकालिए।

3. अपने ऊर्ध्वाधर अक्ष के गिर्द एक पहिया ω कोणीय चाल से घूम रहा है। एक दूसरा पहिया जिसका द्रव्यमान इसका आधा है लेकिन उतने ही अर्धव्यास का है, वह विराम की अवस्था में है। उसे उसी अक्ष पर लगा दिया जाता है। दोनों पहिए एक ही अक्ष के गिर्द समान चाल से घूमने लगते हैं। पहियों के घूमने की इस समान कोणीय चाल की गणना करें।

4. ऐसा कहा जाता है कि गैस के बादलों के सिमटने से पृथ्वी का निर्माण हुआ है। कल्पना कीजिए भूतकाल में इसकी त्रिज्या वर्तमान त्रिज्या की 25 गुनी थी। तब इसका अपनी अक्ष के गिर्द घूर्णन काल कितना था? गणना करें।

7.5 युगपत् कोणीय और स्थानान्तरीय गतियाँ



चित्र.7.25

हम देख चुके हैं कि यदि एक बिंदु किसी दृढ़ वस्तु पर स्थिर न हो, तो इसकी कोणीय और स्थानान्तरीय दोनों गतियाँ संभव हैं। एक दृढ़ वस्तु में सामान्यतया ये दोनों गतियाँ होती हैं। एक गाड़ी के पहिए की एक क्षैतिज समतल पर गति के बारे में विचार करें। मान लें कि आप एक वृत्तीय पृष्ठ का अवलोकन कर रहे हैं (चित्र 7.25) आप अपना ध्यान एक बिंदु P तथा वृत्तीय पृष्ठ के केन्द्र C पर केन्द्रित करें। इस पहिये का द्रव्यमान केन्द्र भी C पर है। जब यह लुढ़कता है तो आप देखते हैं कि बिंदु P बिंदु C के गिर्द घूर्णन करता है और बिंदु C भी गति की दिशा में गतिशील रहता है। अत: पहिए की स्थानान्तरीय एवं घूर्णन दोनों प्रकार की गतियाँ होती हैं। यदि द्रव्यमान केन्द्र C का रेखीय वेग υ_{cm} हो तो स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा

$$(KE)_{tr} = \frac{1}{2} M \upsilon_{cm}^2 \qquad (7.26)$$

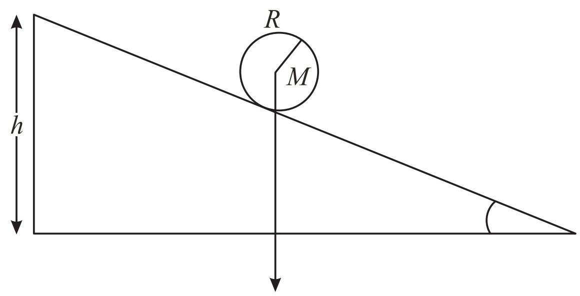
जहाँ पर M वस्तु का द्रव्यमान है। यदि ω घूर्णन की कोणीय चाल हो तो, घूर्णन गतिज ऊर्जा

$$(KE)_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (7.27)$$

जहाँ पर I जड़त्व आघूर्ण है। स्थानान्तरीय एवं घूर्णन गति के फलस्वरुप कुल गतिज ऊर्जा इन दोनों के योग के बराबर होगी। आनत तल पर लुढ़की वस्तु संयुक्त स्थानान्तरीय एवं घूर्णन गति का एक मनोरंजक उदाहरण है।

उदाहरण 7.8 : मान लीजिए एक दृढ़ पिंड जिसका द्रव्यमान M, त्रिज्या R और जड़त्व आघूर्ण I है। यह h ऊँचाई के आनत समतल पर लुढ़कता है (चित्र 7.25)। पिंड अपनी यात्रा के अंत

में रेखीय वेग υ और कोणीय वेग ω प्राप्त कर लेता है। घर्षण के ऊर्जा ह्रास को नगण्य मान लें। υ का मान h के पदों में प्राप्त करें।



चित्र.7.26 : एक आनत तल पर दृढ़ निकाय की गति

हल : ऊर्जा संरक्षण के नियम के अनुसार स्थानांतरीय व घूर्णन गतियों के कारण गतिज ऊर्जा, पिण्ड के आनत समतल के ऊपरी सिरे पर स्थितिज ऊर्जा के बराबर होनी चाहिए। अत:

$$(½)\, M\upsilon^2 + ½\, \mathrm{I}\, \omega^2 = M\, g\, h \qquad (7.28)$$

यदि गति पूर्णत: लोटनिक हो और फिसलन न हो तो $\upsilon = R\,\omega$

इस व्यंजक को समीकरण (7.28) में रखने पर, हमें प्राप्त होगा:

$$\frac{1}{2} M\, \upsilon^2 + \frac{1}{2}\, I\, \frac{\upsilon^2}{R^2} = M\, g\, h \qquad (7.29)$$

यदि दृढ़ पिण्ड एक छल्ला हो तो इसका जड़त्व आघूर्ण अपने अक्ष के गिर्द MR^2 होता है। देखिए (सारणी 7.2)

तब समीकरण (7.29) से $\frac{1}{2} M\, \upsilon^2 + \frac{1}{2}\, \frac{M\, R^2\, \upsilon^2}{R^2} = M\, g\, h$

अथवा $$\upsilon = \sqrt{g\, h} \qquad (7.30)$$

क्या इस समीकरण में आप कोई मनोरंजक बात पाते हैं? छल्ले का रेखीय वेग, उसके द्रव्यमान एवं त्रिज्या से स्वतंत्र है अर्थात् छल्ला किसी भी पदार्थ का हो और उसकी त्रिज्या कितनी भी हो, वह नत समतल पर समान चाल से लुढ़कता है।

पाठगत प्रश्न 7.5

1. एक ठोस गोला किसी नत समतल पर बिना फिसलते हुए लुढ़कता है। नत समतल की ऊँचाई के पदों में इसके वेग की गणना कीजिए।

2. एक ठोस बेलन आनत समतल पर बिना फिसलते हुए लुढ़कता है। इसकी गतिज ऊर्जा का कौन सा भाग स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा है? h ऊँचाई के नत समतल से लुढ़कने के बाद इसके वेग के परिमाण की गणना करे।

3. एक 10 cm त्रिज्या और 2 kg द्रव्यमान का गोला, एक आनत तल पर जो क्षैतिज से 30^0 का कोण बनाता है, छोड़ा जाता है। इसका (a) कोणीय त्वरण, (b) नत समतल पर रेखीय त्वरण और (c) नत समतल पर 2 मीटर चलने पर इसकी गतिज ऊर्जा की गणना कीजिए।

पल्सर्स (Pulsars) का रहस्य

पल्सर्स कोणीय संवेग संरक्षण का एक मनोरंजक उदाहरण प्रस्तुत करते हैं। ये वह तारे होते हैं, जो हमारी ओर अत्यधिक तीव्रता के विकिरण स्पंद भेजते हैं। स्पंद आवर्ती होते हैं और इनकी आवर्तता अत्यंत परिमार्जित (परिशुद्ध) होती है।

आवर्तकाल की परिसीमा एक सेकण्ड के लाखवें भाग से लेकर कई सेकण्ड तक होती हैं। इतने कम आवर्तकाल यह प्रदर्शित करते हैं कि ये तारे बहुत तेजी से घूम रहे हैं। इन तारों का अधिकतम भाग न्यूट्रॉनों से बना होता है न्यूट्रॉन तथा प्रोट्रॉन परमाणु नाभिक की निर्माण इकाइयाँ हैं)। इन तारों को न्यूट्रॉन तारा कहा जाता है। ये तारे अपने जीवन के अंतिम पड़ाव में होते हैं। तेजी से घूमने का रहस्य उनके छोटे साइज़ का होना है। एक विशेष न्यूट्रॉन तारे की त्रिज्या केवल 10 km होती है। इसकी सूर्य की त्रिज्या (7×10^5 km) से तुलना कीजिए। सूर्य अपनी अक्ष पर 25 दिन में घूमता है (घूर्णन आवर्तकाल 25 दिन है)। कल्पना कीजिए कि बिना द्रव्यमान में परिवर्तन किए सूर्य अचानक सिकुड़कर न्यूट्रॉन तारे के आकार का हो जाए तो अपने कोणीय संवेग को संरक्षित रखने के लिए सूर्य के घूर्णन का आवर्तकाल एक मिलीसेकंड से भी कम हो जाएगा।

आपने क्या सीखा

- एक दृढ़ पिण्ड की घूर्णन एवं स्थानांतरीय गतियाँ होती हैं।
- एक दृढ़ पिण्ड के स्थानान्तरीय गति के लिए समीकरण – एकल कण की गति के समीकरणों की भाँति होता है, जिसकी गति द्रव्यमान केन्द्र की गति को दर्शाती है।
- यदि किसी दृढ़ पिण्ड का एक बिंदु स्थिर हो तो यह केवल घूर्णन गति कर सकता है।
- घूर्णन अक्ष के गिर्द जड़त्व आघूर्ण $\sum_i m_i r_i^2$ द्वारा परिभाषित किया जाता है।
- घूर्णन गति में जड़त्व आघूर्ण की वैसी ही भूमिका है, जैसी रेखीय गति में द्रव्यमान की होती है।
- एक दृढ़ पिण्ड पर लगे बल F का घुमाव प्रभाव बल आघूर्ण $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ होता है।
- समान किन्तु विपरीत दिशाओं में लगे दो बल बल-युग्म बनाते हैं। बल युग्म का परिमाण एक बल और बलों की क्रिया रेखा के बीच की लम्बवत् दूरी का गुणनफल होता है।
- बाह्य बल आघूर्ण लगने से पिण्ड का कोणीय संवेग बदल जाता है।

- यदि सभी बाह्य बल आघूर्णों का योग शून्य हो तो पिण्ड का कोणीय संवेग अचर रहता है।

- जब एक बेलनाकार या एक गोलाकार (पिंड) एक आनत समतल पर बिना फिसले हुए लुढ़कता है, तब उसकी चाल उसके द्रव्यमान और त्रिज्या पर निर्भर नहीं करती है।

पाठान्त प्रश्न

1. पिण्ड के भार Mg को सामान्यतया इस प्रकार लिया जाता है कि वह पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र पर लगता है। क्या इसका यह अर्थ है कि पृथ्वी पिण्ड के अन्य कणों को आकर्षित नहीं करती है?

2. क्या यह संभव है कि पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र पिंड के बाहर स्थित हो? अपने उत्तर की पुष्टि में कोई दो उदाहरण दीजिए।

3. कार्बन मोनोक्साइड (CO) के अणु में दोनों परमाणुओं के नाभिकों के बीच की दूरी 1.13×10^{-10} मीटर है। अणु के द्रव्यमान केन्द्र का स्थान निर्धारित करें।

4. 100 rad s^{-1} के कोणीय वेग से 5.0 kg द्रव्यमान और 0.20 m व्यास का चक्की का पहिया घूम रहा है। इसकी गतिज ऊर्जा की गणना कीजिए। स्वतंत्रतापूर्वक गिरने की स्थिति में इसे कितनी ऊँचाई से इतनी गतिज ऊर्जा की प्राप्ति के लिये गिरना चाहिए। ($g = 10.0$ m s^{-2} लें)

5. 2 चक्कर प्रति सेकंड चक्कर प्रति सेकंड^2 प्रारंभिक कोणीय वेग से एक स्थिर अक्ष के गिर्द 1.0 m व्यास का पहिया घूम रहा है। इसका कोणीय त्वरण 3 चक्कर प्रति सेकंड^2

   (a) 2 सेकण्ड बाद कोणीय वेग की गणना कीजिए।

   (b) इतने समय में पहिया कितने कोण से घूम गया?

   (c) समय $t = 2$ सेकण्ड पर पहिये के रिम पर किसी बिन्दु पर स्पर्शीय वेग की गणना कीजिए।

   (d) समय $t = 2$ सेकण्ड पर पहिये के रिम पर एक बिन्दु का परिणामी त्वरण निकालिए।

6. 20 रेडियन/सेकंड के कोणीय वेग से घूम रहे एक पहिए को 4.0 सेकण्ड में एक अचर बल आघूर्ण के लगाने से विराम अवस्था में कर दिया जाता है। यदि घूर्णन अक्ष के गिर्द जड़त्व आघूर्ण 0.20 kg m^2 हो तो प्रथम दो सेकण्ड में बल आघूर्ण द्वारा किया जाने वाला कार्य निकालिए।

7. एक एक्सल में दो पहिए A एवं B लगे हैं। पहिये A का जड़त्व आघूर्ण 5×10^{-2} kg m^2 है तथा पहिये B का जड़त्व आघूर्ण 0.2 kg m^2 है। पहिया A 600 चक्कर प्रति सेकंड के हिसाब से घूमता है जबकि पहिया B स्थिर रखा जाता है। दोनों पहियों को एक क्लच से जोड़ दिया जाता है, ताकि वे साथ-साथ घूम सकें।

टिप्पणियाँ

(a) वे किस चाल से घूमेंगे?

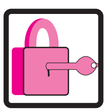
(b) क्लच के जोड़े जाने के बाद और क्लच को जोड़ने से पहले घूर्णन गतिज ऊर्जाओं की तुलना कीजिए।

(c) क्लच के कार्य करने की अवधि में यदि A, 10 चक्कर लगाता हो तो क्लच कितना बल-आघूर्ण लगाता है।

8. आपको देखने में एक जैसे दो गोल पिण्ड दिए गए हैं और यह कहा गया है कि उनमें से एक खोखला है। कौन-सा गोला खोखला है, इसका पता लगाने का कोई तरीका बताएं?

9. एक पहिए का जड़त्व आघूर्ण 1000 kg m^2 इसके घूर्णनों को एक समान त्वरित किया जाता है। किसी समय में इसका कोणीय वेग 10 रेडियन/सेकंड है। 100 रेडियन के कोण से जब पहिया घूम जाता है, तब पहिए का कोणीय वेग 100 रेडियन/सेकण्ड हो जाता है। पहिए पर लगने वाले बल-आघूर्ण की गणना कीजिए तथा गतिज ऊर्जा में परिवर्तन की भी गणना कीजिए।

10. 1.0 kg द्रव्यमान और 10 cm अर्धव्यास की एक डिस्क अपनी अक्ष के गिर्द घूम रही है। विराम अवस्था से इसे एकसमान रुप से त्वरित किया जाता है। प्रथम सेकण्ड की अवधि में यह 2.5 रेडियन घूमती है। दूसरे सेकण्ड में यह कितने कोण से घूम जाएगी? डिस्क पर लगने वाले बल आघूर्ण का परिमाण निकालिए।



पाठगत प्रश्नों के उत्तर

7.1

1. हाँ, क्योंकि फ्रेम के बिंदुओं के बीच की दूरियाँ नहीं बदल सकती।

2. नहीं, क्योंकि कोई हलचल रेत के कणों के बीच की दूरी को बदल सकती है। अतः रेत के ढेर को एक दृढ़ वस्तु नहीं समझा जा सकता है।

7.2

1. पाँच द्रव्यमानों के निर्देशांक A (–1, –1), B (–5, –1), C (6, 3), D (2, 6) तथा E (–3, 0) हैं और उनके द्रव्यमान क्रमशः 1 kg , 2 kg , 3 kg, 4 kg और 5 kg हैं।

अतः द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक

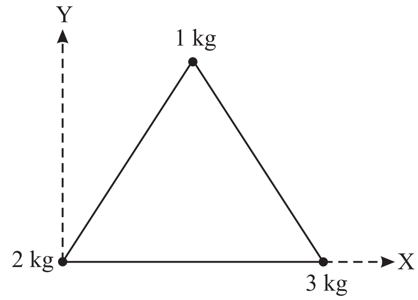
$$x = \frac{-1\times1-5\times2+6\times3+2\times4-3\times5}{1+2+3+4+5} = 0$$

$$y = \frac{-1\times1-1\times2+3\times3+4\times6+0\times5}{1+2+3+4+5} = \frac{30}{15} = 2.0$$

2. माना कि तीनों कणों वाले निकाय को निम्न चित्र की भाँति दर्शाया गया है जहाँ पर बिन्दु A (मूल बिंदु पर) 2 kg की द्रव्यमान स्थिति है।

$$x = \frac{2\times0+1\times0.5+3\times1}{1+2+3} = \frac{3.5}{6}\text{ m} = 0.5\text{ m}$$

$$y = \frac{2\times0+1\times\frac{\sqrt{3}}{2}+3\times0}{1+2+3} = \frac{\sqrt{3}}{12}\text{ m}$$



अतः द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक $\frac{3.5}{6}, \frac{\sqrt{3}}{12}$ हैं।

3. माना दोनों कण x-अक्ष में स्थित हैं और उनके x– निर्देशांक 0 और x है। द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक

$$\mathrm{X} = \frac{m_1\times0+m_2\times x}{m_1+m_2} = \frac{m_2x}{m_1+m_2}, \mathrm{Y} = 0$$

X m_1 की द्रव्यमान केन्द्र से दूरी है। m_2 की द्रव्यमान केन्द्र से दूरी

$$x - \mathrm{X} = x - \frac{m_2x}{m_1+m_2} = \frac{m_1x}{m_1+m_2}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{X}}{x+\mathrm{X}} = \frac{m_2}{m_1}$$

अतः कणों की द्रव्यमान केन्द्र से दूरियाँ द्रव्यमानों के व्युत्क्रम अनुपात में हैं।

7.3

1. वर्ग के तल के लंबवत् एक कोने से होकर जाने वाली अक्ष के गिर्द

   निकाय का जड़त्व आघूर्ण

   $= m\,r^2 + m\,(2\,r^2) + m\,r^2 = 4\,m\,r^2$

   एक भुजा के गिर्द जड़त्व आघूर्ण $= m\,r^2 + m\,r^2 = 2\,m\,r^2$

   सत्यापन : QP के गिर्द जड़त्व आघूर्ण $= m\,r^2 + m\,r^2 + 2\,m\,r^2$. अब लम्बवत् अक्ष प्रमेय के समीकरण के अनुसार – अक्ष SP के गिर्द जड़त्व आघूर्ण $= (2mr^2)$ + अक्ष QP 2 $m\,r^2$ से गुजरने वाली और तल के लम्बवत् अक्ष के गिर्द जड़त्व आघूर्ण। क्योंकि यह सत्य है इसलिए परिणाम सत्यापित हुए।

2. ठोस गोले की स्पर्शरेखा के गिर्द ठोस गोले का जड़त्व आघूर्ण

   $= \frac{2}{5}\,M\,R^2 + M\,R^2 = \frac{7}{5}\,M\,R^2$ है। (समान्तर अक्ष के प्रमेय द्वारा)

$M K^2 = \frac{7}{5} M R^2$ यदि परिभ्रमण त्रिज्या K हो तो

$$K = R\sqrt{\frac{7}{5}}$$

7.4

1. कोणीय संवेग

$$L = m\frac{d^2}{4} + m\frac{d^2}{4} \quad \omega$$

$$L = \frac{m\,d^2\omega}{2}$$

2. कोणीय संवेग एक घूर्णन अक्ष (व्यास) के गिर्द

$$L = I\,\omega = m\,\frac{r^2}{4} \times \omega$$

चूँकि छल्ले के इसके व्यास के गिर्द जड़त्व आघूर्ण $= \frac{m\,r^2}{4}$

$$\therefore L = 20 \text{ kg} \times \frac{(0.2)^2 m^2}{4} \times 10 \text{ rad s}^{-1} = 0.2 \text{ kg m}^2 \text{s}^{-1}.$$

3. कोणीय संवेग संरक्षण के अनुसार

$$I_1\omega = (I_1 + I_2)\,\omega_1$$

जहाँ I_1 मूल पहिये का जड़त्व आघूर्ण और I_2 दूसरे पहिये का जड़त्व आघूर्ण है। ω प्रारंभिक कोणीय चाल और ω_1 उभयनिष्ठ अंतिम कोणीय चाल

$$m\,r^2\,\omega = \quad m\,r^2 + \frac{m}{2}r^2 \quad \omega_1$$

$$\omega = \frac{3}{2}\,\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{2}{3}\,\omega$$

4. माना कि पृथ्वी का वर्तमान परिक्रमण समय T तथा प्रारंभिक परिक्रमण समय T_0 है। कोणीय संवेग संरक्षण के अनुसार

$$\frac{2}{5}M\,(25\,R)^2 \times \left(\frac{2\pi}{T_0}\right) = \frac{2}{5}\,M\,R^2 \times \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{2}{5}\,M\,R^2 \times \frac{2\pi}{T}$$

$T_0 = 6.25\ T$

अतः भूतकाल में पृथ्वी के परिक्रमण का समय $T_0 = 6.25 \times$ वर्तमान परिक्रमण समय।

7.5

1. समीकरण ($I = \frac{2}{5} M R^2$) का प्रयोग करने पर एक ठोस गोले के लिए

$$\frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{2} I\,\omega^2 = m\,g\,h$$

या, $$\frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} m\,r^2 \,.\, \frac{\upsilon^2}{r^2} = m\,g\,h$$

$\because \omega = \upsilon/r.$

इससे $\upsilon = \sqrt{\frac{10}{7}.g\,h}$

2. एक ठोस बेलन के लिए $I = \frac{m\mathrm{R}^2}{2}$

$\therefore$ कुल गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2} m\,\upsilon^2 + \frac{1}{2} I\,\omega^2 = \frac{1}{2} m\,\upsilon^2 + \frac{1}{2}\,\frac{m\mathrm{R}^2}{2} \,.\, \frac{\upsilon^2}{\mathrm{R}^2} = \frac{3}{4} m\,\upsilon^2$

$\because \omega = \upsilon/r$

अतः स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा का भाग $= \dfrac{\frac{1}{2} m\,\upsilon^2}{\frac{3}{4} m\,\upsilon^2} = \dfrac{2}{3}$

ऊपरी प्रश्न 1 के उत्तर की भाँति $\upsilon = \sqrt{\frac{4}{3} g\,h}$

पाठान्त प्रश्नों के उत्तर

3. कार्बन परमाणु से 0.64 Å की दूरी पर
4. 125 J, 2.5 m
5. (a) $16\,\pi$ rad s^{-1} (b) $20\,\pi$ rad (c) 25 m s^{-1} (d) 1280 m s^{-2}
6. 30 J
7. (a) $4\,\pi$ rad s^{-1} (b) $E_i = 5\,E_f$ (c) $49\,\pi$ N m
9. $T = 5 \times 10^4$ N m, $KE = 5 \times 10^6$ J
10. 7.5 rad, $\tau = 5 \times 10^{-2}$ J

उच्चतर माध्यमिक पाठ्यक्रम
भौतिकी
विद्यार्थी मूल्यांकन पत्र – 1

अधिकतम अंक : 50 **समय : $1\frac{1}{2}$ घंटा**

निर्देश

- सभी प्रश्नों के उत्तर कागज की पृथक शीट पर दीजिए।
- अपनी उत्तर पुस्तिका पर निम्नलिखित सूचनाएं दीजिए
  - नाम
  - पंजीयन संख्या
  - विषय
  - मूल्यांकन पत्र संख्या
  - पता
- अपने मूल्यांकन पत्र का मूल्यांकन अपने अध्ययन केन्द्र के विषयाध्यापक से करायें ताकि आपको उनसे अपने कार्य के संबंध में धनात्मक प्रतिक्रिया प्राप्त हो सके।

अपना मूल्यांकन पत्र NIOS को न भेजें

1. यह दर्शाने के लिए एक उदाहरण दीजिए कि किसी गतिमान कण का औसत वेग तो शून्य हो सकता है परन्तु इसका औसत वेग शून्य नहीं हो सकता। (1)
2. प्रक्षेप्य गति में उच्चतम बिन्दु पर पिंड का वेग क्षैतिज क्यों हो जाता है? (1)
3. क्या गुरूत्व के अंतर्गत गिरते पिंड के लिए रेखीय संवेग के संरक्षण का नियम लागू किया जा सकता है? समझाईये। (1)
4. दरवाजों पर हैंडिल कब्जों से अधिकतम दूरी पर क्यों लगाये जाते हैं? (1)
5. चन्द्रमा पर वायुमंडल क्यों नहीं है? (1)
6. सरल रेखा में नियत बल के अंतर्गत गतिमान पिंड का वेग-समय ग्राफ बनाइए। (1)
7. 20 cm त्रिज्या की डिस्क की परिभ्रमण-त्रिज्या उसके केन्द्र से गुजरने वाली एवं तल के लम्बवत् अक्ष के परितः ज्ञात कीजिए। (2)
8. एक हल्के और एक भारी द्रव्यमान की वस्तु की गतिज ऊर्जाएं समान हैं, इनमें किसका रेखीय संवेग अधिक होगा? (1)

9. 10 इकाई परिमाण का एक सदिश **A** एवं 6 इकाई परिमाण का दूसरा सदिश **B** एक दूसरे से 60^0 का कोण बनाते हैं। इन सदिशों का अदिश गुणांक एवं सदिश गुणांक का परिमाण ज्ञात कीजिए। (2)

10. कोई फुटबाल खिलाड़ी 0.5 kg द्रव्यमान की गेंद को $10 m s^{-1}$ के अधिकतम वेग से ठोकर (kick) मार सकता है। वह ठोकर मार कर इस गेंद को अधिकतम कितनी क्षैतिज दूरी तक पहुंचा सकता है? (2)

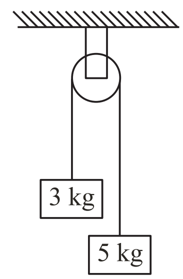
11. किसी कण का विस्थापन $y = at + bt^2$ द्वारा व्यक्त किया जा सकता है, जहां a एवं b अचरांक हैं एवं t समय है। b/a का विमीय सूत्र ज्ञात कीजिए।

12. किसी छड़ी की सेकंड की सुई की लंबाई 10 cm है। इसके सिरे (T.P.) की चाल की गणना कीजिए। (2)

13. यदि प्रकृति में आये किसी विलक्षण परिवर्तन के कारण पृथ्वी का आयतन इसके वर्तमान आयतन का $1/8^{th}$ हो जाता है तो एक दिन की अवधि कितनी हो जायेगी? (4)

14. किसी काल्पनिक ग्रह का सूर्य से परितः परिक्रमण काल 100 वर्ष हो तो इस ग्रह की सूर्य से दूरी की गणना कीजिए। आप सूर्य से पृथ्वी तक की दूरी 1.5×10^{11} m ले सकते हैं। (4)

15. 2 kg द्रव्यमान का कोई गुटका एक समतल पृष्ठ पर रखा है। क्षैतिज से तल के झुकाव को बदला जा सकता है। जब क्षैतिज से इसका झुकाव 30^0 होता है तो गुटका ठीक गति के लिए सन्नद्ध होता है। तल का क्षैतिज से झुकाव 45^0 होने पर गुटका जिस त्वरण से नीचे आयेगा। उसकी गणना कीजिए। (4)



16. दो किलोग्राम द्रव्यमान के एक पिंड पर, जो विरामावस्था में है, 20 N का नियत बल 2s तक लगाया जाता है। प्रारंभ से 3s की समयावधि में यह पिंड कितनी दूरी तय करेगा?
(4)

17. किसी स्प्रिंग के लिए भार-विस्थापन ग्राफ बनाइए। आप इस ग्राफ को किस प्रकार उपयोग में लायेंगे
    (i) स्प्रिंग का बल-नियतांक ज्ञात करने के लिए
    (ii) स्प्रिंग को x-दूरी तक संपीडित करने के लिए?

18. 3 kg एवं 5 kg के दो द्रव्यमान एक द्रव्यमान रहित डोरी से जुड़े हैं और डोरी को चित्र में दर्शाये अनुसार एक घर्षण रहित घिरनी के ऊपर से गुजारा गया है। डोरी में तनाव एवं 3 kg द्रव्यमान के त्वरण की गणना कीजिए। (4)

19. तीन छड़ें, जिनमें प्रत्येक का प्रति इकाई द्रव्यमान $1 kg m^{-1}$ एवं लंबाई 20 cm है, मिलकर एक समबाहु त्रिभुज बनाती हैं। इस प्रणाली के (i) द्रव्यमान केन्द्र एवं (ii) द्रव्यमान केन्द्र से गुजरती और तल के अभिलंबवत् अक्ष के परितः जड़त्व-आघूर्ण का निर्धारण कीजिए। (5)

20. m द्रव्यमान के विरामावस्था में रखे पिंड से m द्रव्यमान का ही दूसरा पिंड u वेग से टकराता है। संघट्ट के पश्चात प्रत्येक पिंड का परिमाण एवं दिशा ज्ञात कीजिए। (5)

मॉड्यूल - 2

ठोसों एवं तरलों की यांत्रिकी

8

ठोस के प्रत्यास्थ गुण

पिछले अध्यायों में आप किसी बल के प्रभाव से किसी वस्तु में होने वाले विस्थापन का अध्ययन कर चुके हैं। किसी वस्तु पर लगाया गया बल उस वस्तु के साइज या आकृति या दोनों को परिवर्तित कर सकता है। उदाहरण के लिए जब किसी धातु की कमानी पर इसकी लम्बाई के अनुदिश उपयुक्त बल लगाया जाता है तो इसकी आकृति एवं साइज़ दोनों में परिवर्तन हो जाता है। जब बल हटा लिया जाता है तो यह अपनी पूर्वावस्था में आ जाती है। अब आप गीली चिकनी मिट्टी या पिघले हुए मोम से बनी किसी वस्तु पर बल लगाएँ। क्या लगाया गया बल हटा देने पर वे अपने पूर्व स्थिति को प्राप्त कर लेते हैं? नहीं, वे अपनी मूल आकृति या साइज़ प्राप्त नहीं कर पाती। इस प्रकार कुछ वस्तुएँ अपनी पूर्व आकृति एवं साइज़ दोबारा प्राप्त कर लेती हैं जबकि कुछ वस्तुओं के मामले में ऐसा नहीं होता है। वस्तुओं का ऐसा व्यवहार उनके एक गुण पर निर्भर करता है, जिसे **प्रत्यास्थता** कहते हैं।

पदार्थों की प्रत्यास्थ प्रकृति (गुण) का हमारे दैनिक जीवन में काफी महत्व है। इसकी सहायता से आप किसी वस्तु जैसे कार, क्रेन, लिफ्ट आदि को लटकाने में प्रयुक्त होने वाले केबलों (रज्जुओं) की सामर्थ्य को ज्ञात कर सकते हैं। इस गुण का प्रयोग भवनों और पुलों के निर्माण में प्रयुक्त दंडो (बीमों) की सामर्थ्य का पता लगाने में किया जाता है। इस इकाई में आप प्रत्यास्थ परिवर्तनों की प्रकृति एवं इनकी व्याख्या करना सीखेंगे।

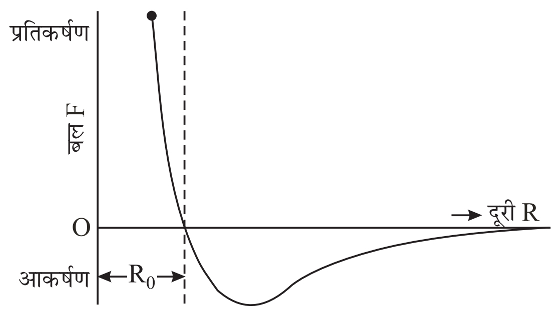
उद्देश्य

इस अध्याय के अध्ययन के बाद आप:

- पदार्थ के आणविक सिद्धांत के आधार पर पदार्थ की तीन अवस्थाओं में भेद कर सकेंगे;
- प्रत्यास्थ एवं प्लास्टिक (सुघट्य) वस्तुओं में भेद कर सकेंगे;
- प्रतिबल और दाब में भेद कर सकेंगे;
- किसी प्रत्यास्थ ठोस के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र का अध्ययन कर सकेंगे;
- यंग का गुणाँक, आयतन गुणाँक, दृढ़ताँक एवं प्वासों अनुपात को परिभाषित कर सकेंगे; और
- किसी स्पिंग की प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक व्युत्पन्न कर सकेंगें।

8.1 द्रव्य का आणविक सिद्धांत: अंतरा-अणुक बल

हम जानते हैं कि प्रत्येक पदार्थ परमाणुओं और अणुओं से मिलकर बना होता है। परमाणुओं और अणुओं के बीच कार्यरत बल से द्रव्यों की संरचना का निर्धारण होता है। अणुओं के बीच अन्योन्यक्रिया बलों को अंतरा-अणुक बल कहते हैं।



चित्र. 8.1 : अंतरा-अणुक बल और अंतरा-अणुक पार्थक्य के बीच ग्राफ

अंतरा-अणुक बल और अंतरा-अणुक अन्तराल के बीच विचरण के ग्राफ को चित्र 8.1 में दिखाया गया है। जब दो अणुओं के बीच पार्थक्य अधिक होता है, तो उनके बीच आकर्षण बल लगता है जिसका परिमाण कम होता है। जब अणुओं के बीच पार्थक्य घटता है, तो कुल आकर्षण बल एक सीमा तक बढ़ता है और इसके परे बल प्रतिकर्षक (Repulsive) हो जाता है। R_0 दूरी पर दो अणुओं के बीच लगने वाला बल शून्य होता है। यह पार्थक्य (R) साम्य पार्थक्य कहलाता है।

अत: यदि अंतरा-अणुक पार्थक्य $R > R_0$ तो अणुओं के बीच आकर्षक बल कार्य करता है। जब $R < R_0$ तब अणुओं के बीच प्रतिकर्षक बल कार्य करता है।

ठोस पदार्थ में, साम्य पार्थक्य की अवस्था में अणु एक-दूसरे के काफी निकट होते हैं (⊔ 10^{-10} m) उच्च अंतरा-आणविक बलों के कारण वे अपनी स्थिति पर लगभग स्थिर रहते हैं। अब आप समझ सकते हैं कि किसी ठोस पदार्थ का आकार निश्चित क्यों होता है। द्रवों में, अणुओं के बीच औसत पार्थक्य थोड़ा अधिक होता है, तो आकर्षण बल क्षीण होता है, और अणु तुलनात्मक रूप से द्रव पदार्थ के संपूर्ण द्रव्यमान के भीतर गतिशील रहने के लिए अधिक स्वतंत्र रहते हैं। अब आप समझ सकते हैं कि द्रव पदार्थों का आकार निश्चित क्यों नहीं होता है। द्रव पदार्थ जिस बरतन में रखे जाते हैं उसी की आकृति ग्रहण कर लेते हैं। गैसों में अंतरा-आणविक पार्थक्य बहुत ज्यादा होता है और आणविक बल काफी क्षीण होता है (लगभग नगण्य)। अणु किसी बर्तन में गति करने के लिए पूर्णस्वतंत्र होते हैं। इसलिए गैसों का आयतन और आकृति निश्चित नहीं होते।

परमाणु के विषय में प्राचीन भारतीय दृष्टिकोण

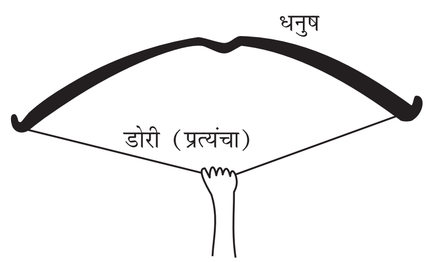
संसार में परमाणु की संकल्पना प्रतिपादित करने वाले कणाद प्रथम व्यक्ति थे। उनका जीवन काल ईसा से लगभग छह शताब्दी पूर्व का है। वे प्रभास (इलाहाबाद के पास) के निवासी थे।

उनके अनुसार, ब्रह्माण्ड की प्रत्येक वस्तु परमाणु या अणु से बनी है। ये शाश्वत एवं अविनाशी हैं। परमाणु संयोजन करके विभिन्न अणुओं का निर्माण करते हैं। यदि दो परमाणु मिलकर अणु बनाते हैं तो इसे द्विअणुक और तीन परमाणुओं से मिलकर बने अणु को त्रिअणुक कहते हैं। वे 'वैशेषिक सूत्र'' के लेखक थे। परमाणुओं के साइज़ का अनुमान भी लगाया गया था। बुद्ध की जीवनी (ललिताविस्तार) में भी परमाणु का साइज़ अनुमानित था। वहाँ इसे 10^{-10} m की कोटि का आँका गया था, जो कि परमाणु के वर्तमान काल में आँके गए साइज़ के काफी सन्निकट है।

8.2 प्रत्यास्थता

आपने ध्यान दिया होगा कि जब किसी वस्तु पर बाह्य बल का प्रयोग किया जाता है तो इसकी आकृति या साइज़ (अथवा दोनों) बदल जाते हैं अर्थात विरूपण उत्पन्न हो जाता है। विरूपण कितना होता है यह वस्तु के पदार्थ, आकृति और बाह्य बल पर निर्भर करता है। जब विरुपण करने वाले बल हट जाते हैं तो वस्तु अपनी पुरानी आकृति और साइज़ प्राप्त करने का प्रयास करती है।

उदाहरण के तौर पर आप स्प्रिंग पर कोई भार लटका दें तो इसकी लम्बाई में परिवर्तन आ जाता है और भार हटा देने पर वह अपनी पूर्वावस्था में आ जाती है। इसी प्रकार यदि रबर की गेंद को दबाया जाए तो वह दब जाती है और दाब हटा लेने पर अपनी पूर्वावस्था में आ जाती है। इसी प्रकार यदि धनुष की डोरी पर बल लगाएँ तो इसकी आकृति बदल जाती है और बल हटा देने पर यह अपनी पूर्वावस्था में आ जाता है (चित्र 8.2)।



चित्र 8.2 : धनुष की डोरी पर लगाए गए बल से उसकी आकृति में परिवर्तन हो गया है

किसी वस्तु का वह गुण जिसके फलस्वरूप विरूपक बल हटाने पर वस्तु पुन: अपनी मूल आकृति एवं साइज़ (आमाप) प्राप्त कर लेती है, **प्रत्यास्थता** कहलाता है।

8.2.1 प्रत्यास्थ एवं सुघट्य वस्तुएँ

एक वस्तु जो विरूपक बल के हटने पर पूर्ण रूप से अपनी पूर्वावस्था में आ जाती है, **पूर्ण प्रत्यास्थ** कहलाती है। दूसरी ओर, यदि विरूपक बल हटा लेने कोई वस्तु अपने मूल आकृति में आने की कोई प्रवृत्ति नहीं रखती और अपने परिवर्तित रूप में ही रह जाती है, तो उसे **पूर्ण सुघट्य** कहते हैं। तथापि,व्यवहार में सभी वस्तुएँ इन्हीं दो सीमाओं के बीच ही व्यवहार करती हैं। प्रकृति में न तो कोई पूर्ण प्रत्यास्थ वस्तु है और न ही कोई पूर्ण सुघट्य वस्तु। क्वार्टज रेशे को लगभग पूर्ण प्रस्यास्थ माना जा सकता है और सामान्य पुट्टी पूर्ण सुघट्य है। जो वस्तु

विरूपण का जितना विरोध करती है, वह उतनी ही प्रत्यास्थ होती है। नि:संदेह प्रत्यास्थ विरूपण विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी के लिए काफी महत्वपूर्ण है, लेकिन यांत्रिक प्रक्रियाओं में प्लास्टिक विरूपण भी महत्वपूर्ण है। आपने धातुओं पर मोहर लगाने की, धातु के टुकड़ो को मोड़ने और ढोकने-पीटने की प्रक्रियाएं देखी होंगी। ये सभी कार्य प्लास्टिक विरूपण के कारण ही संभव है। प्रस्थ्यास्थता की व्याख्या अंतरा-अणुक बलों के पदों द्वारा की जा सकती है।

8.2.2 प्रत्यास्थता का आणविक सिद्धान्त

जैसा कि आप जानते हैं कि ठोस वस्तु एक निश्चित क्रम में व्यवस्थित बहुत से परमाणुओं से निर्मित होती है। प्रत्येक परमाणु पर उसके आस-पास के परमाणुओं के बलों का प्रभाव पड़ता है। अंतरापरमाणुक बलों के कारण ठोस की ऐसी आकृति बनी रहती है कि प्रत्येक परमाणु स्थिर साम्य अवस्था में रहता है। जब वस्तु निरूपित हो जाती है, तो परमाणु अपनी मूल दशा से हट जाते हैं और उनकी अंतरापरमाणुक दूरियाँ बदल जाती हैं। यदि विकृति में पार्थक्य उनके साम्य पार्थक्य से बढ़ जाता हैं (अर्थात, $(R > R_0)$ तो प्रबल आकर्षण बल उत्पन्न होते हैं और इसके विपरीत, यदि उनकी अंतरापरमाणुक दूरी घट जाती है (अर्थात्, $R < R_0$), तो प्रबल प्रतिकर्षण बल उत्पन्न होते हैं। इन बलों को **प्रत्यानयन बल** कहते हैं। ये बल परमाणुओं को अपनी पूर्व स्थिति में ले आते हैं। ठोस वस्तु के परमाणुओं के व्यवहार की तुलना एक ऐसे तंत्र से की जा सकती है जिसमें गेंदे स्प्रिंगों से जुड़ी हों।

अब हम उन तरीकों का अध्ययन करते हैं जिनसे वस्तु को विरूपित करने के लिए बल लगाए जाते हैं।

8.2.3 प्रतिबल

जब किसी वस्तु पर कोई बाह्य बल या कोई बाह्य बल-तंत्र लगाया जाता है, तो वस्तु की आकृति या साइज़ में लगाए जाने वाले बल की प्रकृति के अनुसार परिवर्तन होता है। हम पहले व्याख्या कर चुके हैं कि विरूपण की प्रक्रिया में, अपनी साम्यावस्था से अणुओं के विस्थापन के कारण आतंरिक प्रत्यानयन बल उत्पन्न हो जाता है। यह बल विरूपण का विरोध करता है।

विरूपित वस्तु के अनुप्रस्थ परिच्छेद के प्रति इकाई क्षेत्र पर कार्य करने वाले आतंरिक प्रत्यानयन बल को प्रतिबल कहा जाता है।

साम्यावस्था में प्रत्यानयन बल परिमाण में विरूपक बल के समान होता है तथा इसकी दिशा बाह्य विरूपक बल की दिशा के विपरीत होती है। इसी कारण प्रतिबल को साम्यावस्था में आने पर अनुप्रस्थ परिच्छेद के प्रति इकाई क्षेत्र में लगने वाले बाह्य बल द्वारा मापा जाता है। यदि विरूपक बल का परिमाण F है और यह A क्षेत्रफल में कार्यरत है, तो इसे निम्न प्रकार से लिख सकते हैं-

$$\text{प्रतिबल} = \frac{\text{प्रत्यानयन बल}}{\text{क्षेत्रफल}} = \frac{\text{विरूपक बल } (F)}{\text{क्षेत्रफल } (A)}$$

या
$$\text{प्रतिबल} = \frac{F}{A} \qquad (8.1)$$

प्रतिबल का मात्रक Nm^{-2} है। प्रतिबल, अनुदैर्ध्य, अभिलम्बवत् या अपरुपक हो सकता है। आइए, इनके बारे में क्रमशः जानें।

(i) **अनुदैर्ध्य प्रतिबल :** यदि विरूपक बल वस्तु की लंबाई की दिशा में हो, तो उत्पन्न प्रतिबल **अनुदैर्ध्य प्रतिबल** कहलाता है। चित्र 8.3 (a) और चित्र 8.3 (b).

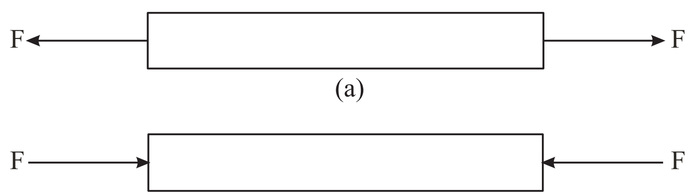
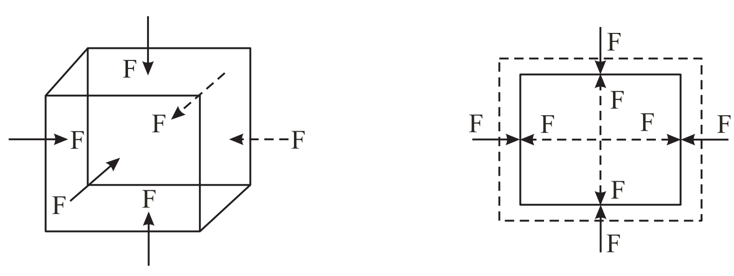


Fig 8.3 (a) : तनन प्रतिबल (b) संपीडन प्रतिबल

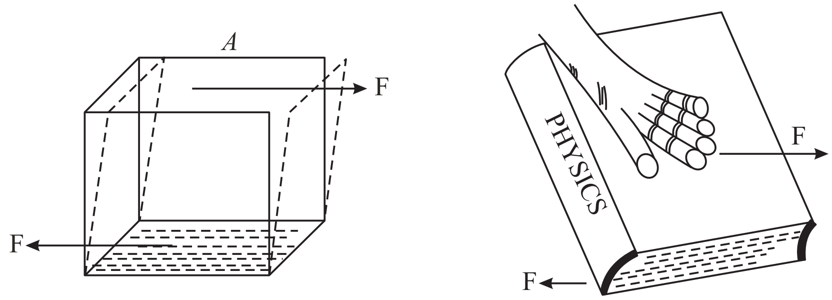
(ii) **अभिलम्बवत् प्रतिबलः** यदि विरूपक बल वस्तु के संपूर्ण सतह पर समान एवं लंबवत् लगाया जाए जिससे कि वस्तु की आकृति में परिवर्तन न हो, लेकिन आयतन में परिवर्तन हो जाए (चित्र 8.4) तो इस प्रकार उत्पन्न प्रतिबल को अभिलम्बवत् प्रतिबल कहा कहा जाता है। आप वस्तु की संपूर्ण सतह पर एक समान दाब लगाकर अभिलंबवत् प्रतिबल उत्पन्न कर सकते हैं। किसी सतह के अभिलंबवत प्रति इकाई क्षेत्रफल में कार्य करने वाला विरूपक बल दाब कहलाता है, जबकि सतह के अभिलंब प्रति इकाई क्षेत्रफल पर उत्पन्न आंतरिक प्रत्यानयन बल को **प्रतिबल** कहते हैं।



(a) (b)

चित्र. 8.4 : अभिलम्बत् प्रतिबल

(iii) **अपरूपक प्रतिबल :** यदि विरूपक बल सतह के समान्तर या स्पर्शरेखीय ढंग से कार्य करता है (चित्र 8.5 a) जिससे कि वस्तु के आयतन में परिवर्तन हुए बिना आकृति में परिवर्तन हो जाता है, तो इस प्रकार का प्रतिबल अपरुपक प्रतिबल कहलाता है। अपरूपक प्रतिबल का एक उदाहरण चित्र 8.5(b) में दर्शाया गया है जिसमें पुस्तक को तिरछे ध क्का दिया जाता है। इसके विपरीत फलक को घर्षण रोके रखता है।

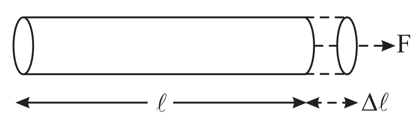


चित्र. 8.5: (a) अपरूपक प्रतिबल (b) पुस्तक को किनारे से खिसकाना

8.2.4 विकृति (Strain)

विरूपक बलों से वस्तु की विमाओं में परिवर्तन हो जाता है। सामान्य रूप से **वस्तु की विमा में प्रति इकाई विमा परिवर्तन (जैसे लंबाई, आकार या आयतन) को विकृति कहते हैं।** यह दो सदृश्य राशियों का अनुपात होने के कारण विमाहीन राशि है। विरूपक बल के लगाए गए प्रकार के अनुसार, विकृति तीन प्रकार की होती हैं, (1) रेखीय विकृति (2) आयतन विकृति और (3) अपरूपक विकृति।

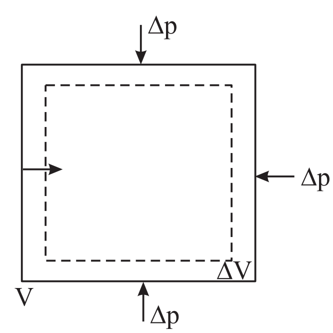
(i) **रेखीय विकृति :** यदि अनुदैर्घ्य अपरूपक बल के उपयोग से किसी वस्तु की लंबाई ℓ में $\Delta\ell$ परिवर्तन होता है (चित्र 8.6) तो



चित्र. 8.6: रेखीय विकृति

$$\text{रेखीय विकृति} = \frac{\text{लंबाई में परिवर्तन}}{\text{मूल लंबाई}} = \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

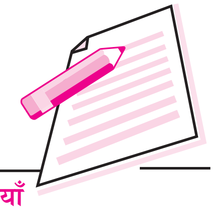
(ii) **आयतन विकृति :** जब एक समान दाब Δp के प्रयोग से किसी वस्तु की आकृति में परिवर्तन हुए बिना उसके आयतन V में ΔV परिवर्तन हो (चित्र 8.7) तब



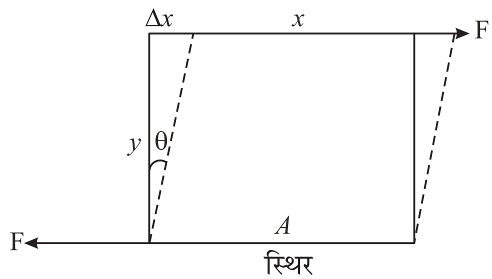
चित्र. 8.7: आयतन विकृति

$$\text{आयतन विकृति} = \frac{\text{आयतन में परिवर्तन}}{\text{मूल आयतन}} = \frac{\Delta V}{V}$$

(iii) **अपरूपक विकृति:** जब अपरूपक बल स्पर्श रेखीय (चित्र 8.8) हो, तो अपरूपक विकृति उस कोण द्वारा ज्ञात की जाती है जो निश्चित तल पर एक लंब रेखा विरूपण के बाद बनाती है, यदि कोण का मान बहुत कम हो, तो



$$\theta = \frac{\Delta x}{y}$$



चित्र. 8.8 : अपरूपक विकृति

8.2.5 धातु तार के लिए प्रतिबल-विकृति

एकसमान अनुप्रस्थ परिच्छेद वाले धातुतार पर बाह्य बल बढ़ते भार के क्रम में लगाने पर पर उसकी विकृति के साथ प्रतिबल दर्शाने वाला वक्र चित्र 8.9 में दर्शाया गया है। हम इस वक्र में उन क्षेत्रों और बिंदुओं का अध्ययन करेंगे जिनका विशिष्ट महत्व है।

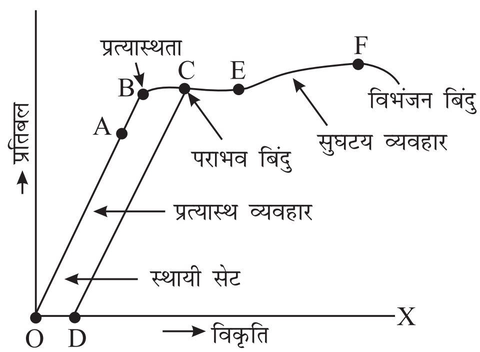


Fig. 8.9: एक इस्पात के तार के लिए प्रतिबल विकृति वक्र

(i) **समानुपातिक क्षेत्र OA:** वक्र का OA भाग सीधी रेखा है जिससे पता चलता है कि इस क्षेत्र में प्रतिबल विकृति के समानुपातिक है और वस्तु का व्यवहार पूर्ण रूप से प्रत्यास्थ वस्तु के सदृश है।

(ii) **प्रत्यास्थता सीमा** : यदि विकृति को A थोड़ा और बढ़ा दिया जाए तो प्रतिबल विकृति के पूर्णरूपेण समानुपाती नहीं होता है। तथापि, तार प्रत्यास्थ रहता है, अर्थात्, विरूपक बल (भार) को हटा देने पर यह अपनी मूल स्थिति में आ जाता है। विकृति का अधिकतम मान, जहां तक वस्तु (तार) में प्रत्यास्थ गुण रहता है, **प्रत्यास्थता सीमा** कहलाता है। प्रत्यास्थता सीमा के परे कोई भी वस्तु प्लास्टिक वस्तु जैसा व्यवहार करती है।

(iii) **बिन्दु** C : जब तार को सीमा B से अधिक खींचा जाता है तो विकृति अधिक तेजी से बढ़ती है और वस्तु प्लास्टिक (सुघट्य) हो जाती है। इसका अर्थ यह हुआ कि विरुपक बल हटाने के बाद भी तार अपनी मूलावस्था में नहीं आ पाएगा। भार को धीरे-धीरे कम करने पर वस्तु (तार) बिंदुकित पथ को अपनाती है। ऐसा चित्र में CD रेखा को देखकर

समझा जा सकता है। शून्य भार की स्थिति में तार में शेष विकृति को **स्थायी सेट** कहते हैं। बिंदु E के बाद तार का विस्तार ज्यों का त्यों बना रहता है। उसमें कोई कमी नहीं होती।

(iv) **विभंजन बिन्दु** F : बिन्दु E से आगे विकृति और तेजी से बढ़ती है और बिन्दु F के समीप तार की लंबाई, बल में वृद्धि के बिना भी लगातार होती है। इस बिन्दु पर तार टूट जाता है। इस बिंदु F को **विभंजन बिन्दु** या **विभंग बिंदु** कहते हैं।

विभंजन बिंदु F पर प्रतिबल को **विभंजन प्रतिबल** या **तनन क्षमता** कहते हैं। प्रत्यास्थ सीमा के अंदर एक वस्तु पर लगाया जा सकने वाला अधिकतम प्रतिबल कार्य प्रतिबल कहलाता है, और कार्य प्रतिबल तथा विभंजक प्रतिबल का अनुपात **सुरक्षा कारक** कहलाता है। ब्रिटेन में इसका मान 10 और अमेरिका में 5 लिया जाता है। हमने ब्रिटेन का मानदंड अपनाया है। यदि प्रत्यास्थता सीमा और विभंजन बिंदु के बीच विरूपण काफी अधिक हो जाता है तो पदार्थ **तन्य** कहलाता है। यदि पदार्थ प्रत्यास्थता सीमा को पार करते ही टूट जाता है तो वह **भंगुर** कहलाता है, जैसे काँच।

8.2.6 रबड़ के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र

यदि आप रबड़ की डोरी को इसकी मूल लंबाई से कई गुना ज्यादा खींचे तो बल के हटाने पर यह अपनी मूल लंबाई पर आ जाती है। अर्थात, इसका प्रत्यास्थ क्षेत्र बड़ा है और इसमें सुपरिभाषित प्लास्टिक प्रवाह क्षेत्र (Plastse flow region) नहीं है। ऐसे पदार्थ जिनके विकृति के मान काफी बड़े होते हैं- इलैस्टोमर (Elastomer) अथवा प्रत्यास्थलक कहलाते है। यह गुण उनके आणविक विन्यास के कारण होता है। चित्र 8.10 में दो बातें मुख्य रूप से नोट करने लायक हैं। प्रथम, आप देख सकते हैं कि इस वक्र का कोई भी भाग विकृति के समानुपाती नहीं है। दूसरा, जब विरूपक बल धीरे-धीरे कम किया जाता है तो मूल वक्र पथ का अनुगमन नहीं होता है जबकि यह प्रतिदर्श (Sample) अंत में अपनी मूल लंबाई में आ जाता है। पदार्थ विरूपित अवस्था से मूल स्थिति में आने में कुछ कम कार्य करता है अर्थात, पदार्थ को विरूपित करने में किया गया कार्य अधिक होता है। इस प्रकार इस चक्र में कुछ ऊर्जा अवशोषित हो जाती है, जो ऊष्मा के रूप में प्रकट होती है। (इसे आप रबड़ को अपने होठों से छुआकर महसूस कर सकते हैं)। इस परिघटना को प्रत्यास्थ्य शैथिल्य (elastic hysteresis) कहते हैं।

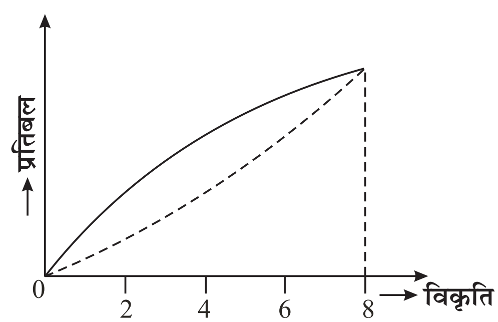


Fig. 8.10: रबड़ के लिए विकृति-प्रतिबल वक्र

प्रत्यास्थ शैथिल्य का प्रघात-अवशोषकों (Shock absorbes) में महत्वपूर्ण योगदान है। विरूपक बल द्वारा ऊर्जा का जो भाग स्थानान्तरित होता है, वह प्रघात-अवशोषक में संचित हो जाता है,

केवल एक छोटा भाग ही उस निकाय को संचरित होता है जो कि प्रघात अवशोषक से जुड़ा रहता है।

8.2.7. इस्पात रबड़ से अधिक प्रत्यास्थ है

एक बड़ा विरूपक बल लगाने पर किसी वस्तु में यदि बहुत कम विकृति उत्पन्न होती है, तो वह वस्तु अधिक प्रत्यास्थ कहलाती है। यदि हम दो एक समान रबड़ और इस्पात के तार लें और दोनों में समान विरूपक बल का प्रयोग करें तो आप पाऐंगे कि इस्पात के तार में रबड़ के तार की अपेक्षा लंबाई में कम वृद्धि हुई है। लेकिन इस्पात के तार में व रबड़ के तार में समान विकृति पैदा करने के लिए इस्पात के तार में अधिक प्रतिबल लगेगा। इस्पात के विरूपण के लिए अत्यधिक प्रतिबल की आवश्यकता यह दर्शाती हे कि इस्पात में उत्पन्न आंतरिक प्रत्यानयन बल रबड़ की अपेक्षा अधिक है। अत: इस्पात रबड़ से अधिक प्रत्यास्थ है।

उदाहरण 8.1 : एक मीटर लंबे तार के सिरे से 100 kg का भार लटकाया जाता है। यदि तार 0.20cm खिंचता है, तो (i) तनन प्रतिबल और (ii) तार में विकृति की गणना कीजिए $g = 9.80$ ms^{-2}.

हल :

$$\text{(i) तनन प्रतिबल} = \frac{F}{A} = \frac{Mg}{A} = \frac{(100\,kg)\,(9.80\,ms^{-2})}{0.10\times10^{-4}\,m^2}$$

$$= 9.8 \text{ x } 10^7\,Nm^{-2}$$

$$\text{(ii) तनन विकृति} = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{0.20\times10^{-2}\,m}{1.0\,m}$$

$$= 0.20 \times 10^{-2}$$

उदाहरण 8.2 : स्टील तार की अधिकतम लंबाई ज्ञात कीजिए जिसे टूटे बिना लटकाया जा सकता है, यदि भंजन प्रतिबल = $4.0 \text{ x } 10^8\ Nm^{-2}$, घनत्व = $7.9 \times 10^3\ kg\ m^{-3}$ और $g = 9.80\ ms^{-2}$

हल : तार का भार $W = A\ell\rho g$, जहाँ, A तार का अनुप्रस्थ परिच्छेद है, ρ तार का घनत्व, और ℓ अधिकतम लंबाई है। तार के अपने भार के कारण उत्पन्न प्रतिबल = $\frac{W}{A} = \rho lg =$ *भंजन प्रतिबल*

दिया गया है भंजन प्रतिबल = $4.0 \text{ x } 10^8\ Nm^{-2}$. अत:

$$\ell = \frac{4.0\times10^8\,Nm^{-2}}{(7.9\times10^3\,kg\,m^{-3})\,(9.8\,ms^{-2})}$$

$$= 0.05 \times 10^5\,m$$

$$= 5 \times 10^3\ m = 5\ km.$$

अब आप एक विराम लेकर अपनी प्रगति की जाँच कर सकते हैं।

पाठगत प्रश्न 8.1

1. अंतर-आणविक बलों की प्रकृति किस प्रकार प्रभावित होगी यदि किसी वस्तु पर लगाया गया विरुपक बल (i) अंतर-आणविक पृथक्करण को बढ़ाता है। (ii) अंतर-आणविक पृथक्करण को घटाता है?

2. यदि किसी छड़ के एक सिरे को दृढ़तापूर्वक जकड़ दिया जाय और इसके दूसरे सिरे के अनुप्रस्थ परिच्छेद पर लम्बवत बल लगाया जाए तो प्रतिबल एवं विकृति किस प्रकार की होगी?

3. धातु तार के कम विरूपण के लिए प्रतिबल/ विकृति का अनुपात स्थिर रहता है। जब विरूपण अधिक हो जाता है, तो बताइए कि यह अनुपात घटेगा या बढ़ेगा?

4. किन परिस्थितियों में प्रतिबल को भंजन प्रतिबल कहा जाता है?

5. यदि 4 kg द्रव्यमान को ऊर्ध्वाधर 4 m लम्बे व 0.64 mm व्यास के तार से लटकाने पर इसकी लंबाई में 0.60 mm की वृद्धि होती है, तो तनन प्रतिबल और विकृति ज्ञात करें।

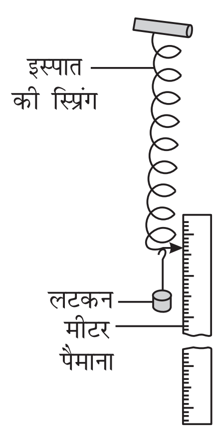
8.3 हुक का नियम

1678 में राबर्ट हुक ने कई ठोस पदार्थो के लिए प्रयोग करके विकृति और प्रतिबल वक्र प्राप्त किए और प्रत्यास्थता का नियम प्रतिपादित किया। उन्हीं के नाम पर इस नियम को हुक का नियम कहते हैं। इस नियमानुसार, प्रत्यास्थता सीमा में प्रतिबल विकृति के समानुपाती होता है।

$$\text{अर्थात, प्रतिबल } \alpha \text{ विकृति}$$

या
$$\frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}} = \text{स्थिराँक } (E) \qquad (8.2)$$

किसी पदार्थ की प्रत्यास्थता का मापक स्थिरांक समानुपातिकता E को **प्रत्यास्थता गुणांक** (modulus of elasticity) कहा जाता है। क्योंकि विकृति अविमीय राशि है, अत: प्रत्यास्थता गुणांक की विमा (या मात्रक) भी प्रतिबल की भांति ही हैं। इसका मान प्रतिबल तथा विकृति पर निर्भर नहीं करता, लेकिन यह वस्तु की प्रकृति पर निर्भर करता है। इसे देखने के लिए आप निम्नलिखित क्रियाकलाप कर सकते हैं।



चित्र. 8.11:हुक के नियम के लिए उपकरण

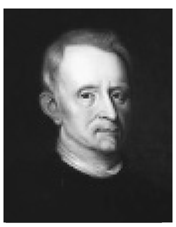
क्रियाकलाप 8.1

एक स्टील की स्प्रिंग लेकर इसका ऊपरी सिरा दीवार में लगे किसी दृढ अवलंब से स्थिर कर दीजिए और इसके किनारे पर एक मीटर स्केल लगा दीजिए (चित्र 8.11)। इसके निचले सिरे पर 100

ग्राम का एक भार लटका दें (100gm भार लगभग 1N बल के तुल्य होता है)। इस बल के कारण स्प्रिंग में हुई लम्बाई में वृद्धि को मापें। अब इस पर 100–100 ग्राम के क्रम में भार बढ़ाते जाए। प्रत्येक बार स्प्रिंग में हुई लम्बाई की वृद्धि को मापें। इस प्रकार 500 ग्राम तक भारों को बढ़ाने तक के प्रेक्षण लें। अब भार और लंबाई में वृद्धि का आरेखन करें। ग्राफ की आकृति कैसी है? क्या यह हुक के नियम का पालन करता है? ग्राफ एक सीधी रेखा होनी चाहिए। यह इंगित करता है कि भार तथा विस्तारण का अनुपात स्थिर है। इस क्रिया को रबड़ के तारों और अन्य पदार्थों के साथ दोहराइए।

आपको यह जानकारी होनी चाहिए कि हुक के नियम का पालन करने वाले पदार्थ स्प्रिंग तुलाओं या बल मापकों के रूप में प्रयुक्त होते हैं जैसा चित्र 8.11में दर्शाया गया है। आपने देखा होगा कि जब भी पलड़े में भार रखा जाता है, तो स्प्रिंग की लंबाई बढ़ती हैं। लंबाई में यह वृद्धि एक संकेतक द्वारा पैमाने पर दर्शाई जाती है और बल (भार) में वृद्धि मापन के लिए प्रयोग की जा सकती है।

रॉबर्ट हुक
(1635 – 1703)



सत्रहवीं शताब्दी के मेधावी प्रयोगकर्ता रॉबर्ट हुक, न्यूटन के समकालीन थे। उनकी विविध क्षेत्रों में रूचियाँ थीं और उन्होंने भौतिकी, खगोलिकी तकनीकी विज्ञान, जीव विज्ञान, भूविज्ञान, जीवाश्म विज्ञान, स्थापत्यकला और समुद्रयान तकनीकी के क्षेत्र में योगदान दिया। इसके अलावा उन्हें सर्वदिशी संधि, श्वसक का प्रारंभिक स्वरूप, आइरिस डायफ्राम, घंडियों के लिए संतुलक, स्प्रिंग व घड़ी का वह पुर्जा जो सबसे छोटे पहिऐ के एक दाँते को हटाता हुआ गति उत्पन्न करता है– बनाने का श्रेय जाता है। 1666 में लंदन ने लगी बड़ी आग के बाद प्रमुख सर्वेक्षक के रूप में इन्हें लंदन के पुनर्निर्माण का श्रेय जाता है। उन्होंने प्रत्यास्थता के नियम का प्रतिपादन किया और दहन का समुचित सिद्धांत दिया। इन्होंने मौसम संबंधी उपकरणों की खोज की और उनमें सुधार भी किया जैसे दाबमापी, पवन वेगमापी और आर्द्रतामापी)।

8.3.1 प्रत्यास्थता गुणाँक

पिछले खण्डों में आप पढ़ चुके हैं कि विकृति तीन प्रकार की होती है। अतः यह स्पष्ट है कि तीन विकृतियों के अनुरूप तीन प्रत्यास्थता–गुणांक होने चाहिए–रैखिक विकृति के लिए यंग का गुणांक आयतन विकृति के लिए आयतन प्रत्यास्थता गुणांक और अपरूपण विकृति के लिए अपरूपण गुणांक या दृढ़तांक (moodulus of rigidity)।

(i) **यंग का गुणांक:** अनुदैर्ध्य प्रतिबल और अनुदैर्ध्य विकृति के अनुपात को वस्तु का यंग का गुणांक कहा जाता है। मान लीजिए लंबाई ℓ और अनुप्रस्थ परिच्छेद के क्षेत्रफल A वाले तार पर एक अनुदैर्ध्य बल लगाया जाता है। इस बल F के कारण तार खिंचता है। मान लीजिए इसके फलस्वरूप तार की लंबाई में परिवर्तन ΔL हो जाता है।

तब,

$$\text{अनुदैर्ध्य प्रतिबल} = \frac{F}{A}$$

और

$$\text{अनुदैर्ध्य विकृति} = \frac{\Delta L}{L}$$

अत:

$$\text{यंग का गुणांक } Y = \frac{F/A}{\Delta L/L} = \frac{F \times L}{A \times \Delta L}$$

यदि यह तार एक दृढ़ आधार से ऊर्ध्वाधर लटकाया जाए और एक द्रव्यमान M इसके एक सिरे पर लटकाया जाए तथा तार की त्रिज्या r हो तो, $A = \pi r^2$ और $F = M g$.

$$\therefore \qquad Y = \frac{M\,g\,L}{p\,r^2 D L} \qquad (8.3)$$

Y के SI मात्रक हैं $N\,m^{-2}$। यंग के गुणांक का मान कुछ विशिष्ट द्रव्यमानों के लिए तालिका संख्या 8.1 में दिया गया है। इससे पता चलता है कि ताँबे की तुलना में इस्पात कहीं अधिक प्रत्यास्थ होता है।

सारणी 8.1 कुछ विशिष्ट द्रव्यमानों के लिए यंग का गुणांक

पदार्थ का नाम	Y ($10^9 Nm^{-2}$)
एलुमीनियम	70
ताँबा	120
लोहा	190
इस्पात	200
काँच	65
अस्थि	9
पोलीस्ट्रीन	3

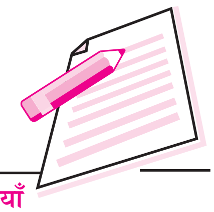
(ii) **आयतन प्रत्यास्थता गुणाँक:** अभिलम्ब प्रतिबल तथा आयतन विकृति के अनुपात को वस्तु का आयतन प्रत्यास्थता गुणाँक कहते हैं।

यदि ΔP दाब वृद्धि के कारण वस्तु के आयतन V में, बिना आकार परिवर्तन के ΔV की कमी होती है, तो

$$\text{अभिलम्ब प्रतिबल} = \Delta P$$

$$\text{आयतन विकृति} = \Delta V/V$$

$$\text{आयतन प्रत्यास्थता गुणांक } B = \frac{\Delta P}{\Delta V/V} = V\frac{\Delta P}{\Delta V} \qquad (8.4)$$



किसी वस्तु के आयतन प्रत्यास्थता गुणांक के व्युत्क्रम को संपीड्यता कहा जाता है। यदि संपीड्यता को k से दर्शाएँ तो

$$k = \frac{1}{B} = \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta P} \qquad (8.5)$$

गैंसे सबसे अधिक संपीड्य और सबसे कम प्रत्यास्थ होती हैं, जबकि ठोस सबसे कम संपीड्य और सबसे अधिक प्रत्यास्थ होते हैं।

$$B_{\text{ठोस}} > B_{\text{द्रव}} > B_{\text{गैस}}$$

(iii) **दृढ़तांक या अपरूपण गुणांक:** अपरूपण प्रतिबल और अपरूपण विकृति के अनुपात को वस्तु के पदार्थ का दृढ़तांक या अपरूपण गुणांक कहा जाता है।

यदि स्पर्श रेखीय बल F क्षेत्र A पर कार्य करे और θ अपरूपण विकृति हो, तो

$$\text{दृढ़ताँक } \eta = \frac{\text{अपरूपण प्रतिबल}}{\text{अपरूपण प्रतिबल}} = \frac{F/A}{\theta} = \frac{F}{A\theta} \qquad (8.6)$$

आपको यह ज्ञात होना चाहिए कि ठोस एवं तरल दोनों के आयतन प्रत्यास्थ गुणाँक होते हैं। लेकिन तरलों के लिए यंग गुणांक और विकृति गुणांक नहीं होते क्योंकि एक तरल तनन प्रतिबल या अपरूपण प्रतिबल को सहन नहीं कर सकता है।

उदाहरण 8.3 : एक $0.1\ \text{cm}^2$ अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल वाली एक स्टील की तार की लंबाई को 50%. बढ़ाने के लिए आवश्यक बल की गणना करें। दिया है $Y = 2 \times 10^{11}\ \text{N m}^{-2}$.

हल : तार की लंबाई में वृद्धि = 50%. यदि ΔL लंबाई में वृद्धि और L तार की सामान्य लंबाई हो तो

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \qquad Y = \frac{F \times L}{A \times \Delta L}$$

या

$$F = \frac{Y \times A \times \Delta L}{L} = \frac{(2\times10^{11}\text{Nm}^{-2})\,(0.1\times10^{-4}\text{m}^2)\times1}{2}$$

$$= 0.1 \times 10^7\ \text{N} = 10^6\ \text{N}$$

उदाहरण 8.4 : जब एक ठोस रबड़ की गेंद को झील की सतह से उसके नीचे तल तक लाया जाता है तो इसके आयतन में 0.0012 %. की कमी होती है! झील की गहराई 360 m, है। झील जल का घनत्व $10^3\,\text{kgm}^{-3}$ है और गुरुत्व जनित त्वरण $10\ \text{m s}^{-2}$. है। रबड़ का आयतन प्रत्यास्थ गुणांक निकालिए।

हल :

गेंद पर दाब की वृद्धि P $= h\rho g = 360\text{m} \times 10^3\,\text{kgm}^{-3} \times 10\ \text{ms}^{-3}$

$= 3.6 \times 10^6\ \text{Nm}^{-2}$

$$\text{आयतन विकृति} = \frac{\Delta V}{V} = \frac{0.0012}{100} = 1.2 \times 10^{-5}$$

$$\text{आयतन प्रत्यास्थ गुणांक } B = \frac{PV}{\Delta V} = \frac{3.6\times10^{6}}{1.2\times10^{-5}} = 3.0 \times 10^{11}\,\text{Nm}^{-2}$$

8.3.2 प्वासों अनुपात (Poisson's Ratio)

आपने ध्यान दिया होगा कि जब एक रबड़ की ट्यूब को इसकी लंबाई की दिशा में खींचा जाता है तो इसके व्यास में संकुचन हो जाता है (चित्र 8.12)। यह तार के लिए भी सत्य है। हालांकि यह उतना स्पष्ट दृष्टिगोचर नहीं होता है। तार की लंबाई लगाए गए बल की दिशा में बढ़ती है। संकुचन इसमें लंब दिशा में होता है। प्रयुक्त बल के लंब दिशा की विकृति को **पार्श्व विकृति** कहते हैं। प्वासों ने दर्शाया कि प्रत्यास्थता सीमा के अंतर्गत पार्श्व विकृति अनुदैर्ध्य विकृति की समानुपाती होती है।

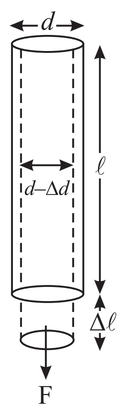


Fig: 8.12 : एक खिंची हुई रबड़ की ट्यूब

किसी वस्तु के पदार्थ के लिए पार्श्व विकृति एवं अनुदैर्ध्य विकृति का अनुपात स्थिरांक होता है, इसे प्वासों अनुपात कहा जाता है और यह यूनानी अक्षर σ (सिग्मा) द्वारा दर्शाया जाता है। यदि α और β क्रमशः अनुदैर्ध्य और पार्श्व विकृतियाँ हो तो प्वासों अनुपात

$\sigma = \beta / \alpha$.

यदि ℓ लंबाई और d व्यास के तार (दंड या नली) पर तनन बल के लगाने से उसकी लंबाई में $\Delta\ell$ की वृद्धि और व्यास में Δd, की कमी हो जाए तो

$$\text{रैखिक विकृति} = \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

$$\text{पार्श्व विकृति} \qquad \beta = \frac{\Delta d}{d}$$

$$\text{प्वासों अनुपात} \quad \sigma = \frac{\Delta d/d}{\Delta\ell/\ell} = \frac{\ell}{d}\,\frac{\Delta d}{\Delta\ell} \qquad (8.7)$$

चूंकि प्वासों अनुपात दो विकृतियों का अनुपात है, यह विमाहीन राशि है और एक शुद्ध संख्या है।

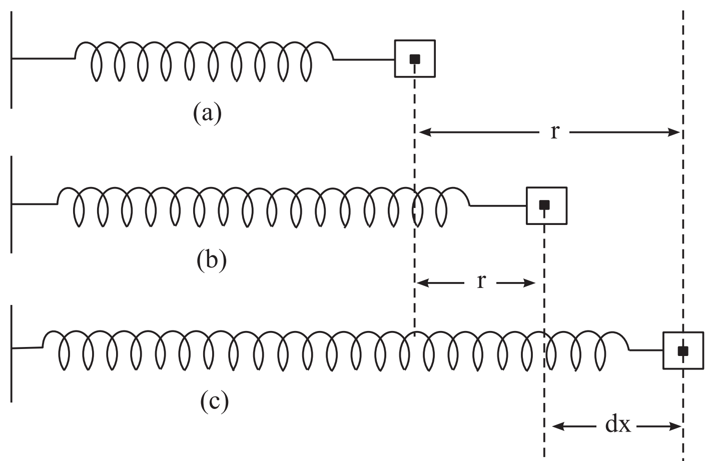
प्वासों अनुपात का मान केवल द्रव्य की प्रकृति पर निर्भर करता है और अधिकांश पदार्थों के लिए यह 0.2 और 0.4 के बीच रहता है। जब किसी वस्तु पर दाब डालने से उसके आयतन में परिवर्तन नहीं होता, अर्थात् वस्तु पूर्णतया असंपीड्य होती है, तो प्वासों अनुपात का मान अधिकतम होता है अर्थात् 0.5। सैद्धान्तिक रूप से प्वासों अनुपात का मान –1.0 और 0.5 के बीच होता है।

8.3.3 प्रत्यास्थ ऊर्जा

जब किसी स्प्रिंग को दबाया या खींचा जाता है, तो इसका विन्यास बदल जाता है और इसमें कार्य करने की क्षमता आ जाती है।

प्रत्यास्थ ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा का एक प्रकार है जो स्प्रिंग जैसी प्रत्यास्थ वस्तुओं के संपीडन या विस्तार से संबंधित है। यहां पर संबद्ध बल स्प्रिंग बल है। यदि हम किसी स्प्रिंग को दबायें या खींचे तो स्प्रिंग के फेरों की सापेक्ष स्थिति परिवर्तित होती है। रबड़ ट्यूब के प्रकरण में विभिन्न परतों की सापेक्ष स्थिति परिवर्तित होती है। एक प्रत्यानयन बल इस परिवर्तन का विरोध करता है जिसके परिणाम स्वरूप हमारे द्वारा किया गया कार्य स्प्रिंग अथवा इसी प्रकार की वस्तुओं की स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि कर देता है।

मान लीजिए किसी स्प्रिंग का स्प्रिंग-नियतांक k है। किसी क्षण यदि स्प्रिंग को x दूरी तक खींचा जाता है तो आरोपित बल $F = kx$ होगा। (चित्र 8.3.3)



चित्र 8.3.3

यदि स्प्रिंग को पुनः dx दूरी तक खींचा जाता है (चित्र 8.3.3c) तो किए गए अल्प कार्य को नीचे दिए गए अनुसार लिखा जा सकता है:

$$dW = kx.dx$$

इसीलिए, स्प्रिंग को साम्यावस्था से r दूरी तक खींचने में किया गया कुल कार्य (चित्र 8.3.3) होगा:

$$W = \int_0^r kxdx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^r = \frac{1}{2}kr^2$$

अतः प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा,

$$U = \frac{1}{2}kr^2$$

क्रियाकलाप 8.2

दो समान तार लें। किसी एक तार को थोडा सा मरोड कर इसमें थोड़ी देर के लिए ऐंठन वाले कंपन पैदा करें। कुछ समय पश्चात दूसरे तार में भी इसी प्रकार के कंपन पैदा करें। दोनों तारों के कंपनों की क्षय दर का अवलोकन करें।

आप पाएँगे कि लम्बे समय से कंपन कर रहे तार के कंपन अधिक जल्दी क्षय हो जाते हैं। तार में एक श्रांति उत्पन्न हो जाती है और इसमें कंपनों का बने रहना मुश्किल हो जाता है। इस घटना को **प्रत्यास्थ श्रांति** कहते है।

प्रत्यास्थता के विषय में कुछ और तथ्य :

1. यदि हम कुछ उपयुक्त प्रकार की अशुद्धियाँ धातुओं में मिलाएं तो उनके प्रत्यास्थ गुणों में परिवर्तन होता है उदाहरण के लिए, यदि लोहे में कार्बन या सोने में पोटैशियम मिला दिया जाए, तो इससे लोहे या सोने की प्रत्यास्थता बढ़ जाती है।
2. ताप के बढ़ने से पदार्थों की प्रत्यास्थता घटती है। उदाहरण के तौर पर, कार्बन सामान्य ताप पर अत्यधिक प्रत्यास्थ है। जब इसमें विद्युतधारा प्रवाहित करके इसे गरम किया जाता है तो यह सुघट्य बन जाता है। इसी प्रकार प्लास्टिक को द्रव हवा में ठंडा करने पर यह अत्यधिक प्रत्यास्थ हो जाता है।
3. प्रत्यास्थता गुणांक प्रतिबल या विकृति पर निर्भर नहीं करता। यह केवल वस्तु के पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करता है।

उदाहरण 8.5: एक 20 cm भुजा वाले धातु के घन पर एक $10^4\,\text{Nm}^{-2}$ परिमाण का अपरूपक बल लगाया जाता है। यदि घन का ऊपरी हिस्सा निचले हिस्से की तुलना में 0.01 cm विस्थापित होता है तो दृढ़तांक ज्ञात कीजिए।

हल : अपरूपक प्रतिबल = $10^4\,\text{Nm}^{-2}$ दिया गया है $\Delta x = 0.01$ cm,

और $y = 20$ cm

$\therefore$ अपरूपक विकृति $= \dfrac{\Delta x}{y} = \dfrac{0.01\,\text{cm}}{20\,\text{cm}}$

अत: $= 0.005$

$$\text{दृढ़तांक } \eta = \frac{\text{अपरूपक प्रतिबल}}{\text{अपरूपक विकृति}} = \frac{10^4\,\text{Nm}^{-2}}{.0005}$$

$$= 2 \times 10^7\ \text{N m}^{-2}$$

उदाहरण 8.6 : 10 kg द्रव्यमान को 5 m लंबे और 1 mm व्यास के ताँबे के तार के सिरे से लटकाया जाता है। लंबाई में वृद्धि एवं पार्श्व विकृति की गणना करें। यदि प्वासों अनुपात 0.25. व यंग गुणांक $Y = 11 \times 10^{10}$ N m^{-2}.

हल : यहाँ $L = 5$ m, $r = 0.05 \times 10^{-3}$ m, $y = 11 \times 10^{10}$ Nm^{-2} $F = 10 \times 9.8$ N, और

$$\sigma = 0.25.$$

तार में उत्पन्न विस्तारण

$$\Delta \ell = \frac{F.\ell}{\pi r^2 Y} = \frac{(10\,\text{kg}) \times (9.8\text{ms}^{-2}) \times (5\text{m})}{3.14\,(0.5 \times 10^{-3}\,\text{m})^2 \times (11 \times 10^{10}\,\text{Nm}^{-2})}$$

$$= \frac{490}{8.63 \times 10^4}\ \text{m}$$

$$= 5.6 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

$$\text{अनुदैर्ध्य विकृति} = \alpha = \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

$$= \frac{5.6 \times 10^{-3}\,m}{5\,\text{m}}$$

$$= 1.12 \times 10^{-2}$$

$$\text{प्वासों अनुपात } (\sigma) = \frac{\text{पार्श्व विकृति}(\beta)}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}(\alpha)}$$

$$\therefore \quad \text{पार्श्व विकृति } \beta = \sigma \times \alpha$$

$$= 0.125 \times 1.12 \times 10^{-2}$$

$$= 0.14 \times 10^{-3}.$$

अब आप एक विराम लें और अपनी प्रगति की जाँच करें।

पाठगत प्रश्न 8.2

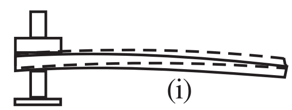
1. क्या अनुदैर्ध्य प्रतिबल और यंग-गुणांक के मात्रक एक ही हैं? अपने उत्तर को कारण सहित स्पष्ट करें।
2. ठोस पदार्थ द्रवों एवं गैसों से अधिक प्रत्यास्थ हैं। इसका औचित्य सिद्ध कीजिए।
3. एक तार की लम्बाई काट कर आधी कर दी जाती है। एक दिए गए भार द्वारा इसकी लंबाई में वृद्धि किस प्रकार प्रभावित होगी?

4. दो तार एक ही धातु के बने हैं। पहले तार की लंबाई दूसरे तार की आधी है और इसका व्यास पहले तार से दो गुना है। यदि दोनों तारों पर समान भार लटकाए जाएं तो उनकी लंबाई में वृद्धियों का अनुपात क्या होगा?

5. एक तार पर $1 \times 10^8 \, N \, m^{-2}$ का प्रतिबल लगाने पर इसकी लंबाई में 10^{-3} गुना वृद्धि होती है। तार के पदार्थ के यंग गुणांक की गणना कीजिए।

6. $100 \, N \, m^{-1}$ स्प्रिंग नियतांक के किसी स्प्रिंग को 10 cm की दूरी तक खींचने पर इसमें भंडारित प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा का परिकलन कीजिए।

वस्तुओं के प्रत्यास्थ व्यवहार के उपयोग


(i)

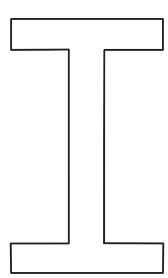
वस्तुओं के प्रत्यास्थ व्यवहार की हमारे दैनिक जीवन में एक महत्वपूर्ण भूमिका है। दंड एवं स्तंभ हमारे वास्तुकला संबंधी ढाँचों के महत्वपूर्ण हिस्से हैं। एक सामांगी छड़ जिसका एक सिरा क्षैतिज रूप में जकड़ा रहता है और जिसके दूसरे सिरे पर भार लटका रहता है कैन्टीलीवर कहलाती है। (चित्र i) ऋषिकेश में लक्ष्मण झूले का निलंबी सेतु और कोलकता का विद्यासागर सेतु कैन्टीलीवर के आधारों पर स्थित हैं।

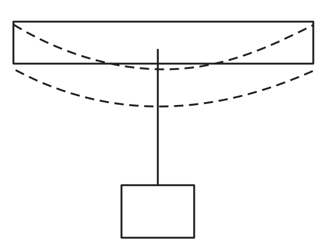
एक कैन्टीलीवर जिसकी लंबाई l चौड़ाई b और मोटाई d हो और इसके मुक्त सिरे पर M द्रव्यमान हो तो कैन्टीलीवर का अवनमन (δ) इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

$$\delta = \frac{4M\,g\,\ell^3}{\gamma\,b\,d^3}$$

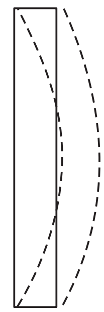
अब यह सरलता से समझ में आ सकता है कि गर्डर्स तथा रेल पटरियों का अनुप्रस्थ परिच्छेद I-आकृति का क्यों रखा जाता है (चित्र ii)। दूसरे घटक समान रहने पर $\delta \propto d^{-3}$। अत: मोटाई बढ़ाने से, हम समान भार के लिए अवनमन अधिक प्रभावशाली ढंग से कम कर सकते हैं। इससे पदार्थ की काफी बचत होती है और बीम की शक्ति में कोई कमी नहीं आती, जबकि बीम दोनों ओर से कसी हो और इसमें बीच में भार लगा हो (चित्र iii), मध्य बिंदु का अवनमन होगा

$$\delta = \frac{M\,g\,\ell^3}{4\,b\,d^3\gamma}$$


(ii)


(iii)

अत: एक दिए गए भार के लिए, हम ऐसे पदार्थ का चयन करेंगे जिसका यंग गुणाँक Y अधिक हो और मोटाई अधिक हो ताकि δ का मान कम रखा जा सके। तथापि, एक गहरी बीम में ऐंठने की प्रवृत्ति हो सकती है (चित्र iv)। इसे टालने के लिए, एक बड़ा भार वहन करने वाली सतह बनाई जाती है। I-आकृति के अनुप्रस्थ परिच्छेद में ये दोनों आवश्यकताएँ पूरी हो जाती हैं।



(iv)

क्रेनों में, हम भारी समानों को एक स्थान से हटाकर दूसरे स्थान पर ले जाने के लिए मोटी धात्विक रज्जु का प्रयोग करते हैं। 300 मेगा पास्कल पराभव क्षमता (yield strength) की स्टील की रज्जु से दस मीट्रिक टन के भार को उठाने के लिए स्टील रज्जु का अनुप्रस्थ परिच्छेद की त्रिज्या कम से कम 10 cm होनी चाहिए। इतनी त्रिज्या का अकेला तार एक दृढ़ छड़ के समान व्यवहार करेगा। इसलिए इन रज्जुओं को बहुत से पतले तारों को गुंफित करके बनाया जाता है। इसे बनाने में आसानी होती है, ऐसी रज्जु अधिक लचीली और शक्तिशाली होती है।

क्या आप जानते हैं कि पृथ्वी पर एक पर्वत की अधिकतम ऊँचाई लगभग 10 km हो सकती है; अन्यथा इसके भार के कारण इसके नीचे की चट्टाने विरूपित हो जाएँगी।

आपने क्या सीखा

- वस्तु में अवरूपण उत्पन्न करने वाला बल विरूपक बल कहलाता है।
- वस्तु में विरूपण होने पर उसमें आतंरिक प्रत्यानयन बल उत्पन्न होता है। विरूपक बल हटा लेने पर वस्तु अपनी मूल आकृति और आमाप (size) में वापस आ जाती है।
- विरूपण बल के हटने पर वस्तु के उस गुण को जिससे उसका मूल स्वरूप तथा आमाप बना रहता है, प्रत्यास्थता कहते हैं।
- विरूपक बल को हटा लेने के बाद जो वस्तु पूर्ण रूप से अपने मूल आमाप और रूप में लौट आती है, उसे पूर्ण प्रत्यास्थ वस्तु कहा जाता है।
- यदि वस्तु पूर्ण रूप से अपना परिवर्तित रुप बनाए रखे तो वह पूर्ण सुघट्य पदार्थ की बनी (प्लास्टिक) कही जाती है।
- प्रतिबल, आंतरिक प्रत्यानयन बल के प्रति इकाई क्षेत्रफल के बराबर होता है। इसका मात्रक Nm^{-2} है।
- विकृति, विमा में प्रति इकाई विमा परिवर्तन (जैसे लंबाई, आयतन या आकृति) के बराबर होती है। विकृति का कोई मात्रक नहीं है।
- सामान्य अवस्था में किसी परमाणु पर सकल अंतरापरमाणु बल शून्य होता है। यदि परमाणुओं के बीच पार्थक्य दूरी समान अवस्था की पार्थक्य दूरी से अधिक होती है तो अंतरापरमाणु बल आकर्षी होते हैं। यदि पार्थक्य कम हो तो बल प्रतिकर्षी होते हैं।
- प्रतिबल का वह अधिकतम मान जहाँ तक वस्तु के प्रत्यास्थ गुण विद्यमान रहते हैं, प्रत्यास्थ सीमा कहलाता है। प्रत्यास्थ सीमा के परे वस्तु का व्यवहार सुघट्य (प्लास्टिक) वस्तु की तरह हो जाता है।

- हुक का नियम बताता है कि प्रत्यास्थता की सीमा में, वस्तु में उत्पन्न प्रतिबल विकृति के समानुपाती होता है।
- यंग गुणांक अनुदैर्ध्य प्रतिबल और अनुदैर्ध्य विकृति का अनुपात होता है।
- आयतन प्रत्यास्थता गुणाँक, अभिलंब प्रतिबल और आयतन विकृति का अनुपात होता है।
- पार्श्व विकृति और अनुदैर्ध्य विकृति के अनुपात को प्वासों अनुपात कहा जाता है।
- किसी स्प्रिंग को खींचने में किया गया कार्य उसमें प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा के रूप में भंडारित हो जाता है।

पाठांत प्रश्न

1. प्रत्यास्थता की परिभाषा दीजिए। प्रत्यास्थ एवं सुघट्य वस्तुओं के उदाहरण भी दें।
2. प्रतिबल, विकृति एवं हुक के नियम की व्याख्या करें।
3. अंतरा-आणविक बलों की सहायता से द्रव्य के प्रत्यास्थ गुणों की व्याख्या कीजिए।
4. यंग गुणाँक, आयतन प्रत्यास्थ गुणाँक और दृढ़तांक को परिभाषित करें।
5. प्रतिबल विकृति ग्राफ की सहायता से बढ़ते भार के साथ धात्विक तार के व्यवहार की व्याख्या करें।
6. स्टील, रबड़ से अधिक प्रत्यास्थ क्यों होता है?
7. प्वासों अनुपात का कोई मात्रक क्यों नहीं होता है?
8. द्रव्य की तीन अवस्थाओं अर्थात ठोस, द्रव और गैस में कौन सबसे अधिक प्रत्यास्थ होता है और क्यों?
9. 4 m लंबे और 1mm व्यास वाले धातु का तार 4 kg भार द्वारा खींचा जाता है। उत्पन्न अनुदैर्ध्य वृद्धि (लंबाई में वृद्धि) ज्ञात कीजिए। यदि तार के पदार्थ के लिए Y, 13.78 $\times 10^{10}$ N m^{-2}.हो।
10. एक गोले का आयतन उसे समुद्र में 1 km नीचे, गहराई में ले जाने में 0.02% कम हो जाता है। गोले के पदार्थ का आयतन प्रत्यास्थ गुणाँक ज्ञात करें। आप समुद्र के जल का घनत्व 1000 kg m^{-3} and $g = 9.8$m s^{-2} मान सकते हैं।
11. एक 0.2 mm. त्रिज्या वाले तार की लंबाई में 0.2% की वृद्धि करने के लिए कितने बल की आवश्यकता होगी? यदि $Y = 9 \times 10^{10}$ N m^{-2}.
12. अवरूपण प्रतिबल, अवरूपण विकृति और दृढ़ताँक क्या हैं?
13. 10 cm भुजा वाले घन की ऊपरी सतह पर जब 5×10^5 N स्पर्शीय बल लगाया जाता है, तब उसकी ऊपरी सतह 2 mm समान्तर रूप में हट जाती है, जबकि नीचे की सतह को स्थिर रखा जाता है। विकृति की गणना कीजिए।
14. प्रत्यास्थता के गुण का हमारे जीवन में बहुत महत्व है। सुघट्यता हमारी सहायता कैसी करती है?

15. L लंबाई और r त्रिज्या के तार का एक सिरा क्लैम्स से जुड़ा है। जब इसके मुक्त सिरे पर F बल लगाकर इसे खींचा जाता है, तब इसकी लंबाई में x वृद्धि हो जाती है। उसी पदार्थ के एक दूसरे तार, जिसकी लंबाई $2L$ है, पर $2F$ बल लगाया जाता है। बताइए इस दूसरे तार की लंबाई में कितनी वृद्धि होगी?

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

8.1

1. यदि $R > R_0$, बल आकर्षक प्रकृति का और यदि $R < R_0$ तो विकर्षक (प्रतिकर्षी) प्रकृति का होगा।
2. अनुदैर्ध्य प्रतिबल और रेखीय विकृति (अनुदैर्ध्य विकृति)
3. अनुपात कम होगा।
4. विभंजन बिंदु के संगत प्रतिबल को भंजन प्रतिबल कहते हैं।
5. 0.12×10^{10} N m^{-2}.

8.2

1. दोनों के मात्रक एक ही हैं, क्योंकि विकृति का कोई मात्रक नहीं है।
2. क्योंकि द्रवों व गैसें की संपीड्यता ठोस पदार्थो की अपेक्षा अधिक है और आयतन प्रत्यास्थ गुणांक संपीड्यता का व्युत्क्रमानुपाती होता है। इसलिए ठोस द्रवों एवं गैसों की अपेक्षा अधि क प्रत्यास्थ है।
3. आधा
4. 1 : 8
5. 1×10^{11} N m^{-2}.
6. 1 J

पाठांत प्रश्नों के उत्तर

9. 0.15 m.

10. 4.9×10^{-10} N m^{-2}

11. 22.7 N

13. 2×10^{-2}

15. x.

9

तरल पदार्थों के गुण

पिछले अध्याय में अपने पढ़ा कि ठोस पदार्थों की प्रत्यास्थता का निर्धारण अंतरा-अणुक बलों द्वारा होता है। क्या द्रव और गैसों के लिए भी ऐसा ही होता है। (द्रवों और गैसों को सम्मिलित रूप से, इनकी उपयुक्त स्थितियों में प्रवाह की प्रवृत्ति के कारण तरल कहा जाता है।) क्या आपने कभी अपने क्षेत्र, मंडल या प्रदेश में नदी पर बने बाँध की बनावट को देखा है? यदि देखा है तो आपने यह अवश्य ध्यान दिया होगा कि जैसे-जैसे हम गहराई की ओर जाते हैं, वैसे-वैसे दीवार की मोटाई बढ़ती है। क्या आपने इस बात के पीछे निहित भौतिकी के सिद्धांत के बारे में सोचा? इसी प्रकार क्या आप विश्वास कर सकते हैं कि आप एक हाइड्रॉलिक लिफ्ट के एक प्लेटफार्म पर खड़े होकर केवल अपने शरीर के भार से ही एक कार, ट्रक या हाथी को उठा सकते है। क्या आपने कभी धुलाई करने के लिए हाइड्रॉलिक जैक के प्लेटफार्म पर किसी कार को उठाया गया देखा है। इसे कितनी आसानी से ऊपर उठा लिया जाता है? आपने यह भी देखा होगा कि मच्छर स्थिर पानी के ऊपर बैठ या चल सकते हैं लेकिन हम ऐसा नहीं कर सकते हैं। आप इन सभी प्रेक्षणों की व्याख्या द्रवों के गुणों जैसे द्रवस्थैतिक दाब, पास्कल के नियम एवं पृष्ठ तनाव के आधार पर कर सकते है। इस अध्याय में आप इनके बारे में पढ़ेंगे।

क्या आपने अनुभव किया है कि आप पानी की अपेक्षा भूमि पर अधिक आसानी से चल सकते हैं। यदि आप किसी एक फनल में जल और दूसरी में शहद उड़ेलें तो आप देखते है कि जल अधिक आसानी से बहकर बाहर जा सकता है। इस अध्याय में हम द्रवों के उन गुणों के बारे में जानेंगे जिनके कारण उनके प्रवाह में अन्तर होता है। आपने देखा होगा कि कोमल प्लास्टिक या रबर की नली के खुले मुँह को दबाने पर उसमें बह रहा जल अधिक दूर जाकर गिरता है। क्या आप जानते हैं कि क्रिकेट के खेल में गेंदबाज गेंद को कैसे घुमाता है? हवाई जहाज कैसे उठ पाता है? इन सभी मनोरंजक प्रेक्षणों की बर्नूली के सिद्धांत के आधार पर व्याख्या की जा सकती है।

उद्देश्य

इस अध्याय के अध्ययन के बाद आप:

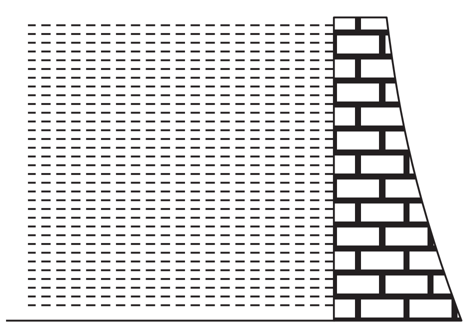
- *किसी द्रव की निश्चित गहराई पर द्रवस्थैतिक दाब की गणना कर सकेंगे;*
- *उत्प्लावकता और आर्किमिडिज के नियमों का वर्णन कर सकेंगे;*

- *पास्कल के नियम का वर्णन कर सकेंगे तथा हाइड्रॉलिक प्रेस, हाइड्रॉलिक लिफ्ट और हाइड्रॉलिक ब्रेक की क्रियाविधि की व्याख्या कर पाएंगे।*
- *पृष्ठ तनाव व पृष्ठ ऊर्जा की व्याख्या कर पाएंगे;*
- *केशिका में जल के चढ़ने के लिए व्यंजक प्राप्त कर सकेंगे;*
- *द्रवों के धारा रेखीय तथा प्रक्षुब्ध प्रवाह में अंतर कर पायेंगे;*
- *किसी द्रव के प्रवाह के क्रांतिक वेग व रेनाल्ड संख्या का परिकलन कर पाएंगे;*
- *श्यानता को परिभाषित कर पाएंगे और दैनिक जीवन की कुछ घटनाओं की व्याख्या द्रवों की श्यानता के आधार पर कर पाएंगे, तथा*
- *बर्नूली के सिद्धांत का वर्णन कर पाएंगे और इसके आधार पर दैनिक जीवन की कुछ घटनाओं की व्याख्या कर पाएंगे।*

9.1 द्रवस्थैतिक दाब

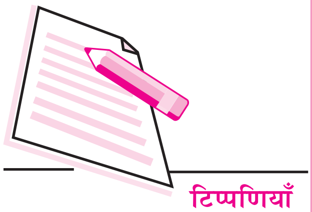
आपने कागजों में पिन लगाते समय अनुभव किया होगा कि एक तीक्ष्ण नोक वाली पिन से कार्य करना एक घिसी नोक वाली पिन से कार्य करने की अपेक्षा आसान है। यदि नोक का क्षेत्रफल अधिक हो तो आपको अधिक बल प्रयोग करना पड़ेगा या हम ऐसे भी कह सकते हैं कि एक समान बल के लिए छोटे क्षेत्रफल पर बल का प्रभाव अधिक होगा। इकाई क्षेत्रफल पर बल का यह प्रभाव दाब कहलाता है।

चित्र 9.1 को देखें। यह एक बाँध के किनारे की दीवार को दर्शाता है। ध्यान दें कि दीवार बाँध के आधार की ओर अधिक मोटी होती चली गयी है। क्या हम ऐसा अपने मकान की दीवारें बनाने के लिए भी करते हैं? नहीं, मकान की दीवारों की मोटाई समान रहती है। क्या आप इसका कारण जानते हैं?

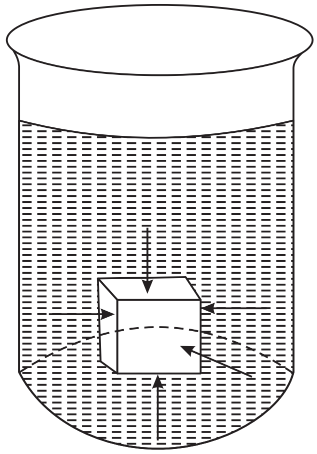


चित्र. 9.1 : बाँध के किनारे की दीवार

पिछले पाठ से आप जानते हैं कि एक विरूपक बल के कारण ठोस पदार्थों में अपरूपक प्रतिबल उत्पन्न होता है क्योंकि अंतराणविक बलों का परिमाण काफी अधिक है। लेकिन तरल पदार्थों में अपरूपक प्रतिबल उत्पन्न नहीं होता और जब किसी वस्तु को द्रव में डुबाया जाता है तो



टिप्पणियाँ



चित्र. 9.2 : डूबी हुई वस्तु पर तरल पदार्थ द्वारा आरोपित बल

द्रव के कारण बल वस्तु की सतह के लम्बवत कार्य करता है (चित्र 9.2)। साथ ही द्रव धारक की दीवार के प्रत्येक बिंदु पर भी लम्बवत कार्य करता है।

द्रव द्वारा एकांक क्षेत्रफल पर लम्बवत् लगाया जाने वाला बल (प्रणोद) दाब कहलाता है। जिसे P से प्रकट करते हैं।

अतः
$$\text{दाब } P = \frac{\text{प्रणोद}}{\text{क्षेत्रफल}} \qquad (9.1)$$

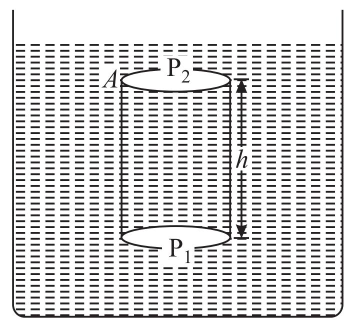
द्रव की स्थिर अवस्था में इसके द्वारा लगाया गया दाब द्रवस्थैतिक दाब कहलाता है।

इसका SI मात्रक $N\,m^{-2}$ है। इसे फ्रांसीसी वैज्ञानिक ब्लेज पास्कल (Blaise Pascal) के सम्मान में पास्कल कहा जाता है और (Pa) द्वारा दर्शाया जाता है।

9.1.1 द्रव के अंदर किसी बिन्दु पर द्रवस्थैतिक दाब

मान लीजिए एक बर्तन में जल भरा है। इस जल के अंदर एक बेलनाकार वस्तु की कल्पना करें जिसके अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल A है, और ऊँचाई h है चित्र (9.3)। माना कि बेलन के आधार (नीचे) और ऊपर की सतह पर द्रव द्वारा लगाया जाने वाला दाब क्रमशः P_1 और P_2 है। अतः द्रव द्वारा बेलन के तल पर ऊपर की ओर आरोपित बल P_1A और शीर्ष पर आरोपित बल (नीचे की ओर) P_2A

अतः ऊपर की ओर लगने वाला कुल बल $(P_1A - P_2A)$



चित्र. 9.3 : द्रव में h ऊँचाई का एक काल्पनिक बेलन

बेलन (सिलिंडर) में द्रव का द्रव्यमान

= घनत्व × बेलन का आयतन

$= \rho . A . h$

जहाँ ρ द्रव का घनत्व है

∴ बेलन में द्रव का भार = $\rho . \mathbf{g} . h . A$

क्योंकि बेलन साम्यावस्था में है। इसलिए इस पर लगने वाला परिणामी बल शून्य होना चाहिए। अर्थात्

$$P_1A - P_2A - \rho g h A = 0$$

$$\Rightarrow \qquad P_1 - P_2 = \rho g h \qquad (9.2)$$

अतः ऊँचाई h के द्रव के स्तंभ के द्वारा तल पर लगने वाला दाब

$$P = \rho g h$$

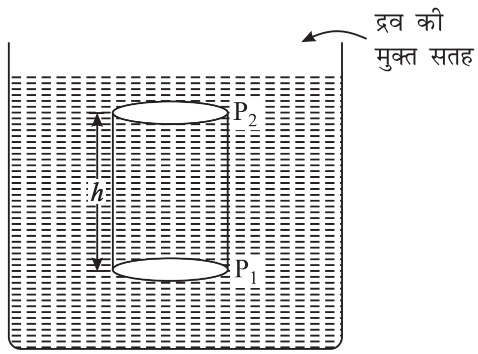
अर्थात किसी तरल के कारण द्रवस्थैतिक दाब गहराई के साथ रैखिक रूप से बदलता है। इसी कारण बाँध की दीवार नीचे की ओर चौड़ी होती चली जाती है।

यदि हम बेलन के ऊपरी हिस्से के तल को द्रव की मुक्त सतह पर मान लें जैसा कि चित्र 9.4 में दर्शाया गया है तब P_2 की जगह वायुमण्डल दाब का मान रखा जायेगा।

यदि हम P_1 को P से दर्शायें तो तल से किसी गहराई h पर कुल दाब

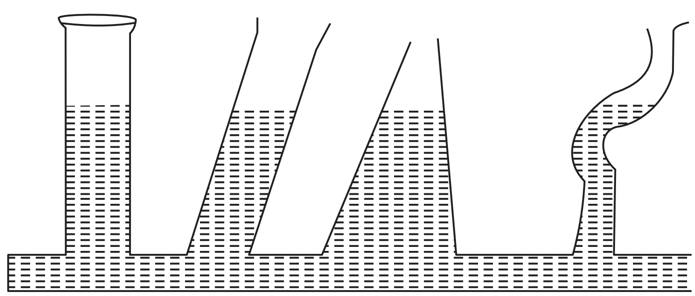
$$P - P_{atm} + \rho g h$$

या
$$P = P_{atm} + \rho g h \qquad (9.3)$$



चित्र. 9.4 : द्रव में बेलन जिसका एक पृष्ठ द्रव की मुक्त सतह पर है।

ध्यान दें कि समीकरण (9.3) में क्षेत्रफल A नहीं आता। इसका अर्थ यह हुआ कि एक दी गई गहराई पर दाब का मान बर्तन की आकृति पर निर्भर नहीं करता है (चित्र 9.5)।



चित्र. 9.5 : दाब बर्तन की आकृति पर निर्भर नहीं करता है

अब आप नीचे दिये गए उदाहरण को सावधानी से पढ़ें। इसकी सहायता से आपकी दाब संबंधी अवधारणा दृढ़ बन जायेगी।

उदाहरण 9.1: सीमेन्ट की 1 मीटर मोटी दीवार 10^5 N m^{-2}. दाब सहन कर सकती है। 100 मीटर गहरे जल के बाँध के आधार पर दीवार की मोटाई कितनी होनी चाहिए? जल का घनत्व $= 10^3$ kg m^{-3} और $g = 9.8$ m s^{-2}.

हल: बाँध के तल पर पार्श्व की दीवार पर दाब

$$P = h \rho g$$
$$= 100 \times 10^3 \times 9.8$$
$$= 9.8 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$$

ऐकिक विधि का प्रयोग करने पर, हम दीवार की मोटाई ज्ञात कर सकते हैं जो कि 9.8×10^5 Nm^{-2}. दाब को सहन कर सके

दीवार की आवश्यक मोटाई (मीटर में)

$$t = \frac{9.8 \times 10^5}{10^5} \frac{Nm^{-2}}{Nm^{-2}} = 9.8 \text{ m}$$

9.1.2 वायुमण्डलीय दाब

हम जानते हैं कि पृथ्वी के चारों ओर लगभग 200 km तक वायुमण्डल है। वायुमण्डल द्वारा लगाया गया दाब वायुमण्डलीय दाब कहलाता है। एक जर्मन वैज्ञानिक ओ.वी. ग्यूरिक ने वायुमण्डलीय दाब के कारण वस्तुओं पर लगे बल को प्रदर्शित करने के लिए एक प्रयोग किया। उन्होंने 20 इंच व्यास के ताँबे के दो खोखले अर्धगोले लिए और उन्हें एक दूसरे के साथ दृढ़ता से जोड़ दिया। अंदर वायु रहने पर इन्हें आसानी से अलग किया जा सकता था। जब उनके बीच की वायु निकाल दी गयी तो उन्हें अलग करने के लिए आठ घोडों की शक्ति की आवश्यकता पड़ी।

टॉरिसिली ने द्रवस्थैतिक दाब के सूत्र का उपयोग वायुमण्डलीय दाब का परिमाण ज्ञान करने के लिए किया।

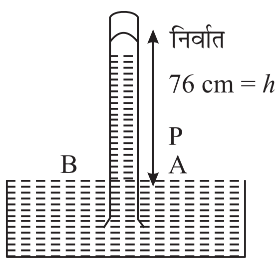


Fig: 9.6 : टौरिसैली दाबमापी

उन्होंने एक मीटर लंबी नली ली जिसमें पारा (घनत्व 13,600 kg m^{-3}) भरा था। इसे पारे के टब में ऊर्ध्वाधर उल्टा कर दिया गया जैसा कि चित्र 9.6 में दिखाया गया है। उन्होंने देखा कि नली में पारा चढ़ जाता है जिसकी ऊँचाई टब में रखे पारे की मुक्त सतह से 76 cm होती है।

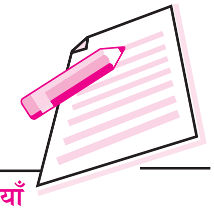
साम्यावस्था में पारे के स्तंभ के द्वारा लगा दाब और वायुमण्डलीय दाब बराबर होने चाहिए। अर्थात् वायुमण्डलीय दाब,

$$P_{atm} = h \rho g = 0.76 \times 13600 \times 9.8 \text{ Nm}^{-2}$$
$$= 1.01 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$$
$$= 1.01 \times 10^5 \text{ } Pa$$

9.2 उत्प्लावकता

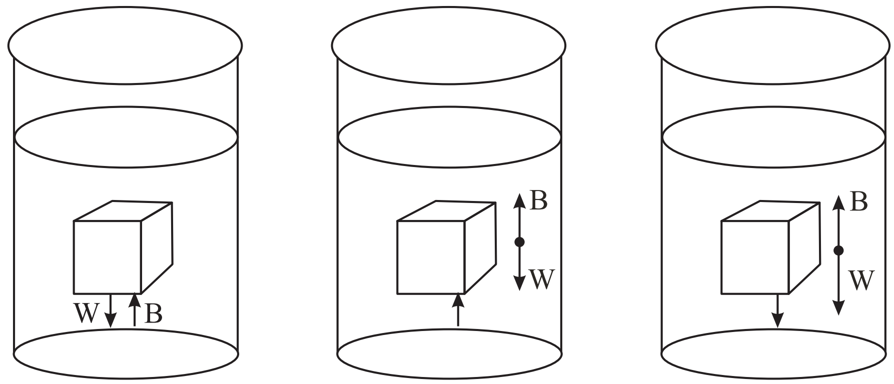
यह एक सामान्य अनुभव है कि किसी वस्तु को जल के अंदर उठाना उसे हवा में उठाने से आसान होता है। यह वस्तु पर द्रव द्वारा ऊपर की ओर लगाए गए बल के कारण होता है। किसी द्रव में डूबी हुई वस्तु पर ऊपर की ओर जो बल कार्य करता है उसे **उत्प्लावक बल** कहते हैं।

तरल पदार्थ में रखी गई वस्तु पर लगने वाले उत्प्लावक बल की प्रकृति की खोज आर्किमिडीज ने की। अपने प्रेक्षणों के आधार पर उन्होंने एक नियम प्रतिपादित किया जिसे आर्किमिडीज के सिद्धांत के नाम से जाना जाता है। इस नियम के अनुसार,



टिप्पणियाँ

जब एक वस्तु को किसी तरल में आँशिक या पूर्ण रूप से डुबोया जाता है तो उत्प्लावक बल का परिमाण वस्तु द्वारा हटाये गये द्रव के भार के बराबर होता है। **चित्र 9.7** में उत्प्लावक बल के अंतर्गत किसी वस्तु की विभिन्न स्थितियाँ दर्शायी गयी है।



चित्र. 9.7:

(a) : वस्तु पर लगने वाला उत्प्लावक बल परिमाण में ठीक वस्तु के भार के बराबर है। वस्तु साम्यावस्था में है।

(b) : एक पूर्ण रूप से डुबोई गई वस्तु जिसका घनत्व द्रव के घनत्व से कम है। इसमें एक नेट बल ऊर्ध्वाधरत: ऊपर की ओर लगता है।

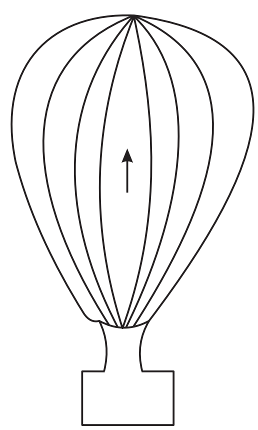
(c) : द्रव से अधिक घनत्व की वस्तु द्रव में डूब जायेगी।

उत्प्लावक बल का दूसरा उदाहरण गरम हवा का गुब्बारा है। चूंकि गर्म हवा का घनत्व ठंडी हवा से कम होता है इसलिए इसमें एक नेट उत्प्लावक बल उर्ध्वाधरत: ऊपर की ओर कार्य करता है। जिसके कारण गुब्बारा हवा में तैरता है।

तैरती हुई वस्तुऐं

आपने जल में तैरते हुए लकड़ी के टुकड़े को देखा होगा। सामावस्था में क्या आप में इस पर लगने वाले बलों की पहचान कर सकेंगे? जैसा कि स्पष्ट है, एक बल गुरुत्वीय बल है जो कि इस पर नीचे की ओर लगता है। विस्थापित जल द्वारा लगाया गया उत्प्लावक बल जो ऊपर की ओर लगता है। अत: जब ये बल एक दूसरे को संतुलित करते हैं तो वस्तु विराम अवस्था में आ जाती है और यह वस्तु की स्थिर साम्यवास्था कहलाती है और तब वस्तु जल में प्लवित कही जाती है।

इसका तात्पर्य यह हुआ कि प्लवन करती वस्तु अपने भार के बराबर तरल को विस्थापित करती है।

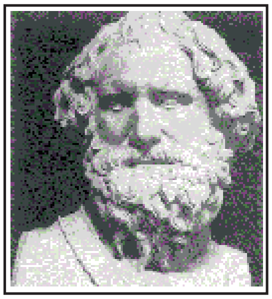


चित्र. 9.8:हवा में तैरता गर्म हवा का गुब्बारा

आर्किमिडीज

(287- 212 B.C ईसा पूर्व)

ग्रीक भौतिक शास्त्री, अभियंता और गणितज्ञ आर्किमिडीज, संभवत: अपने समय के सबसे महान वैज्ञानिक थे। वे वस्तुओं पर लगने वाले उत्प्लावक बलों की प्रकृति की खोज के



लिए प्रसिद्ध हैं। आर्किमिडीज पेंच आज भी प्रयोग किया जाता है। यह एक आनत घूर्णन करती हुई कुंडलीकृत नली है जिसका उपयोग पानी के जहाज में पानी ऊपर उठाने के लिए किया जाता है। उन्होंने गोफणा का अविष्कार किया और उत्तोलक एवं घिरनी तंत्र की भी खोज की। एक बार आर्कमीडिज से साइरेक्यूज शहर के राजा हेरों ने यह जांच करने के लिए कहा कि मुकुट शुद्ध सोने का बना है अथवा इसमें अन्य धातुओं का मिश्रण है (बिना मुकुट को क्षति पहुँचाये)। नहाते समय उन्हें इसका हल प्राप्त हो गया। अपनी भुजाओं तथा टांगों को पानी में डुबाने पर उन्हें भार में आँशिक कमी महसूस हुई। वे इस खोज पर इतने उत्तेजित हो गए कि नंगे ही शहर की गलियों में यूरेका, यूरेका कहते हुए दौड़ पड़े। यूरेका का अर्थ 'मैंने पा लिया है' होता है।

9.3 पास्कल का नियम

बस से यात्रा करते समय आपने देखा होगा कि ड्राइवर पैरों द्वारा एक हल्का सा ब्रेक लगाकर गाड़ी रोक देता है। क्या अपने हाइड्रॉलिक जैक या लिफ्ट देखा है जो कार या ट्रक को आवश्यक ऊँचाई तक उठा सकता है? इसके लिए आप एक मोटर कार्यशाला में जाइए। कपास (रुई) की गाठों को भी हाइड्रॉलिक प्रेस की सहायता से बनाया जाता हैं, जो इसी सिद्धांत पर कार्य करते हैं।

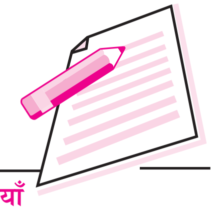
ये युक्तियाँ पास्कल के नियम पर आधारित हैं। जिसके अनुसार *निश्चित मात्रा (परिमाण) के किसी परिबद्ध द्रव की स्थिरावस्था में तल के किसी स्थान पर यदि दाब डाला जाय तो यह दाब समान परिमाण में पूरे द्रव में सभी दिशाओं और धारक की दीवारों पर संचरित हो जाता है।*

इस नियम को द्रव के दाब संचरण का नियम भी कहते है।

9.3.1 पास्कल के नियम के अनुप्रयोग

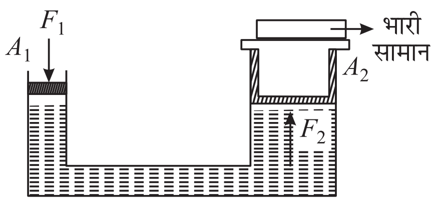
(A) हाइड्रॉलिक प्रेस/बैलेन्स/जैक/लिफ्ट

यह पास्कल के नियम पर आधारित एक सरल युक्ति है जिसका उपयोग थोड़ा सा बल लगाकर भारी सामान को उठाने में किया जाता है। चित्र (9.9) में इसका मूलभूत व्यवस्था आरेख दर्शाया गया है। मान लें एक बल F_1 को छोटे क्षेत्रफल A_1 के पिस्टन पर लगाया जाता है। दूसरी ओर एक बड़े क्षेत्रफल A_2 का पिस्टन, एक प्लेटफार्म से जुड़ा है, जिस पर भारी सामान रखा जा सकता है, छोटे पिस्टन पर लगा दाब दो पिस्टनों के बीच भरे द्रव से संचरित होकर बड़े पिस्टन पर कार्य करता है। क्योंकि दोनों ओर दाब बराबर है। अत:

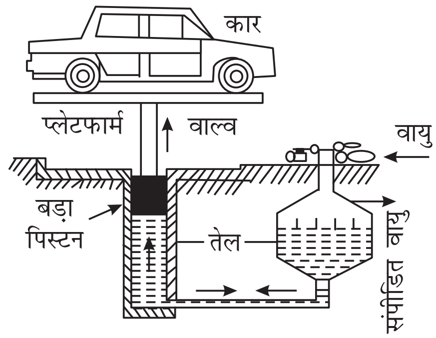


टिप्पणियाँ

छोटे पिस्टन पर दाब , $P = \frac{\text{बल}}{\text{क्षेत्रफल}} = \frac{F_1}{A_1}$



चित्र. 9.9 : हाइड्रॉलिक लिफ्ट



चित्र. 9.10 : हाइड्रॉलिक जैक

पास्कल के नियम के अनुसार यही दाब बड़े क्षेत्रफल A_2 के पिस्टन पर भी कार्य करता है।

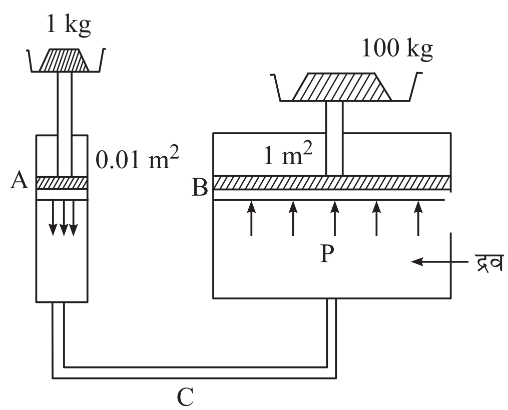
अत: बड़े पिस्टन पर लगने वाला बल = दाब × क्षेत्रफल = $\frac{F_1}{A_1} \times A_2$ (9.4)

जो कि स्पष्टतया F_1 से अधिक है। $\frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}$ को हाइड्रॉलिक प्रेस का लाभ कहते है।

थोड़े से रूपान्तरण से इसी व्यवस्था का हाइड्रॉलिक प्रेस, हाइड्रॉलिक तुला, हाइड्रॉलिक जैक के रूप में उपयोग किया जा सकता है।

(B) हाइड्रॉलिक जैक या कार लिफ्ट

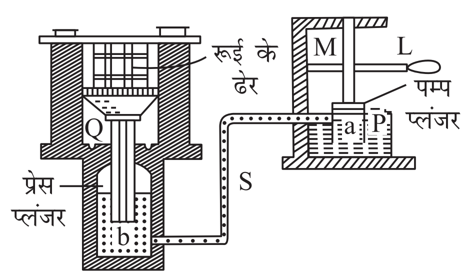
मोटर गाड़ियों के वर्कशॉप या सर्विस-स्टेशन में आपने देखा होगा कि मोटर कार या भारी ट्रक आदि को एक निश्चित ऊँचाई तक उठा दिया जाता है ताकि मिस्त्री सुविधापूर्वक नीचे काम कर सके (चित्र 9.10)। इसमें भी एक क्षेत्रफल पर लगे दाब को संचरित कर बड़े क्षेत्र पर लगाया जाता है ताकि वाहन को ऊपर उठाने के लिए पर्याप्त बल उत्पन किया जा सके।



चित्र. 9.11(a): हाइड्रॉलिक तुला

(C) हाइड्रॉलिक ब्रेक

बस या कार से सफर करते हुए हम देखते हैं कि चालक अपने पैर से एक छोटा सा बल ब्रेक पैडल पर लगाकर वाहन को रोक देता है। इस प्रकार लगाया गया दाब ब्रेक के तेल से होकर संचारित होता है और बड़े-क्षेत्र पर लगे सिलिंडर पर कार्य करता है। पिस्टन की गति से ब्रेक शू खिसकता



चित्र. 9.11(b) : हाइड्रॉलिक प्रेस

है और चारों पहियों के ब्रेक ड्रमों में लगता है। एक ही साथ पहिये घूमना बन्द कर देते हैं और वाहन रूक जाता है।

पाठगत प्रश्न 9.1

1. बर्फ स्कीइंग के लिए प्रयोग किए जाने वाले जूते बड़े क्यों बनाये जाते हैं?
2 1500 मीटर गहरे समुद्र के तल पर दाब की गणना कीजिए। समुद्र के जल का घनत्व 1.024×10^3 kg m^{-3} है और वायुमण्डलीय दाब $= 1.01 \times 10^5$ Pa है। g का मान 9.80 m s^{-2}.है।
3. 5000 kg का हाथी एक हाइड्रॉलिक लिफ्ट के 10 m^2 क्षेत्रफल वाले बड़े पिस्टन पर खड़ा है। क्या 25 kg का बच्चा जो 0.05 m^2 क्षेत्रफल वाले छोटे पिस्टन पर खड़ा है, हाथी को संतुलित कर सकता या उठा सकता है?
4. यदि एक सुई को आपकी त्वचा में एक निश्चित बल से दबाया जाता है तो आपको दर्द होता है किन्तु, यदि इतना ही बल एक छड़ द्वारा आपकी त्वचा पर लगाया जाए तो कुछ भी नहीं होता। क्यों?
5. एक बड़े हाइड्रॉलिक लिफ्ट के 0.1 m^2 क्षेत्रफल के छोटे पिस्टन पर 50 kg भार का वजन रखा है। गणना कीजिए इससे 10 m^2 क्षेत्रफल वाले बड़े पिस्टन से अधिकतम कितना वजन उठाया जा सकता है।

9.4 पृष्ठ तनाव

यह एक साधारण अनुभव है कि बाह्य बल की अनुपस्थिति में जल की बूंदे सदैव गोलाकार होती हैं, थोडा सा पारा कुछ ऊँचाई से गिराने पर छोटी गोल बूंदों के रूप में बिखर जाता है।

आपने बचपन में साबुन के बुलबुलों के खेल का आनंद उठाया होगा। क्या आप जानते हैं कि शुद्ध पानी के बुलबुले बनाना इतना आसान क्यों नहीं है। ये सभी घटनाऐं द्रवों के एक गुण के कारण होती हैं जिसे पृष्ठ तनाव कहते हैं। इसे समझने के लिए हम चाहेंगे कि आप निम्नलिखित क्रियाकलाप करें।

क्रियाकलाप 9.1

1. साबुन का घोल बनाएं।
2. इसमें थोड़ी सी ग्लिसरीन मिलाएं।
3. एक पतली काँच या प्लास्टिक की नली लें। इसका एक सिरा घोल में डुबोएं ताकि कुछ द्रव अंदर आ जाय।
4. इसे बाहर निकालें और इसके दूसरे सिरे को मुँह से फूकें।

5. बड़े आकार के साबुन के बुलबुले बनेंगे।
6. नली को थोड़ा झटका देकर बुलबुले को नली से अलग करें, देखिए बुलबुला हवा में तैरता है।

यह समझने के लिए कि पृष्ठ तनाव कैसे उत्पन्न होता है, हम अपने अंतराणविक बल के ज्ञान की चर्चा करते हैं। पिछले अध्याय में आपने अणुओं या परमाणुओं के केन्द्रों के बीच की दूरी के साथ अंतराणविक बलों में परिवर्तन का अध्ययन किया है।

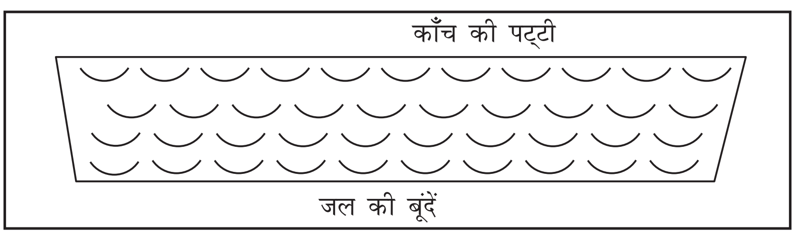
अंतराणविक बल दो प्रकार के होते है: संसजक और आसंजक। एक ही पदार्थ के अणुओं के बीच आकर्षण बल को संसजन बल कहते है, जबकि दो असमान प्रकार के अणुओं के बीच आकर्षण बल को आसंजन बल कहते है। आसंजन बल के कारण ही हम कागज पर लिख सकते हैं। गोंद, फेवीकोल आदि पदार्थों में शक्तिशाली आसंजन होता है।

आशा है अब आप इस बात की व्याख्या कर सकते हैं कि पानी काँच को क्यों गीला करता है और पारा क्यों नहीं करता।

क्रियाकलाप 9.2

काँच व जल के अणुओं के बीच आसंजन बल दर्शाने के लिए

1. काँच की एक स्वच्छ पट्टी लें।
2. इस पर जल की कुछ बूंदे डालें।
3. जल वाली सतह को नीचे की ओर उल्टा करके पकड़ें।
4. जल की बूंदों का अवलोकन करें।



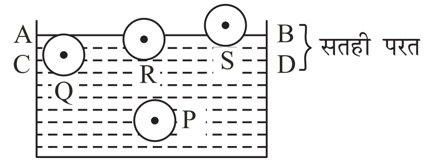
चित्र. 9.12 जल की बूंदें कांच की पट्टी पर चिपकी रहती हैं

काँच और जल के अणुओं के बीच लगने वाले आसंजन बल के कारण जल की बूंदे काँच की पट्टी पर चिपकी रहती है (चित्र 9.12)।

9.4.1 पृष्ठ ऊर्जा

किसी पात्र में रखे हुए द्रव की सतही परत शेष द्रव की अपेक्षा कुछ अलग गुणधर्म दर्शाती है। चित्र 9.13 में द्रव में विभिन्न स्थानों पर अणु दिखाये गए हैं। P अणु को चारों ओर के अणु आकर्षित करते हैं जबकि सतह पर स्थित अणुओं में ऐसा नहीं होता है।

सतह पर स्थित अणुओं और S और R, पर एक नेट परिणामी बल नीचे की ओर लगता है क्योंकि बल प्रभाव के ऊपरी गोलार्ध में इन अणुओं को आकर्षित करने वाले अणुओं की संख्या निचले गोलार्ध की अपेक्षा कम है। यदि हम द्रव या द्रव हवा अंतरापृष्ठ पर द्रव वाष्प के अणु भी मान लें तो भी अणुओं में एक परिणामी अद्योगामी बल कार्य करेगा क्योंकि द्रव वाष्प में अणुओं की संख्या कम है।



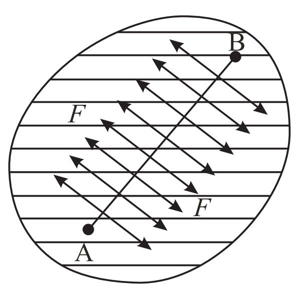
चित्र 9.13 : P पर कार्यकारी परिणामी बल शून्य है लेकिन R और S पर एक परिणामी ऊर्ध्वाधर बल नीचे की ओर लगता है।

अत: यदि किसी द्रव के अणु को द्रव की सतह (पृष्ठ) पर लाया जाता है तो अंदर की ओर लगे परिणामी बलों के विपरीत कार्य करना पड़ता है जो इन अणुओं की स्थितिज ऊर्जा को बढ़ा देता है। इसका आशय यह है कि सतही परत में एक अतिरिक्त ऊर्जा होती है जिसे **पृष्ठ ऊर्जा** कहते हैं।

किसी तंत्र की साम्य अवस्था में स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम होनी चाहिए। अत: पृष्ठ का क्षेत्रफल न्यूनतम होना चाहिए। इसलिए किसी द्रव का मुक्त तल न्यूनतम पृष्ठ तल प्राप्त करने की चेष्टा करता हैं। इसके कारण सतह पर एक तनाव उत्पन्न होता है जिसे **पृष्ठ तनाव** कहते हैं।

पृष्ठ तनाव द्रव की सतह (पृष्ठ) का एक गुण है, जिसके कारण इसकी प्रवृति द्रव पृष्ठ को कम करने की होती है। इसके परिणामस्वरूप द्रव की सतह एक तनी हुई झिल्ली की भांति कार्य करती है। आप इसका अस्तित्व आसानी से देख सकते हैं, एक सुई को पानी की सतह पर धीरे से रखें। यह तैरती रहती है।

इसे हम समझने की कोशिश करते हैं, एक रेखा AB की कल्पना कीजिये जो कि स्थिर द्रव की सतह पर खींची है। इस रेखा के दोनों ओर की सतहें एक दूसरे को खींचती हैं (चित्र 9.14)।



चित्र. 9.14 :एक द्रव सतह पर पृष्ठ तनाव की दिशा

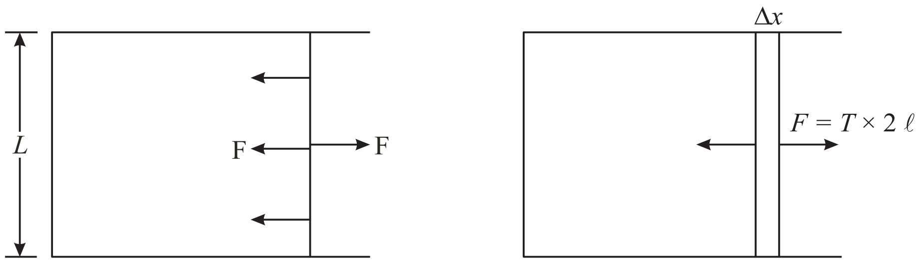
अत: द्रव पृष्ठ की प्रति इकाई लंबाई पर काम करने वाला बल पृष्ठ तनाव कहलाता है।

$$T = F/L \qquad (9.5)$$

T पृष्ठ तनाव को दर्शाता है और F किसी L लंबाई की काल्पनिक रेखा के दोनों ओर लगने वाले कुल बल का परिमाण है (चित्र 9.14)। पृष्ठ तनाव का SI मात्रक Nm^{-1} हैं और इसकी विमा $[MT^{-2}]$.है।

हम चित्र 9.15 की भांति एक आयताकार फ्रेम लेते हैं जिसकी एक भुजा एक खिसकने वाला तार है। इस फ्रेम को एक साबुन के घोल में डुबोएं और बाहर निकाल लें। फ्रेम पर साबुन की एक फिल्म (परत) बन जायेगी। इस फिल्म की दो सतहें

हैं। दोनों सतहें खिसकने वाले तार के संपर्क में है। अत: हम यह कह सकते हैं कि तार पर इन दोनों सतहों के कारण पृष्ठतनाव कार्य करता है।



चित्र. 9.15 : साम्यावस्था में एक परत

मान लीजिए T साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव है और L, तार की लंबाई हैं। प्रत्येक सतह द्वारा तार पर आरोपित बल $T \times L$ है, अत: तार पर लगा कुल बल $= 2TL$.

मान लीजिए कि सतहें Δx. मान से संकुचित होने की ओर प्रवृत हैं। तार को संतुलन में रखने के लिए हमें एक समान बाह्य बल लगाना पड़ेगा। यदि हम तार की एक स्थिर चाल से दूरी Δx, खींचकर परत का पृष्ठीय क्षेत्रफल बढ़ाते है तो परत पर किया गया कार्य

$$W = F \times \Delta x = T \times 2L \times \Delta x$$

जहाँ $2L \times \Delta x$ परत के दोनों ओर के पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि है। इसे हम A से दर्शाते हैं।

$$W = T \times A$$

यह बाह्य बल द्वारा किया गया कार्य नए पृष्ठ में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित रहता है, और इसे पृष्ठीय ऊर्जा कहते हैं।

$$T = W/A \tag{9.6}$$

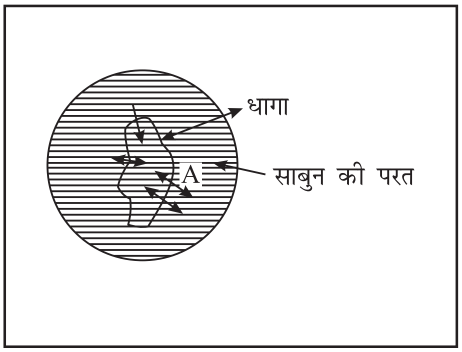
इस प्रकार हम देखते हैं कि किसी द्रव की मुक्त सतह के क्षेत्रफल को एकांक बढ़ाने में जितना कार्य किया जाता है उसे उस द्रव का पृष्ठ तनाव कहते हैं।

हम यह भी कह सकते हैं कि पृष्ठ तनाव प्रति इकाई पृष्ठीय ऊर्जा के बराबर है। अब हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि, पृष्ठ तनाव

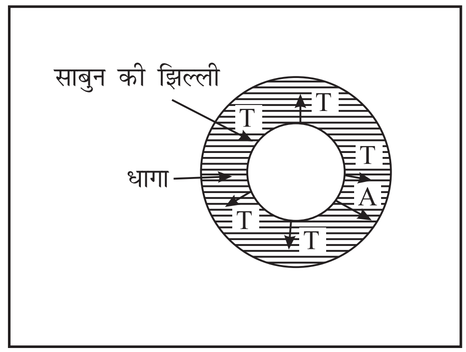
- द्रव पृष्ठ या द्रव और किसी अन्य पदार्थ जैसे हवा के साथ बने अंतरापृष्ठ का गुणधर्म है।
- मुक्त पृष्ठ पर किसी रेखा के लंबवत और परत के स्पर्श रेखीय दिशा में कार्य करता है।
- इसकी प्रवृत्ति द्रव के मुक्त पृष्ठ का क्षेत्रफल कम करने की होती है।
- इसकी उत्पत्ति अंतराणविक बलों के कारण होती है जो कि ताप पर निर्भर करते है। ताप वृद्धि के साथ पृष्ठ तनाव कम होता है।
- नीचे वर्णन किया गया साधारण प्रयोग द्रव पृष्ठों के पृष्ठ तनाव के गुण को दर्शाता है।

क्रियाकलाप 9.3

एक पतले तार का वृत्ताकार फ्रेम लें और इसे साबुन के घोल में डुबोएं। आप देखेंगे कि इसमें एक साबुन की परत बन गयी है। अब आप एक धागे का छोटा वृत्ताकार लूप बनाएं और इसे धीरे से साबुन की परत



चत्र 9.16 (a) :साबून की झिल्ली
(एक बंद लूप के धागे के साथ)



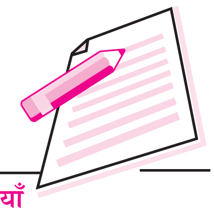
9.16 (b) :धागे का आकार
(अंदरूनी साबुन की झिल्ली के बगैर)

(झिल्ली) पर रख दें। यह एक अनियमित आकार में झिल्ली के ऊपर पड़ा रहता है जैसा चित्र 9.16 में दर्शाया गया है। अब आप एक सुई लेकर इसके सिरे को लूप के अंदर साबुन की झिल्ली से स्पर्श करा दें। आप क्या देखते हैं? आप पाएंगे कि धागा वृत्ताकार आकार ग्रहण कर लेता है, जैसा कि चित्र 9.16 में दर्शाया गया है। प्रारम्भ में धागे के दोनों ओर साबुन की झिल्ली थी। दोनों ओर की झिल्ली इस पर बल लगा रही थी और कुल पृष्ठ तनाव बल शून्य था। अंदर की झिल्ली नष्ट कर दिए जाने पर बल के प्रभाव से धागे का आकार वृत्ताकार हो गया ताकि यह अधिकतम क्षेत्र घेर सके। ऐसा होने का कारण यह है कि बाहरी झिल्ली न्यूनतम क्षेत्रफल प्राप्त करने का प्रयत्न करती है।

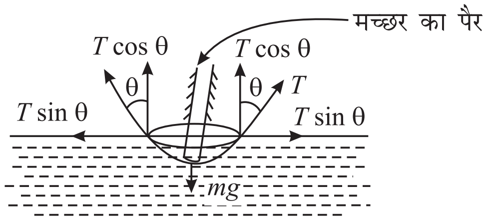
9.4.2 पृष्ठ तनाव के उपयोग

(a) मच्छरों का जल के पृष्ठ पर बैठना

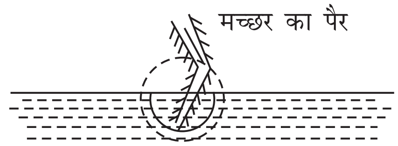
आपने मच्छरों को जल के पृष्ठ पर बैठे देखा है? ये द्रव के पृष्ठ तनाव के कारण नहीं डूबते। उस बिंदु पर जहाँ मच्छर के पैर जल में डूबते हैं, द्रव का तल अवतल हो जाता है। पृष्ठ तनाव का बल तल पर स्पर्श रेखीय दिशा में कार्य करता है। फलस्वरूप यह क्षैतिज के साथ एक कोण बनाता है। इस बल का ऊर्ध्व घटक, मच्छर के भार को, जो कि ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर लगता है संतुलित करता है, जैसा कि चित्र 9.17 में दिखाया गया है।



टिप्पणियाँ



(a)

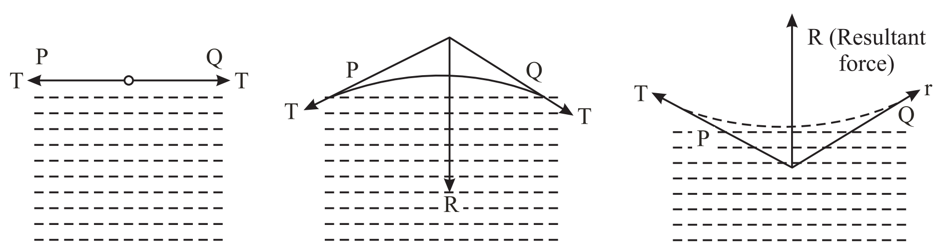


(b)

चित्र. 9.17 : मच्छर का भार पृष्ठ तनाव के बल=$2\pi rT\cos\theta$ से संतुलित होता है। (a) जल की सतह में नमन के कारण अवतल सतह का बनना (b) परिवर्धित आकार

(b) एक गोलीय तल पर अवतल भाग में अतिरिक्त दाब

द्रव पृष्ठ के एक छोटे से भाग पर विचार करें जिस पर एक रेखा PQ है जैसा कि चित्र 9.18 में दर्शाया गया है। यदि तल समतल है तो $\theta = 90^0$। इस रेखा के दोनों ओर पृष्ठ तनाव पृष्ठ के स्पर्श रेखीय है और ये एक दूसरे को संतुलित करते हैं और परिणामी स्पर्शरेखीय बल शून्य है [चित्र. 9.18 (a)]। यदि पृष्ठ उत्तल या अवतल हों [चित्र. (9.18 (b)] व [Fig. 9.18 (c)] तो रेखा QP के किनारों की ओर लगे बलों का



चित्र. 9.18: (a) समतल पृष्ठ (b) उत्तल पृष्ठ (c) अवतल पृष्ठ

परिणामी R होगा और इसकी दिशा वक्रतल की वक्रता केन्द्र की ओर होगी। इस प्रकार जब भी तल वक्र हों तो पृष्ठ तनाव के कारण एक बल पृष्ठ के वक्रता केन्द्र की ओर लगता है। यह दाब पृष्ठ पर एक बराबर और विपरीत दिशा में लगने वाले बल से संतुलित होता है। अत: द्रव पृष्ठ के अवतल होने पर अवतल भाग की ओर सदैव एक अतिरिक्त बल कार्य करता है चित्र (9.18 B)।

(i) गोलाकार बूंद

एक बूंद का केवल एक बाहरी तल होता है (द्रव का वह क्षेत्र जो हवा के संपर्क में रहता है द्रव का पृष्ठ कहलाता है)।

मान लीजिए कि r छोटी सी गोलाकार बूँद की त्रिज्या है और P बूंद के अंदर (जो कि अंदर अवतल और बाहर उत्तल है) अतिरिक्त दाब है तब

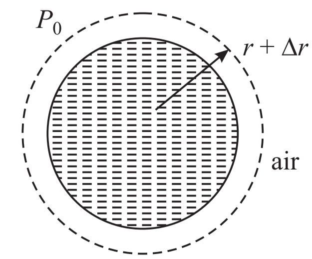
$$P = (P_i - P_0)$$

जहाँ P_i और P_0 क्रमश: बूंद के अन्दर व बाहर दाब हैं। (चित्र 9-19a) यदि इस सतत् अतिरिक्त

दाब P के कारण बूंद की त्रिज्या Δr परिमाण से बढ़ जाती है तो गोलाकार बूंद के पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि

$$\Delta A = 4\pi\,(r + \Delta r)^2 - 4\pi r^2$$
$$= 8\pi\, r\, \Delta r$$

जहाँ पर हमने Δr^2 को नगण्य मान लिया है। द्रव पर इस क्षेत्रफल वृद्धि के लिए किया गया कार्य



चित्र. 9.19 (a) :एक गोलाकार बूंद

W = अतिरिक्त पृष्ठीय ऊर्जा $= T\Delta A = T.\, 8\pi\, r\, \Delta r$ (9.7)

यदि यह बूंद साम्य अवस्था में हो तो यह अतिरिक्त पृष्ठीय ऊर्जा प्रसार में किये गए उस कार्य के बराबर होगी जो प्रसार दाब में अंतर या अतिरिक्त दाब के कारण होता है।

किया गया कार्य $= P\,\Delta V = P.\,4\pi\, r^2 \Delta r$ (9.8)

समी. (9.7) और (9.8), को संयुक्त करने पर हम निम्न संबंध प्राप्त करते हैं:

$$P.\,4\pi\, r^2 \Delta r = T.8\,\pi\, r\, \Delta r$$

या
$$P = 2\,T/\,r \qquad (9.9)$$

(ii) जल में हवा के बुलबुले

इसमें भी केवल एक पृष्ठ होता है जो अंदर की ओर होता है। अत: T पृष्ठ तनाव वाले द्रव के भीतर अतिरिक्त दाब

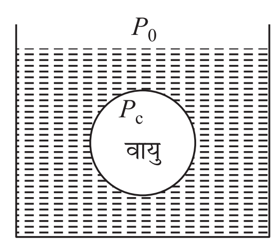
$$P = 2T/\,r \qquad (9.10)$$

(iii) हवा में तैरते साबुन के बुलबुले

साबुन के बुलबुले में दो समान क्षेत्रफल के तल होते हैं (बाहरी और अंदर का) जैसा कि चित्र 9.19(c) में दर्शाया गया है। अत: r त्रिज्या के साबुन के बुलबुले के अंदर अतिरिक्त दाब

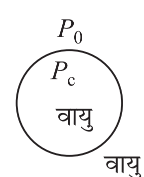
$$P = 4T/\,r \qquad (9.11)$$

यहाँ T साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव है।



चित्र. 9.19 b : हवा का बुलबुला

यह जल के अंदर बने समान आकार के हवा के बुलबुले के अंदर अतिरिक्त दाब का दो गुना है। अब आप समझ सकते हैं कि साबुन का बुलबुला बनाने के लिए क्यों थोड़ा अधिक दाब की आवश्यकता पड़ती है।



चित्र.9.19 (c)

उदाहरण 9.3: भीतरी और बाहरी दाब के अंतर की गणना करें जब (i) गोलाकार साबुन का बुलबुला हवा में हो (ii) हवा का बुलबुला जल में हो (iii) जल की बूंद हो। दिया है जल का पृष्ठ तनाव $= 7.2 \times 10^{-2}$ Nm^{-1} और

साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव $= 7.5 \times 10^{-2}$ Nm^{-1} प्रत्येक बुलबुले की त्रिज्या $= 1$ mm।

हल:

(i) हवा में r त्रिज्या के साबुन के बुलबुले के भीतर अतिरिक्त दाब

$$P = 4T/r$$

$$= \frac{4 \times 2.5 \times 10^{-2}}{1 \times 10^{-3} \text{ m}} \text{ Nm}^{-1}$$

$$= 100 \text{ Nm}^{-2}$$

(ii) जल में हवा के बुलबुले के भीतर अधिक दाब

$$= 2T'/r$$

$$= \frac{2 \times 7.2 \times 10^{-2} \text{ Nm}^{-1}}{1 \times 10^{-3} \text{ m}}$$

$$= 144 \text{ Nm}^{-2}$$

(iii) जल गोलाकार की बूंद के अंदर अतिरिक्त दाब $= 2T'/r$

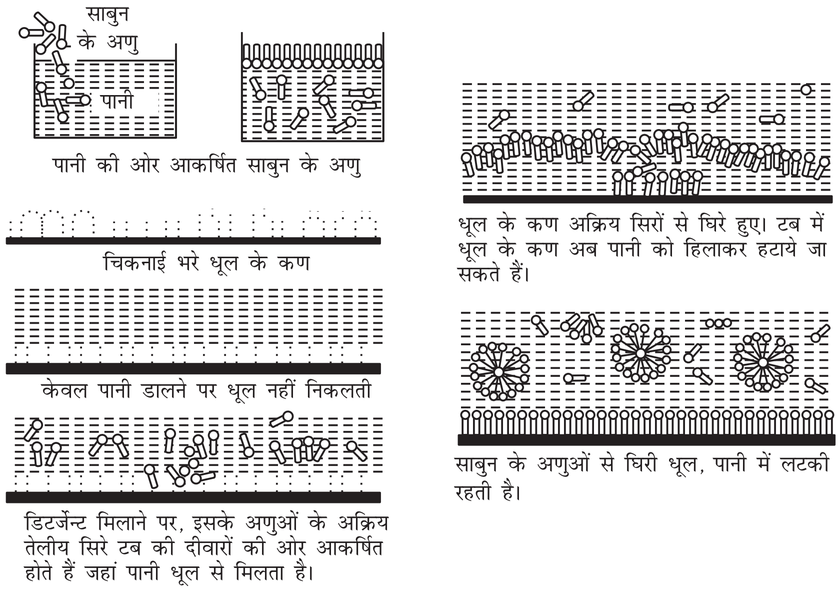
$$= 144 \text{ Nm}^{-2}$$

(c) डिटर्जेंट एवं पृष्ठ तनाव

आपने बहुत से विज्ञापन देखे होंगे जिनमें डिटर्जेंट की विशेषताएं बताई जाती हैं कि ये कपड़ो से तेल के दाग छुड़ा देते है। पानी धोने और सफाई के माध्यम के रूप में प्रयुक्त होता है। साबुन और डिटर्जेंट पानी का पृष्ठ तनाव कम कर देते हैं। यह धोने और सफाई के लिए वाँछित है। क्योंकि शुद्ध पानी के पृष्ठ तनाव का मान अधिक होने के कारण यह कपड़े के रेशों के बीच फंसे धूल गदंगी के कणों या तेल के अणुओं तक आसानी से नहीं पहुंच पाता है।

आप जानते हैं कि साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव जल की अपेक्षा कम है और डिटर्जेंट का इससे भी कम होता है इसलिए ये साबुन की अपेक्षा अधिक प्रभावी होते हैं। डिटर्जेंट को जल में घोलकर उपयोग में लाने पर मैल के कणों की कपड़े के रेशे पर पकड़ कम हो जाती है। जिसके फलस्वरूप कपड़े को रगड़ने व निचोड़ने पर मैल आसानी से छूट जाता है।

डिटर्जेंट मिलाने पर इसके अणु एक ओर जल और दूसरी ओर तेल को आकर्षित करते हैं और जल के पृष्ठ तनाव को बहुत कम कर देते है। इससे मैल के कणों के इर्द-गिर्द डिटर्जेंट और फिर जल से घिर कर सूक्ष्म गोलों के रूप में अंतरापृष्ठ बन सकते हैं। डिटर्जेंट के गुण का उपयोग केवल कपड़े धोने में नहीं है अपितु खनिज अयस्क, तेल आदि के निकालने में भी होता है।



चित्र 9.20: डिटर्जेन्ट की क्रिया

(d) मोम की बतख का पानी पर तैरना

आपने सीखा कि द्रवों का पृष्ठ तनाव घुली हुई अशुद्धियों के कारण कम हो जाता है। यदि आप कपूर की एक छोटी सी टिकिया को मोम के बतख (खिलौने) की पेंदी में चिपकाकर स्थिर जल की सतह पर छोड़ दें तो आप देखेंगे कि कुछ समय बाद मोम की बतख जल पर इधर-उधर चलने लगती हैं। कपूर के पानी में घुलने से बतख के ठीक नीचे के जल के पृष्ठ तनाव का मान चारों ओर के जल के पृष्ठ तनाव से कम हो जाता है। पृष्ठ तनाव बलों का कुल अंतर बतख को चलाता है।

अब यह जानने का समय है कि आपने क्या सीखा। अत: निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

पाठगत प्रश्न 9.2

1. ससंजक और आसंजक बलों में क्या अंतर है?
2. द्रव की छोटी बूंदें गोल क्यों होती हैं?
3. क्या ठोस पदार्थ भी पृष्ठ तनाव के गुण दर्शाते हैं? क्यों?
4. पारे को समतल पर गिराने पर उसके छोटे-छोटे गोले क्यों बन जाते हैं?
5. निम्न में से किसके भीतर अतिरिक्त दाब का मान अधिक है?

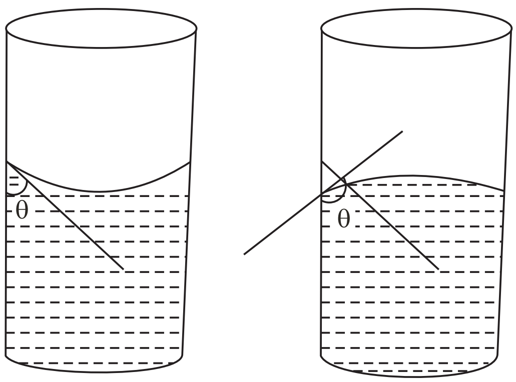
   (i) जल के अंदर 2 cm त्रिज्या के हवा के बुलबुले का जबकि जल का पृष्ठ तनाव $727 \times 10^{-3}\,Nm^{-1}$ है।

   अथवा

   (ii) 4 cm त्रिज्या के साबुन के बुलबुलों का जबकिसाबुन के घोल का पृष्ठ तनाव $25 \times 10^{-3}\,Nm^{-1}$ है।

9.5 स्पर्श कोण

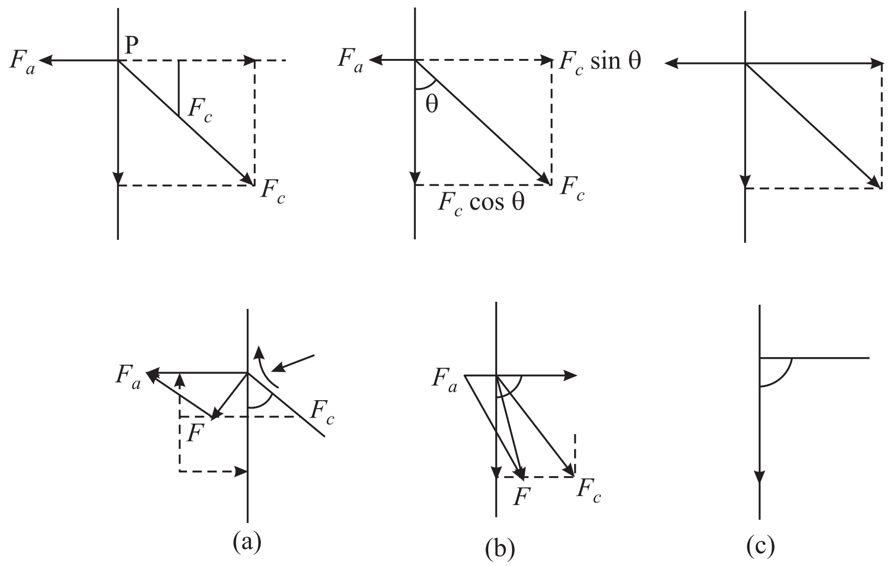
आप देख सकते है कि एक पात्र में रखे हुए द्रव का मुक्त पृष्ठ वक्राकार होता है। उदाहरण के लिए जब एक काँच के जार में पानी भरा जाता है तो यह अवतल हो जाता है, लेकिन यदि पैराफीन मोम के जार में पानी भरा जाता है तो यह उत्तल हो जाता है। इसी प्रकार जब पारे को काँच के गिलास में भरा जाता है तो उसका तल उत्तल होता है। अतः हम यह देखते हैं कि एक पात्र में द्रव का आकार, द्रव की प्रकृति, पात्र के पदार्थ तथा द्रव के मुक्त पृष्ठ के ऊपर के माध्यम पर निर्भर करता है। इसका विवेचन करने के लिए हम स्पर्श कोण की अवधारणा का समावेश करते हैं। यह स्पर्श बिन्दु पर द्रव के भीतर, द्रव-पृष्ठ के स्पर्श रेखीय तल तथा पात्र की दीवारों के स्पर्श रेखीय तल के बीच का कोण है।



चित्र. 9.21 :मुक्त तल की प्रकृति (a) जल को काँच के जार (b) पैराफीन मोम के जार, में भरा गया है।

चित्र 9.21 काँच के जार व पैराफीन मोम के जार में जल के लिए स्पर्शकोण दर्शाता है। काँच के जार में जल को रखें तो इसका तल अवतल होता है, और स्पर्श कोण का मान 90° कम अर्थात् न्यून कोण होता है और पैराफीन के जार में जल का तल उत्तल होता है और स्पर्श कोण का मान 90^0 से अधिक आता है। ठीक यही बात कॉच के जार में पारे के लिए भी लागू होती है। एक बर्तन में रखे हुए द्रव के पृष्ठ पर स्थित एक अणु पर कई बल कार्य करते हैं। चूंकि द्रव केवल निचले चतुर्थांश में उपस्थित है। इसलिए परिणामी ससंजक बल P पर स्थित अणु पर सममित रूप से कार्य करता है। चित्र 9.22 (a)]। इसी प्रकार सममिति के कारण परिणामी आसंजक बल F_a पात्र की दीवारों के लम्बवत् बाहर की ओर लगता है। बल F_c को परस्पर दो लंबवत घटकों में विघटित किया जा सकता है। $F_c \cos\theta$ ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर कार्य करता है और $F_c \sin\theta$ पात्र की सीमा के लंबवत् कार्य करता है। स्पर्शकोण θ का मान F_c और F_a के सापेक्ष मानों पर निर्भर करता है।

स्थिति: I: यदि $F_a > F_c \sin\theta$ इस स्थिति में नेट क्षैतिज बल बाहर की ओर लगेगा और $(F_a - F_c \sin\theta)$ होगा तथा $F_c \cos\theta$ और $(F_a - F_c \sin\theta)$ का परिणामी दीवार से बाहर स्थित होगा क्योंकि द्रव लगातार लगते विरूपक बल के विरुद्ध स्थिर नहीं रह सकता है, इसलिए द्रव तल के सभी अणु किनारे पर F_c के लंबवत व्यवस्थित हो जाते हैं। इससे F_c का कोई घटक द्रव पृष्ठ की स्पर्शज्या रेखा की दिशा में कार्य नहीं करता है। निश्चित रूप से ऐसे पृष्ठ किनारे पर गोलीय अवतल होते हैं। (क्योंकि वृत्त की त्रिज्या परिधि के प्रत्येक बिन्दु पर लंबवत होती है)। यह स्थिति कॉच की नली में रखे जल के साथ होती है।



चित्र. 9.22 : द्रव नव चन्द्रक के विभिन्न रूप

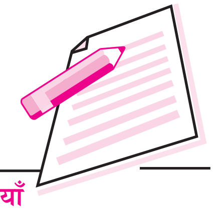
स्थिति 2 : यदि $F_a < F_c \sin\theta$ तब F तथा $(F_c \sin\theta - F_a)$ का परिणामी क्षैतिज रूप से कार्य करता है और $F_c \cos\theta$ ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर कार्य करता है (दोनों द्रव के निचले गोलाध में ही कार्य करते हैं)। द्रव का पृष्ठ सीमा पर इस प्रकार व्यवस्थित हो जाता है कि यह F के लंबवत हो जाता है। फलस्वरूप द्रव तल उत्तल गोलीय होता है। यह काँच नली में भरे पारे के लिए सही है।

स्थिति 3 : यदि $F_a = F_c \sin\theta$, तब परिणामी $F_a = F_c \sin\theta$, ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर कार्य करता है अत: पात्र की सीमा पर द्रव का पृष्ठ क्षैतिज या समतल होता है।

9.6 केशिका क्रिया (Capillary Action)

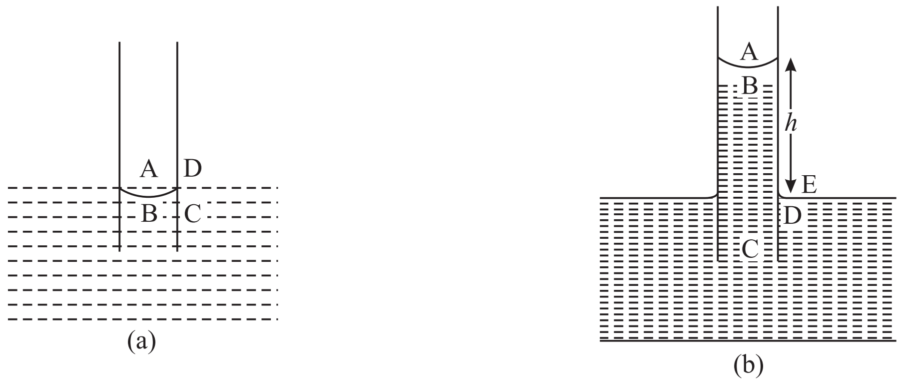
आपने अपनी पुस्तिकाओं पर गिरी अतिरिक्त स्याही को हटाने के लिए स्याही सोख पत्र अवश्य प्रयोग किया होगा। स्याही सोख पत्र में स्थित सूक्ष्म हवा की नालियों में स्याही शीघ्रता से चढ़ती है। इसी प्रकार खेत का जल पेड़ के तने पर स्थिति असंख्य केशिकाओं की सहायता से शाखाओं और पत्तियों तक पहुँचाता है। क्या आप जानते है कि किसान वर्षा के बाद ही खेत जोतते हैं ताकि मिट्टी की ऊपरी परतों की केशिकाएं टूट जायें और मिट्टी में फंसा जल पेड़ों द्वारा उपयोग किया जा सके। दूसरी ओर हम यह पाते हैं कि यदि किसी केशिका को पारे में डुबाया जाय तो इसके अंदर पारे का तल बाहर पारे के तल से नीचे चला जाता है। किसी छोटी अनुप्रस्थ परिच्छेद वाली नली में किसी द्रव का ऊपर या नीचे जाना पृष्ठ तनाव के कारण होता है।

केशिका नलियों में द्रव का ऊपर उठना या नीचे जाना द्रव की केशिका क्रिया या केशिकात्व कहलाता है।



9.6.1 केशिका नली में द्रव का चढ़ना

हम एक केशिका नली लेते है जो कि किसी द्रव (जैसे जल) में डूबी है। नली के अंदर द्रव का मेनिस्कस अवतल होता है जैसा कि चित्र (9.23) में दिखाया गया है। इसका कारण यह है कि कांच तथा जल के बीच आसंजक बल जल के अणुओं के बीच संसजक बलों से अधिक हैं।



चित्र. 9.23 : केशिका क्रिया

हम द्रव-वायु अंतरापृष्ठ के निकट चार बिंदु A, B, C और D लेते है, हम जानते हैं कि द्रव की ऊपरी सतह के ठीक नीचे का दाब इसके ठीक ऊपर के दाब से $2T/R$, कम है। अर्थात्

$$P_B = P_A - 2T/R \qquad (9.12)$$

जहाँ पर T द्रव-वायु अंतरापृष्ठ का पृष्ठ तनाव है। एवं R अवतल पृष्ठ की त्रिज्या है।

लेकिन A पर दाब = D पर दाब = वायुमण्डलीय दाब P (माना), और D पर दाब C पर दाब के बराबर है। अत: बिंदु पर दाब D बिंदु से कम है। लेकिन हम यह भी जानते है कि द्रव में एक ही ऊँचाई पर स्थित सभी बिंदुओं पर दाब समान होना चाहिए। इसीलिए बाहरी हिस्से से द्रव नली में ऊपर चढ़ जायेगा।

इस प्रकार द्रव केशिका नली में ऊपर उठना प्रारम्भ होता है और एक विशेष ऊंचाई h तक पहुँचता है (चित्र 9.2.3 b) जहां पर द्रव स्तंभ पर दाब का मान $2T/R$..हो जाता है और इसके बाद उठना बंद हो जाता है। इस स्थिति में

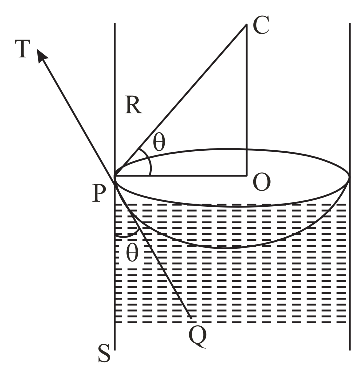
$$h\,\rho\,g = 2\,T/R \qquad (9.13)$$

जहां ρ द्रव का घनत्व तथा g गुरुत्वीय त्वरण है। यदि r केशिका नली की त्रिज्या हो और θ स्पर्श कोण हो तो चित्र. (9.24) की ज्यामिति से

$$R = r/\cos\theta$$

R के इस मान को सभी (9.13) में रखने पर

$$h\,\rho\,g = 2T/\,r/\cos\theta$$



चित्र 9.24: स्पर्श कोण

or $$h = 2T\ \cos\theta\ /\ r\,\rho\,g \qquad (9.14)$$

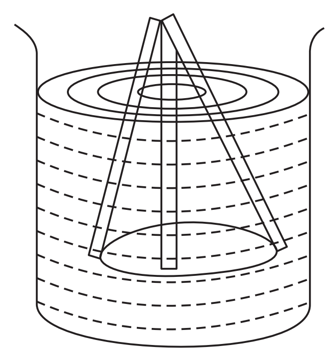
ऊपर प्राप्त सूत्र (9.14) से स्पष्ट होता है कि यदि नली की त्रिज्या कम होगी तो द्रव अधिक ऊँचा उठेगा।

पाठगत प्रश्न 9.3

1. क्या स्पर्शकोण का मान द्रव के पृष्ठ तनाव पर निर्भर करता है?
2. एक ठोस एवं द्रव के बीच स्पर्शकोण 90^0 से कम है। क्या द्रव ठोस को गीला करेगा? यदि एक केशिका इसी ठोस के पदार्थ की बना दी जाए तो इसमें द्रव ऊपर उठेगा या नीचे गिरेगा?
3. थर्मामीटर बनाते समय पारे से भरे नाँद में केशिका नली को सीधे डुबाकर पारा भरना क्यों मुश्किल है?
4. उस कोशिका नली की त्रिज्या की गणना करें जिसे जल से भरे बर्तन में डालने पर जल 3 cm ऊपर उठ जाए। द्रव का पृष्ठ तनाव 7.2×10^{-2} N m^{-1}. जल का घनत्व 1000 kg m^3, स्पर्शकोण का मान शून्य है और g = 10 m s^{-2}.
5. मिट्टी का तेल (केरोसिन) लालटेन की बत्ती में कैसे चढ़ जाता है?

9.7 श्यानता

जब आप एक बीकर में रखे हुए द्रव के बीच में एक काँच की छड़ डाल कर उसे घुमाएं तो आप देखते हैं कि द्रव की दीवार के पास गति और बीच में गति समान नहीं है (चित्र 9.25) अब दो द्रवों (उदाहरण के लिए जल और ग्लिसरीन) के प्रवाह को समान पाइपों में देखें। आप पाएंगे कि जल तेजी से बहता है और ग्लिसरीन धीरे-धीरे बहती है। प्रत्येक द्रव में स्टील की गेंदे डालें। गेंदें ग्लिसरीन में जल की अपेक्षा अधिक धीमी चाल से गति करती हैं। इन प्रेक्षणों से द्रवों के एक लाक्षणिक गुण का पता चलता है। जो उनकी गति का निर्धारण करते हैं। इस गुण को **श्यानता** कहते हैं।

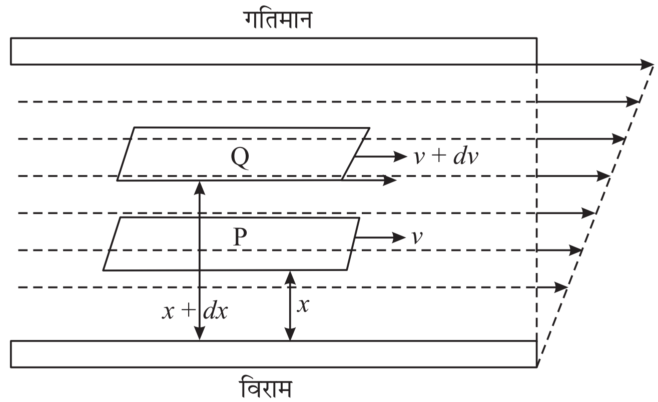


चित्र. 9.25: पानी को काँच की छड़ से घुमाना

9.7.1 श्यानता गुणांक

हम जानते हैं कि जब एक ठोस वस्तु दूसरी ठोस वस्तु के ऊपर फिसलती है तो, उनके बीच एक घर्षण बल कार्य करता है। इसी प्रकार जब एक द्रव प्रवाहित होता है तो आस-पास की दो परतें एक दूसरे पर स्पर्श रेखीय बल आरोपित करती हैं जो इनके सापेक्ष प्रवाह का विरोध करता है। *द्रव का वह गुण जिसके कारण वह समीपवर्ती परतों की सापेक्ष गति का विरोध*

करता है **श्यानता** कहलाता है। चित्र 9.26 एक नली से द्रव के प्रवाह को दर्शाता है। नली की दीवार को स्पर्श करने वाली परतें स्थिर मानी जा सकती हैं। (द्रवों तथा नली की दीवार के बीच उच्च घर्षण बल के कारण) दूसरी परतें भिन्न-भिन्न वेगों से गतिशील हैं। मान लीजिए कि सतह से x दूरी पर परत की गति υ और $x + \Delta x$ दूरी पर $\upsilon + d\upsilon$ है।



चित्र 9.26: किसी नलिका में द्रव का प्रवाह: भिन्न-भिन्न परतें भिन्न-भिन्न वेग से गति करती हैं।

अतः लम्बवत dx दूरी पर वेग में dv परविर्तन होता है। dv/dx को वेग प्रवणता कहते हैं। तरल की दो परतों के बीच कार्यकारी श्यानता बल समानुपाती होता है–

- परत के संपर्क क्षेत्रफल A, अर्थात् $F \propto A$.
- द्रव की वेग प्रवणता के जो द्रव के प्रवाह की दिशा के लंबवत् होता है। अर्थात्

इनको संयुक्त करने पर $F \alpha \dfrac{dv}{dv}$

या
$$F = -\eta A\,(dv/dx) \qquad (9.15)$$

जहाँ n एक आनुपातिकता नियतांक है और इसे **श्यानता गुणाँक** कहते हैं। ऋणात्मक चिह्न दर्शाता है, कि बल गति का विरोध करता है।

श्यानता गुणाँक का SI मात्रक $N\,s\,m^{-2}$ है, cgs प्रणाली में श्यानता का मात्रक पॉइज है।

$$1 \text{ पॉइज} = 0.1\ N\,s\,m^{-2}$$

श्यानता गुणाँक की विमा $[ML^{-1}\,T^{-1}]$ होती है।

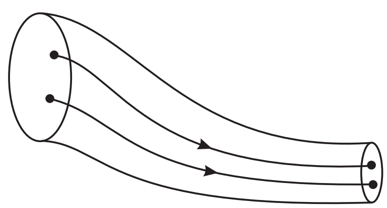
9.8 द्रव प्रवाह के प्रकार

क्या आपने कभी बाढ़ देखी है? क्या यह शहर में जल वितरण प्रणाली में प्रवाह के समान है? इन प्रश्नों का उत्तर प्राप्त करने के लिए हम द्रवों के प्रवाह का अध्ययन करते हैं।

9.8.1 धारारेखीय प्रवाह

किसी द्रव के कणों द्वारा अनुसरण किया गया पथ प्रवाह–रेखा कहलाता है। यदि पथ के किसी बिंदु से होकर गुजरने वाला प्रत्येक द्रव कण समान प्रवाह–रेखा का अनुसरण करता है तो इस प्रकार के प्रवाह को **धारा रेखीय प्रवाह** कहते हैं। किसी धारा रेखीय प्रवाह को एक वक्र या पथ द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है जिसके किसी बिंदु पर स्पर्शरेखा उस बिंदु पर द्रव प्रवाह के वेग की दिशा दर्शाती है। एक स्थिर प्रवाह में धारा रेखाएं प्रवाह रेखाओं की संपाती होती हैं।

ध्यान दीजिये कि धारा रेखीय प्रवाह में दो धारा रेखाएं आपस में एक दूसरे को कभी–कभी नहीं काटती हैं। क्योंकि कटान बिंदु से दो स्पर्श रेखाएं खींची जा सकती हैं जो द्रव के वेग की दो दिशाएं दर्शाएंगी जैसा होना संभव नहीं है। जब नली में किसी द्रव के प्रवाह का वेग क्रांतिक वेग υ_c की अपेक्षा कम होता है तो गति धारा रेखीय होती है। ऐसी स्थिति में हम धारा की संपूर्ण मोटाई को एक दूसरे पर फिसलती अनेकों समतल परतों से निर्मित मान सकते हैं। इस तरह के प्रवाह को *पटलीय प्रवाह* कहा जाता है।

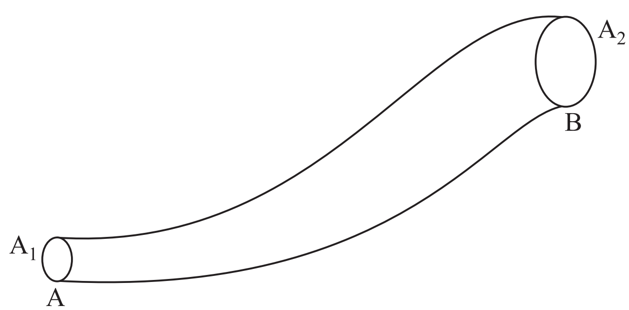


चित्र. 9.27: धारा रेखीय प्रवाह

जब बहते हुए द्रव का वेग क्रांतिक वेग υ_c से अधिक हो जाता है तो धारा रेखाएँ/प्रवाह रेखाएं आपस में मिल जाती है और प्रवाह पथ टेढ़ा–मेढ़ा हो जाता है। प्रवाह रेखाएं एक दूसरे को काटती रहती हैं। इस प्रकार की गति को ***प्रक्षुब्ध गति*** कहा जाता है।

9.8.2 सांतत्य समीकरण

यदि एक असंपीड्य, अश्यान द्रव किसी असमान अनुप्रस्थ परिच्छेद वाली नली से गुजरे तो किसी भी धारा रेखीय प्रवाह के लिए किसी बिंदु पर द्रव की चाल और उस बिंदु पर अनुप्रस्थ परिच्छेद के क्षेत्रफल का गुणनफल नियत रहता है। यदि A_1 औरA_2 नली के उन अनुप्रस्थ परिच्छेदों के क्षेत्रफल हैं जहां से द्रव नली में क्रमशः प्रवेश कर रहा है और बाहर निकल रहा है, चित्र 9.28 और υ_1 और υ_2 क्रमशः उन बिंदुओं पर द्रव की चालें हैं और ρ द्रव का घनत्व है, तो A बिंदु पर प्रवेश होने वाला द्रव एक सेकण्ड मेंυ_1 दूरी तय करता है। अतः प्रति सेकण्ड प्रवेश करने वाले द्रव का आयतन $= A_1 \times \upsilon_1$. अतः बिंदु A पर प्रवेश करने वाले द्रव का द्रव्यमान $= A_1\, \upsilon_1\, \rho$। इसी प्रकार बिंदु B पर प्रति सेंकड बाहर निकलने वाले द्रव का द्रव्यमान $= A_2\, \upsilon_2\, \rho$



चित्र. 9.28: किसी नली से प्रवाहित होता द्रव

क्योंकि नली के अंदर कहीं भी तरल एकत्रित नहीं हो रहा है। इसलिए किसी भी अनुप्रस्थ काट से प्रवाहित होने वाले द्रव का द्रव्यमान समान होना चाहिए। अत:

$$A_1\,\upsilon_1\,\rho\;=A_2\,\upsilon_2\,\rho$$

या

$$A_1\,\upsilon_1\;=A_2\,\upsilon_2$$

यह व्यंजक **सांतत्य समीकरण** कहलाता है।

9.8.3 क्राँतिक वेग व रेनॉल्ड संख्या

हम जानते हैं कि जब प्रवाह की गति क्रांतिक वेग से कम होती है तो प्रवाह धारा रेखीय रहता है। लेकिन जब प्रवाह का वेग क्रांतिक वेग से अधिक हो जाता है तो प्रवाह प्रक्षुब्ध हो जाता है।

किसी द्रव के क्रांतिक वेग का मान निम्नलिखित पर निर्भर करता है:

- द्रव की प्रकृति अर्थात द्रव के श्यानता गुणांक (η) पर
- नली का व्यास (d) जिसमें से होकर द्रव प्रवाहित हो रहा है और
- द्रव का घनत्व (ρ).

प्रयोगों द्वारा सिद्‌ध होता है कि, $\upsilon_c \,\alpha\, \eta$; $\upsilon_c \,\alpha\, \frac{1}{\rho}$ और $\upsilon_c \,\alpha\, \frac{1}{d}$.

अर्थात

$$\upsilon_c\;=R.\eta/\rho\;d \tag{9.16}$$

जहाँ पर R आनुपातिकता स्थिरांक है और इसे **रेनॉल्ड संख्या** कहा जाता है। इसकी कोई विमा नहीं होती। प्रयोगों द्वारा सिद्‌ध होता है कि प्रवाह पटलीय होता है यदि R 1000 से कम हो 1000 और 2000 के बीच R के मान के लिए प्रवाह अस्थिर और R का मान 2000. से अधिक होने पर प्रवाह प्रक्षुब्ध हो जाता है।

उदाहरण 9.1: हृदय चक्र के विश्राम के भाग के समय धमनी रक्त की औसत चाल लगभग 30 cm s^{-1} होती है। यदि रक्त का घनत्व 1.05 g cm^{-3}; और $\eta = 4.0 \times 10^{-2}$ पॉइज हो तो बताइए प्रवाह पटलीय है या प्रक्षुब्ध?

हल:(9.16) रेनॉल्ड संख्या $R = \upsilon_c\ \rho\, d/\eta$.

$$R\;=\frac{(30\ \text{cm s}^{-1})\times 2\,\text{cm}\times(1.05\,\text{g cm}^{-3})}{(4.0\times10^{-2}\,\text{g cm}^{-1}\text{s}^{-1})}$$

$$= 1575$$

चूंकि $1575 < 2000$, अत: प्रवाह अस्थिर है।

9.9 स्टोक्स-नियम

सर जार्ज स्टोक्स ने υ. वेग से बहने वाले η श्यानता गुणाँक के अधिक श्यान द्रव में स्वतंत्र रूप से गिरने वाले r त्रिज्या के एक चिकने गोलीय पिंड पर उसकी गति की विपरीत दिशा में लगने वाले स्पर्शरेखीय श्यानबल को मापने के लिए एक नियम बताया। इस नियम को **स्टोक्स नियम** कहते है।

स्टोक्स नियम के अनुसार

$$F \propto \eta \; r \; \upsilon$$

या $$F = K \eta \, r \, \upsilon$$

जहाँ पर K आनुपातिकता नियंतांक है। इसका मान प्रयोगों द्वारा 6π. प्राप्त किया गया है।

अत: स्टोक्स नियम को इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$F = 6\pi \, \eta \, r \, \upsilon \qquad (9.17)$$

इस नियम को विमाओं की विधि से भी प्राप्त किया जा सकता है। स्टोक्स के अनुसार, श्यान बल निम्न बातों पर निर्भर करता है:

- माध्यम के श्यानता गुणाँक (η)
- गोलीय निकाय की त्रिज्या (r)
- निकाय का वेग (υ)

तब $$F \propto \eta^a \; r^b \; \upsilon^c$$

या $$F = K \eta^a \; r^b \; \upsilon^c$$

जहाँ K आनुपातिकता नियतांक है।

दोनों ओर की विमाऐं लेने पर

$$[MLT^{-2}] = [ML^{-1}T^{-1}]^a \, [L]^b \, [LT^{-1}]^c$$

या $$[MLT^{-2}] = [M^a \, L^{-a+b+c} \, T^{-a-c}]$$

दोनों ओर की घातों की तुलना करने पर $a = b = c = 1$.

इसलिए $$F = K \eta \, r \, \upsilon$$

9.9.1 अंतिम वेग (Terminal Velocity)

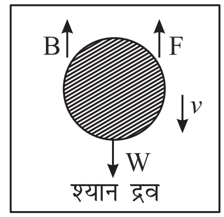
हम एक r त्रिज्या और ρ घनत्व के गोलाकार पिण्ड के σ.घनत्व के द्रव में गिरने पर विचार करते हैं।

निकाय पर लगने वाले बल इस प्रकार हैं:

(i) वस्तु का भार **W** नीचे की ओर

(ii) श्यानबल **F** ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर

(iii) उत्प्लावन बल **B** ऊपर की ओर,



चित्र. 9.29 : एक श्यान द्रव में गिरते हुए गोले पर लगने वाला बल

इन बलों के प्रभाव से किसी विशेष क्षण पर पिंड पर लगने वाला कुल बल शून्य हो जाता है (चूंकि श्यानता वेग वृद्धि के साथ बढ़ती है) और तब पिंड एक स्थिर वेग से नीचे गिरता है जिसे **अंत्य वेग** (Terminal velocity) कहते है। हम जानते हैं कि इन बलों के परिमाण हैं:

$$\text{श्यान बल } F = 6\pi\,\eta\, r\, \upsilon_0$$

जहाँ υ_0 अंतिम वेग है।

$$W = (4/3)\,\pi\, r^3\, \rho g$$

और

$$B = (4/3)\,\pi\, r^3\, \sigma g$$

क्योंकि नेट बल शून्य है इसलिए

$$6\pi\,\eta\, r\, \upsilon_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi r^3 \sigma g$$

या अंतिम वेग

$$\upsilon_0 = \frac{2r^2(\rho - \sigma)g}{9\eta} \qquad (9.18)$$

9.9.2 स्टोक्स नियम के उपयोग

(A) पैराशूट

जब एक सैनिक उड़ते हुए जहाज से कूदता है तो वह गुरुत्वीय त्वरण g के कारण नीचे गिरता है। लेकिन स्टोक्स के अनुसार वायु में पश्चश्यान बल के कारण त्वरण कम होता जाता है और वह एक अंतिम वेग प्राप्त कर लेता है। सैनिक तब एक नियत वेग से नीचे गिरता है और जमीन के निकट एक नियत ऊँचाई पर अपना पैराशूट खोल लेता है और अपने लक्ष्य के निकट सुरक्षित उतर जाता है।

B. वर्षा की बूंदों का वेग

जब वर्षा की बूंदे गुरुत्वीय बल के कारण नीचे गिरती है तो वायु का श्यानकर्षण बल उनकी गति का विरोध करता है। जब श्यान बल गुरुत्वीय बल के बराबर हो जाते हैं तो, बूंद एक

अंतिम वेग प्राप्त कर लेती है। इसलिए धरती पर पहुँचने वाली वर्षा की बूंदों की गतिज ऊर्जा बहुत अधिक नहीं होती।

उदाहरण 9.2: हवा से होकर गुजरने वाली वर्षा की बूंद की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका अंतिम वेग 0.12 m s^{-1}. Given $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $\rho = 1.21 \text{ kg m}^{-3}$, $\sigma = 1.0 \times 10^{3} \text{ kg m}^{-3}$ and $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$.

हल: अंतिम वेग

$$v_0 = \frac{2r^2(\rho - \sigma)g}{9\eta}$$

या

$$r = \sqrt{\frac{9\eta\, v_0}{2\,(\rho - \sigma)g}}$$

$$= \sqrt{\frac{9 \times 1.8 \times 10^{-5} \times 0.12}{2\,(1000 - 1.21)\,9.8}} \text{ m}$$

$$= 10^{-5} \text{ m}$$

पाठगत प्रश्न 9.4

1. धारारेखीय एवं प्रक्षुब्ध प्रवाह में अतर स्पष्ट कीजिए।
2. क्या किसी बहते हुए द्रव में दो धारारेखाएं एक दूसरे को काट सकती हैं?
3. किसी श्यान द्रव के लिए क्रॉतिक वेग किन-किन भौतिक राशियों पर निर्भर करता है?
4. एक 0.01m त्रिज्या की वर्षा की बूंद के लिए अंतिम वेग ज्ञात कीजिए। दिया है वायु का श्यानता गुणांक $1.8 \times 10^{-5} \text{ N s m}^{-2}$ वायु का घनत्व 1.2 kg m^{-3}. पानी का घनत्व $= 1000 \text{ kg m}^{-3}$. Take $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.
5. एक गिलास में रखे द्रव को मथने के बाद कुछ देर रख देने पर द्रव स्थिर हो जाता है, क्यों?

9.10 बर्नूली का सिद्धांत

क्या आपने कभी सोचा खरगोश कुत्ते के बिल में हवा कैसे परिसंचालित होती है? चिमनी से धुआँ एकदम कैसे बाहर आ जाता है। कार का परिवर्त्य शीर्ष तेज चाल में ऊपर को क्यों उभर जाता है? आँधी में आपने अपने छातों को ऊपर की ओर पलटता देखा होगा। इन सभी बातों को बर्नूली के सिद्धांत के आधार पर समझा जा सकता है।

9.10.1 एक प्रवाही तरल की ऊर्जा

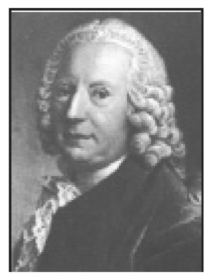
प्रवाही तरल पदार्थों में तीन प्रकार की ऊर्जा होती है। हम गतिज और स्थितिज ऊर्जा से सुपरिचित है। तरलों की तीसरे प्रकार की ऊर्जा उनकी दाब ऊर्जा हैं। यह तरलों में दाब के कारण होती है।

दाब ऊर्जा, दाब में अंतर और इसके आयतन के गुणनफल के बराबर होती है। यदि m द्रव्यमान के एक द्रव का अल्पांश (अवयव) जिसका घनत्व d है, एक दाबान्तर p, के अंतर्गत गतिमान है, तो

$$\text{दाब ऊर्जा} = p \times (m/d) \text{ joule}$$

$$\text{दाब ऊर्जा प्रति इकाई द्रव्यमान} = (p/d) \text{ J kg}^{-1}$$

डेनियल बर्नूली (1700-1782)



स्विस भौतिक शास्त्री एवं गणितज्ञ डेनियल बर्नूली का जन्म 8 फरवरी 1700 में गणितज्ञों के परिवार में हुआ। उन्होंने द्रवगतिकी में महत्वपूर्ण योगदान दिया। उनका प्रसिद्ध कार्य, ''हाइड्रोडाइनेमिका'' 1738 में प्रकाशित हुआ। उन्होंने दाब व ताप में परिवर्तन के साथ गैसों की प्रकृति में परिवर्तन (व्यवहार में परिवर्तन) की व्याख्या की, जिससे गैसों के गतिज सिद्धांत का विकास हुआ।

उन्हें गणितीय भौतिकी का संस्थापक माना जाता है। बर्नूली का सिद्धांत रसायन प्रयोगशालाओं में निर्वात उत्पन्न करने के लिए किया जाता है। इसके लिए एक बर्तन को एक नली से जोड़ दिया जाता है जिससे होकर पानी तेजी से गुजरता है।

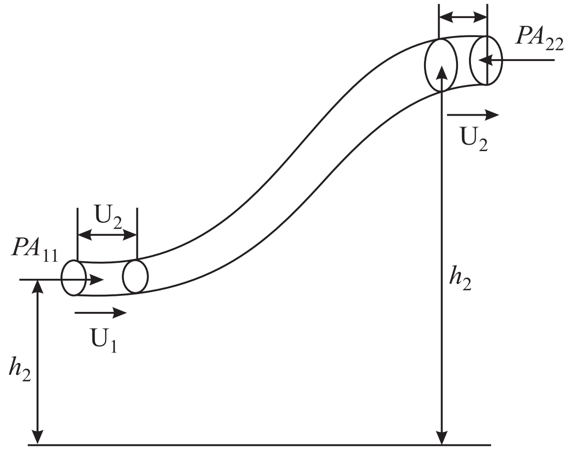
9.10.2 बर्नूली का समीकरण

बर्नूली ने एक समीकरण विकसित किया जो कि इस सिद्धांत को मात्रात्मक रूप से अभिव्यक्त करता है। इस समीकरण को विकसित करने के लिए तीन महत्वपूर्ण अभिधारणायें की गयी हैं।

1.तरल असंपीड्य है अर्थात् जब यह चौड़े मुँह की नली से संकरे मुंह की नली में प्रवेश करता है तो इसका घनत्व अपरिवर्तनीय रहता है।

2.तरल अश्यान है यानि कि इसकी व्युत्पत्ति में श्यानता के प्रभाव को ध्यान में नहीं रखा जाता।

3.तरल की गति धारारेखीय होती है।



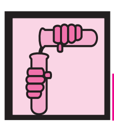
चित्र. 9.30

हम एक परिवर्ती अनुप्रस्थ परिच्छेद के क्षेत्रफल वाली प्रवाहनली लेते हैं जैसा चित्र 9.30 में दर्शाया गया है। माना बिंदु A पर दाब P_1, अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल A_1, प्रवाह का वेग v_1, धरातल से ऊचॉई h_1 है तथा B पर दाब P_2 ,अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल A_2 प्रवाह वेग υ_2, तथा धरातल से ऊँचाई h_2 है।

क्योंकि A और B प्रवाहनली पर कोई भी दो बिंदु हो सकते है; अतः बर्नूली का समीकरण इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$P + 1/2\, d\upsilon^2 + h\, dg =$ स्थिरांक

अर्थात किसी तरल की दाब ऊर्जा, गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जा के योग का मान धारारेखीय प्रवाह के लिए स्थिर होता है।



क्रियाकलाप 9.4

चित्र. 9.31

1. अपने हाथ में कागज की एक शीट लें।
2. कागज के क्षैतिज भाग को चित्र 9.31 की भांति थोड़ा नीचे मोड़ें।
3. कागज की लंबाई पर क्षैतिज फूंक मारें।

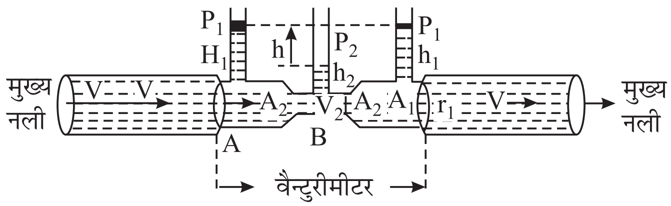
कागज को ध्यान से देखें। यह ऊपर उठ जाता है क्योंकि कागज के ऊपर वायु की चाल बढ़ जाती है और कागज़ के ऊपरी भाग पर दाब कम हो जाता है।

9.10.3 बर्नूली के प्रमेय के अनुप्रयोग

हमारे जीवन में बर्नूली के सिद्धांत के कई अनुप्रयोग हैं। बर्नूली के सिद्धांत के आधार पर कुछ सामान्य रूप से प्रेक्षित घटनाओं की व्याख्या की जा सकती है।

A. प्रवाहमापी या वेंटुरीमीटर

यह एक ऐसा उपकरण है जो नली में बहते हुए द्रव के प्रवाह की दर को मापने के लिए प्रयोग में लाया जाता है। उपकरण को प्रवाह नली में प्रवेश कराया जाता है (चित्र. 9.32) इसमें एक दाबमापी होता है। जिसमें दो नलियां एक ऐसी नली से जुड़ी होती हैं जिसके दो सिरों A और B के अनुप्रस्थकाटों के क्षेत्रफल क्रमशः A_1 और A_2 हैं। मान लीजिए कि मुख्य नली की क्षैतिज ऊँचाई h है। तब बेन्टुरीमीटर से द्रव के स्थिर प्रवाह के लिए बर्नूली के प्रमेय का उपयोग करने पर,



चित्र 9.32: वैन्टुरीमीटर

A पर कुल ऊर्जा = B पर कुल ऊर्जा

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + mgh + \frac{mp_1}{d} = \frac{1}{2} m v_2^2 + mgh + \frac{mp_2}{d}$$

अर्थात,

$$(p_1 - p_2) = \frac{d}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{v_1^2 d}{2}\left[\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 1\right] \qquad (9.19)$$

यह दर्शाता है कि अधिक वेग वाले बिंदुओं पर दाब का मान कम होता है (क्योंकि दाब ऊर्जा और गतिज ऊर्जा के योग का मान स्थिर रहता है। यह ***वेंचुरी सिद्धांत*** कहलाता है।

बेन्टुरीमीटर में स्थिर प्रवाह के लिए

A बिंदु पर पहुँचने वाले जल का आयतन = A बिंदु से बाहर निकलने वाले जल का आयतन

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad (9.20)$$

द्रव को असंपीड्य माना गया है अर्थात् संकेरे भाग में द्रव का वेग अधिक होता है और चौड़े सिरे पर द्रव का वेग कम होता है।

इस परिणाम को (9.19) में प्रयोग करने पर हम निष्कर्ष निकालते हैं कि संकरे सिरों पर दाब कम होता है।

$$p_1 - p_2 = \frac{v_1^2 d}{2}\left[\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2} d v_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \quad 1\right]$$

अर्थात $$v_1 = \sqrt{\dfrac{2(p_1 - p_2)}{d\left(\dfrac{A_1^2}{A_2^2}\right)-1}} \qquad (9.21)$$

यदि वेन्टुरीमीटर के दो फलकों के बीच स्तर भिन्नता h हो तो

$$p_1 - p_2 = h\,d\,g$$

और $$v_1 = \sqrt{2hg/[(A_1^2/A_2^2)-1]}$$

इससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $v_1 \propto \sqrt{h}$ चूंकि एक वेन्टुरीमीटर के लिए अन्य सभी प्राचल नियत होते हैं।

इस प्रकार $v_1 = K\sqrt{h}$; जहाँ पर एक K स्थिरांक है।

प्रति सेकण्ड प्रवाहित होने वाले द्रव का आयतन

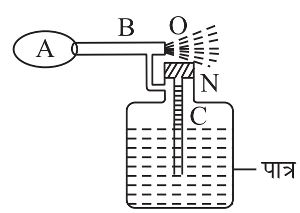
$$V = A_1\,v_1 = A_1 \times K\sqrt{h}$$

या $$V = K'h$$

जहाँ पर $K' = K\,A_1$ एक दूसरा स्थिरांक है।

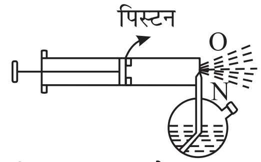
बर्नूली के सिद्धांत का उपयोग अनेक उपकरणों में किया जाता है। जैसे कणित्र (एटोमाइजर), स्प्रेगन, बुनसेन-ज्वालक, कार्बुरेटर, एयरोफॉयल आदि।

(i) कणित्र : कणित्र चित्र 9.33 में दर्शाया गया है। जब रबर बल्ब A को दबाया जाता है तब हवा B नली के संकरे द्वार से उच्च वेग से निकलती है और इस कारण इसके आस-पास कम दाब का क्षेत्र निर्मित हो जाता है। द्रव (इत्र या रंग) बर्तन से नली में ऊपर की ओर प्रवाहित होने लगता है और नोजल N. से बाहर निकलता है। जब द्रव नोजल में पहुँचता है तो हवा की धारा नली B से इसे बारीक फुहार के रूप में बहाती है।

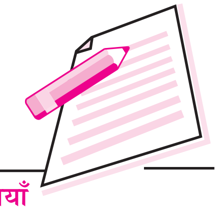


चित्र. 9.33 : कणित्र

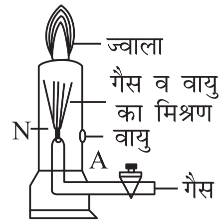
(ii) स्प्रेगन : जब पिस्टन अंदर की तरफ आता है तो यह संकरे रंध्र 'O' से हवा को अधिक वेग से निकालता है जिसके कारण आसपास कम दाब का क्षेत्र बन जाता है, द्रव बर्तन के सिरे (किनारे) से जुड़ी पतली नली से, जो ठीक 'O'. के नीचे खुलती है, खींच लिया जाता है। पिस्टन से निकलने वाली हवा के द्वारा नली के किनारे पहुँचने पर द्रव बारीक फुहार के रूप में छिड़क दिया जाता है।



चित्र. 9.34 : स्प्रेगन

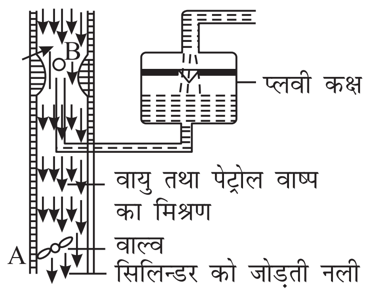


(iii) बुन्सेन ज्वालक : जब गैस नोजल N से बाहर निकलती है तो उसका वेग अधिक होने के कारण इसके आस-पास दाब कम हो जाता है, इसके साथ हवा पार्श्व छिद्र A से अंदर की ओर तेजी से बढ़ती है और गैस में मिल जाती है। यह मिश्रण प्रज्वलित करने पर गरम नीली लौ के साथ जलने लगता है।



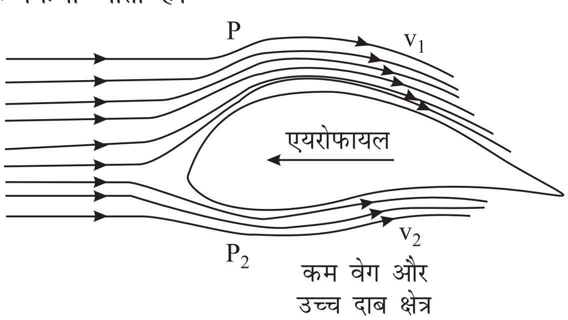
चित्र. 9.35 : बुन्सन ज्वालक

(iv) कार्बुरेटर : कार्बुरेटर चित्र 9.36 में दर्शायी गई एक ऐसी युक्ति है जो मोटर कार के इंजन के सिलिंडर को हवा और पेट्रोल का समुचित (संतुलित) मिश्रण प्रदान करने के लिए उपयोग में लायी जाती है। इंजन के सिलिन्डर के अंदर मिश्रण के जलने से ऊर्जा निकलती है। पेट्रोल को प्लवी कक्ष में रखा जाता है। पिस्टन की गति के कारण किनारे A पर दाब कम हो जाता है। इसी कारण वायु बाहर से अंदर की ओर अधिक वेग से पहुँचती है। यही कारण है कि नोजल B पर दाब कम हो जाता है। (B पर संकरे मार्ग के कारण वहाँ पर खिंची गई वायु का वेग अधिक हो जाता है)। अत: B नोजल से पेट्रोल बाहर आ जाता है जो अंदर आने वाली (बाहर से) वायु से मिल जाता है। तब वाष्पीकृत पेट्रोल और वायु (ईंधन) A नली से होता हुआ सिलिन्डर में पहुँच जाता है।



चित्र. 9.36 : कार्बुरेटर

कभी-कभी जब कार्बन या अपद्रव्य इकठ्ठा हो जाने से नॉजल B बंद है तो इससे पेट्रोल का प्रवाह रुक जाता है और ईंधन न जाने के कारण काम करना बंद कर देता है। अत: नोजल को खोल कर साफ किया जाता है।



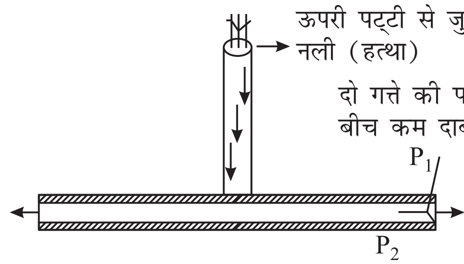
चित्र. 9.37 : प्रवाह रेखाओं का ऊपरी सिरे पर जमा होना

(v) एयरोफायल : जब कोई ठोस वायु में घूमता या गति करता है तो प्रवाह रेखाएं बन जाती हैं। वायुयान का आकार विशेष रूप से बनाया जाता है जैसा कि चित्र 9.37 में दर्शाया गया है जब वायुयान अपने पथ पर दौड़ता है तो उच्च वेग वाली प्रवाह रेखाएं बन जाती हैं। ऊपरी

सिरे पर प्रवाह रेखाओं की अधिकता के कारण वहां वायु का वेग बढ़ जाता है, और यह अपेक्षाकृत कम दाब का क्षेत्र बन जाता है। इस दाब में अंतर के कारण वायुयान पर एक बल ऊपर की ओर लगने लगता है और वह ऊपर उठ जाता है।

''प्रवाह रेखाओं की अधिकता के कारण उस क्षेत्र पर वायु वेग अधिक रहता है और दाब कम हो जाता है'' इस सिद्धांत पर आधारित कुछ मनोरंजक उदाहरण नीचे दिए जा रहे हैं।

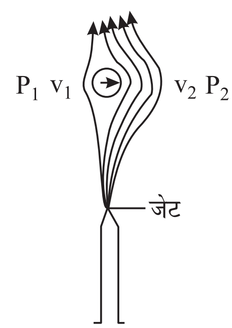
(a) आकृष्ट मंडलक (चक्रिका) विरोधाभास : जब दो गत्ते की पट्टियों के बीच एक संकरी नली नुमा हत्थे द्वारा वायु फूंकी जाती है और ऊपरी पट्टी को इस हत्थे की सहायता से उठाया जाता है तो निचली पट्टी ऊपरी पट्टी के साथ ही उठ जाती है। इसे आकृष्ट मंडलक विरोध ाभास कहते है:



चित्र. 9.38 : आकृष्ट मंडलक (चक्रिका) विरोधाभास

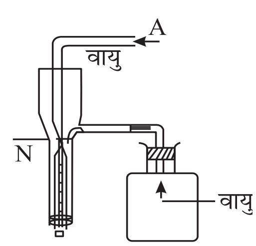
(b) पिंग पांग गेंद का जल के जेट के ऊपर नाचना:

यदि एक हल्की खोखली गेंद (पिंग पॉग या टेबल टेनिस की गेंद) को ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर जेट युक्त नली से निकलने वाली जल की धारा में रखें तो यह पृथ्वी पर न गिरकर इधर-उधर नाचने लग जाती है (चित्र 9.39)। जब गेंद बायीं ओर चली जाती है तब अधिक वेग वाला क्षेत्र बनाती हुई जेट की अधिकतर धारायें इसके दाहिने ओर से गुजरती हैं और इस प्रकार बायीं ओर की अपेक्षा इसके दायीं ओर दाब कम हो जाता है और गेंद पुन: मध्य धार की ओर धकेल दी जाती है।



चित्र. 9. 39: नाचती हुई पिंग पांग गेंद

(c) जल निर्वात पंप या चूषित्र या छन्ना पंप (फिल्टर पम्प): चित्र 9.40 में सामान्य से थोड़ा कम दाब बनाने के लिए फिल्टर पंप दर्शाया गया है। संकरे जेट वाली नली A के माध्यम से बाहर निकलने के लिए टोंटी से जल छोड़ा जाता है। नोजल का द्वारक छोटा होने से वेग अधिक हो जाता है। इस प्रकार नोजल N के चारों ओर कम दाब वाला क्षेत्र बन जाता है। इसलिए नली B के माध्यम से पात्र को रिक्त करने के लिए हवा खींच ली जाती है। यह हवा बाहर चली जाती है। कुछ मिनटों के पश्चात इस प्रकार पंप से बर्तन में हवा का दाब मर्करी के लगभग तक 1 cm कम हो जाता है। .



चित्र. 9.40 : फिल्टर पंप

(d) क्रिकेट की गेंद का लहराना (स्विंग करना)

जब एक क्रिकेट खिलाड़ी एक घूमती हुई गेंद फेंकता है तो यह हवा में एक वक्राकार पथ पर चलती है। इसे गेंद का लहराना (स्विंग करना) कहते हैं। जैसा कि चित्र (9.41) से स्पष्ट है जब एक गेंद आगे बढ़ती है तो गेंद द्वारा रिक्त किए स्थान पर υ वेग से वायु आ जाती है। जब गेंद चक्कर खाती है तो इसके चारों ओर की वायु भी इसके साथ चलती है, (माना कि u वेग से) तो गेंद के ऊपर वायु का परिणामी वेग $(\upsilon - u)$ और नीचे $(\upsilon + u)$ होता है। अत: गेंद के ऊपर और नीचे दाबान्तर के कारण गेंद का पथ वक्राकार हो जाता है।

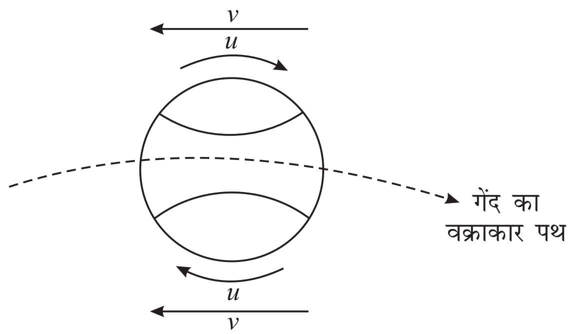


Fig. 9.41 : क्रिकेट गेंद का लहराना

उदाहरण 9.3: किसी बड़े टैंक की दीवार की तली में स्थित छोटे छिद्र से जल बाहर आता है। टैंक में जल स्तर की ऊँचाई यदि 2.5 m हो तो जल के बहाव की चाल क्या होगी?

हल: माना कि तली के पास B छिद्र है, A से B तक जल प्रवाह के लिए प्रवाह नलिका की कल्पना करें। बहुत कम द्रव्यमान m के धारा रेखीय प्रवाह के लिए हम बिंदु A और बिंदु B पर बर्नूली के सिद्धांत को उपयोग में ला सकते हैं।

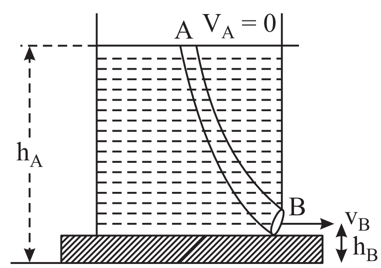
B पर कुल ऊर्जा = A पर कुल ऊर्जा

A, बिंदु पर $\upsilon_A = 0$, $p_A = p$ = (वायुमण्डलीय दाब), h = भूमि से ऊँचाई

B, बिंदु पर $\upsilon_B = \upsilon = ?$, $p_B = p$, h_B = भूमि से छिद्र की ऊँचाई

माना $h_A - h_B = H$ = पात्र के द्रव स्तर की ऊँचाई = 2.5 m

d = जल का घनत्व



चित्र. 9.42

बर्नूली के प्रमेय का उपयोग करके व मान प्रतिस्थापित करने पर

$$\tfrac{1}{2} m\,\upsilon_B^2 = mg\,(h_A - h_B)$$

या

$$\upsilon_B = \sqrt{2g(h_A - h_B)}$$

$$= \sqrt{2 \times 9.8 \times 2.5}$$

$$= 7 \text{ m s}^{-1}$$

पाठगत प्रश्न 9.5

1. आँधी में बहुधा टिन की छतें उड़ जाती हैं। बर्नूली समीकरण किस प्रकार इसकी व्याख्या कर सकता है।

2. पौधों को सींचने के लिए जब आप जल के पाइप के मुँह को दबाते हैं तो जल अधिक दूरी तक चला जाता है। क्यों?

3 एक प्रवाही द्रव के विषय में बर्नूली का प्रमेय प्रयोग किये जाने की क्या आवश्यक शर्तें है?

4. असमान अनुप्रस्थ परिच्छेद की एक क्षैतिज नली, में जल बह रहा है। एक बिंदु A पर दाब व वेग 20 mm पारे का दाब और 0.20 m s^{-1}. हैं, दूसरे बिंदु B पर दाब क्या होगा, जहाँ पर वेग 1.50 m s^{-1} है?

5. क्रिकेट के मैच में गेंदबाज क्रिकेट की गेंद को केवल एक ओर से क्यों चमकाते हैं?

आपने क्या सीखा

- द्रव के मुक्त तल से h गहराई नीचे द्रव स्थैतिक दाब $P = hdg$ होता है, जहाँ d द्रव का घनत्व है।
- किसी तरल में डूबी हुई वस्तु पर कार्य करने वाला ऊर्ध्वाधर बल उत्प्लावक बल कहलाता है।
- पास्कल के नियम के अनुसार परिबद्ध द्रव की स्थिर अवस्था में जब किसी स्थान पर दाब डाला जाता है तो यह पूरे द्रव में और पात्र की दीवारों में बिना कम हुए संचरित हो जाता है।
- द्रव पृष्ठ पर स्थित अणुओं में एक स्थितिज ऊर्जा होती है जिसे पृष्ठ ऊर्जा कहते हैं।
- पृष्ठ तनाव की परिभाषा इस प्रकार दी जा सकती है– " किसी द्रव की सतह पर खींची काल्पनिक रेखा की प्रति इकाई लम्बाई पर लगने वाले बल को पृष्ठ तनाव कहते हैं इसे न्यूटन प्रति मीटर में मापा जाता है।
- किसी द्रव का पृष्ठ तनाव वह गुण है जिसके कारण द्रव पृष्ठ किसी तनी झिल्ली की तरह व्यवहार करता है।
- किसी द्रव के तल पर खींची गई स्पर्श रेखा तथा द्रव के भीतर बर्तन की दीवार के बीच के कोण को स्पर्श कोण कहते हैं।
- केशिका नली में द्रव का तल अवतल गोलीय या उत्तल गोलीय होता है। यह वक्रता पृष्ठ तनाव के कारण होती है।

केशिका में द्रव का चढ़ाव (उन्नयन) $h = \dfrac{2T\cos\theta}{r\,d\,g}$

- द्रव सतह के अवतल भाग (त्रिज्या r) में अतिरिक्त दाब P का मान निम्नलिखित होता है।

  $P = \frac{2T}{R}$, जहाँ पर T द्रव का पृष्ठ तनाव है।

  द्रव के भीतर वायु के बुलबुले के लिए, $P = \frac{2T}{R}$,

  वायु में साबुन के बुलबुले के लिए, $P = \frac{4T'}{r}$, जहाँ पर T' साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव।

- डिटर्जेंट कपड़ों को अधिक साफ करते हैं क्योंकि वे जल-तेल का पृष्ठ तनाव कम करते हैं।

- तरल का वह गुण जिसके कारण यह अपनी समीपवर्ती परतों के बीच की सापेक्ष गति का विरोध करता है, श्यानता कहते हैं।

- क्राँतिक वेग (υ_c) से द्रव प्रवाह वेग का मान अधिक हो जाने पर प्रवाह प्रक्षुब्ध हो जाता है। यह द्रव की प्रकृति और नली की त्रिज्या पर निर्भर करता है अर्थात् (η, ρ और d) पर।

- किसी द्रव का श्यानता गुणाँक स्पर्शरेखीय पश्चगामी श्यानबल के रूप में परिभाषित किया जा सकता है जो इकाई वेग प्रवणता के क्षेत्र में परस्पर संपर्क वाली दो समीपवर्ती परतों के बीच इकाई क्षेत्रफल पर कार्य करता है।

- स्टोक्स नियम बताता है कि यदि r त्रिज्या वाला गोलीय पिंड η श्यानता गुणाँक वाले द्रव में 'υ' वेग से गिरता है तो उस पर स्पर्शरेखीय पश्चगामी श्यान बल,

  $$F = 6\pi\eta r \upsilon.$$

- बर्नूली का प्रमेय बतलाता है कि स्थायी रूप से बहने वाले असंपीड्य द्रव के द्रव्यमान (m) के किसी कण की कुल ऊर्जा प्रवाह के दौरान सदैव स्थिर रहती है। प्रवाह नली के किन्हीं दो बिन्दुओं A तथा B पर बर्नूली के सिद्धांत का गणितीय रूप निम्नवत है

  $$\frac{1}{2} m v_A^2 + m g h_A + \frac{m P_A}{d} = \frac{1}{2} m v_B^2 + m g h_B + \frac{m P_B}{d}$$

पाठांत प्रश्न

1. किसी द्रव स्तंभ के कारण स्थैतिक दाब के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए।
2. पास्कल का नियम लिखिए। हाइड्रॉलिक प्रेस की कार्यप्रणाली समझाइए।
3. पृष्ठ तनाव को परिभाषित कीजिए तथा इसका विमीय सूत्र ज्ञात कीजिए।

4. एक प्रयोग का वर्णन कीजिए जिससे यह दर्शाया जा सके कि द्रवों के पृष्ठ तनी हुई झिल्ली की भाँति व्यवहार करते हैं।

5. किसी बर्तन में रखे द्रव के कारण 0.9 m की गहराई पर द्रवस्थैतिक दाब 3.0 N m^2. है। इस बर्तन में 0.8m गहराई पर पार्श्व की दीवार के एक छिद्र में द्रवस्थैतिक दाब की गणना कीजिए।

6. किसी हाइड्रॉलिक प्रेस में 1000 kg द्रव्यमान के एक भारी पत्थर को उठाने के लिए कितने भार की आवश्यकता होगी? दिया है– दोनों पिस्टनों के अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल का अनुपात 5 है। क्या मशीन द्वारा किया गया कार्य मशीन पर किए गए कार्य से अधिक है? व्याख्या करें।

7. केशिका नली में भरे द्रव का ऊपरी खुला पृष्ठ उत्तल है। यदि F_a= आसंजन बल F_c= संसंजन बल θ = स्पर्शकोण, तो निम्नलिखित में कौन सा संबंध सही है?
(a) $F_a > F_c \sin\theta$; (b) $F_a < F_c \sin\theta$; (c) $F_a \cos\theta = F_c$; (d) $F_a \sin\theta > F_c$

8. एम समान त्रिज्या की 1000 बूंदे आपस में मिलकर एक बड़ी जलबूंद बनाती है। जल की बूंद के ताप में क्या परिवर्तन होगा? क्यों?

9. केशिकार्षण क्या है? किसी केशिका नली में द्रव के चढ़ने और उतरने को कौन–कौन से कारक प्रभावित करते हैं?

10. 0.05 m लंबी और 0.2×10^{-3} m त्रिज्या वाली एक केशिका नली को 1000 kg m^3 घनत्व वाले द्रव में डुबोया जाता है। केशिका नली में द्रव के उन्नयन (चढ़ाव) की गणना करें। द्रव का पृष्ठ तनाव 7.27×10^{-2} N m^{-1} है।

11. हवा में पानी के बुलबुले बनाना कठिन है जबकि साबुन के बुलबुले बनाना आसान है। क्यों?

12. तेल लगे कपड़ों को धोने के लिए साबुन के स्थान पर डिटर्जेंट का प्रयोग क्यों किया जाता है?

13. दो एक समान गोलाकार गुब्बारों को वायु भरकर विभिन्न साइजों में फुलाया गया है। दोनों को एक पतली नली से जोड़ दिया जाता है। निम्नलिखित प्रेक्षणों में से आपकी राय में कौन सा प्रेक्षण संभावित है?

    (i) छोटे गुब्बारे से वायु बड़े गुब्बारे में प्रवाहित होगी और तब तक होती रहेगी जब पर पूरी वायु उसमें न चली जाए।

    (ii) बड़े गुब्बारे से प्रवाहित होकर वायु छोटे गुब्बारे में जाएगी जब तक कि दोनों में बराबर हवा न हो जाए।

    उपरोक्त प्रश्न में यदि गुब्बारों को विभिन्न साइज के बुलबुलों से प्रतिस्थापित कर दिया जाए तो आपका उत्तर क्या होगा?

14. किसमें अधिक दाब की आवश्यकता होगी, 3 cm त्रिज्या के वायु के बुलबुलों को साबुन के घोल के भीतर बनाने में या 3 cm त्रिज्या के ही साबुन के बुलबुले को वायु में बनाने में?

15. पटलीय और प्रक्षुब्ध प्रवाह में अंतर स्पष्ट करें और तत्पश्चात क्रांतिक वेग को परिभाषित कीजिए।

16. श्यानता और श्यानता गुणाँक को परिभाषित कीजिए। जल और ग्लिसरीन में कौन अधिक श्यान है? क्यों?

17. रेनाल्ड संख्या क्या है? इसका महत्व क्या है? रेनॉल्ड संख्या के आधार पर क्रांतिक वेग को परिभाषित कीजिए।

18. बर्नूली के सिद्धांत का वर्णन करें। वायुयान की बॉडी का डिजाइन तैयार करने में इसके उपयोग की चर्चा कीजिए।

19. व्याख्या कीजिए कि ऐसा क्यों होता है:

    (i) घूमती हई टेनिस की गेंद वक्रीय मार्ग का अनुसरण करती है।

    (ii) पानी के पाइप के द्वारक के खुले मुँह को दबाकर कम किया जाता है तो प्रवाह का वेग बढ़ जाता है।

    (iii) एक पिंग पॉग गेंद पृथ्वी पर गिरे बगैर पानी के जेट पर नाचती रहती है।

    (iv) श्यान तरल में गिरने वाली एक छोटी गोलीय गेंद कुछ समय पश्चात एक स्थिर वेग प्राप्त कर लेती है।

    (v) यदि पारे को कॉच की समतल प्लेट पर ऊपर से उड़ेल दिया जाए तो यह छोटे–छोटे गोलीय बूंदों (कणों) में बिखर जाता है।

20. 0.8 mm व्यास वाले हवा के बुलबुले का अंतिम वेग ज्ञात कीजिए जो 0.15 kg m^{-1} s^{-1} की श्यानता और 0.9 g m^{-3} घनत्व वाले द्रव में ऊपर उठ रहा है। उसी बुलबुले का अंतिम वेग क्या होगा जब वह जल में ऊपर आ रहा हो? जल के लिए $\eta = 10^{-2}$ kg m^{-1} s^{-1}।

21. 0.2 m व्यास वाली एक पाइप लाइन में जल प्रवाहित हो रहा है। इसमें 0.1 m व्यास वाला संकीर्णन है। यदि 0.2 m व्यास वाले पाइप में जल का वेग 2 m s^{-1} है तो, परिकलित कीजिए

    (i) संकीर्णन में वेग और

    (ii) क्यूबिक मीटर/सेकण्ड में विसर्जन दर।

22. (i) 1 mm त्रिज्या वाली स्टील की गेंद ग्लिसरीन के टैंक में किसी क्षण किस वेग से गिरेगी जब उस समय इसका त्वरण स्वतंत्र रूप से गिरते हुए पिंड का आधा हो।

    (ii) गेंद का अंतिम वेग क्या होगा जब स्टील व ग्लिसरीन के घनत्व क्रमशः 8.5 g cm^{-3} और 1.32 g cm^{-3} हो, ग्लिसरीन की श्यानता 8.3 पॉइज है।

23. 20ºC पर 3 mm व्यास वाले पाइप में 50 cm s^{-1} की चाल से जल प्रवाहित होता है। बताइए

    (i) रेनॉल्ड संख्या क्या है?

    (ii) प्रवाह की प्रकृति क्या है।

    20ºC पर जल की श्यानता = 1.005×10^{-2} पॉइज और

    और जल का घनत्व 20ºC as = 1 g cm^{-3}.

टिप्पणियाँ

24. आधुनिक डिजाइन वाले वायुयान की उड़ान के लिए उत्थापन लगभग $1000\ \text{N m}^{-2}$ होना चाहिए। कल्पना कीजिए कि वायुयान के पंखों के ऊपर से वायु धारा रेखीय प्रवाह में प्रवाहित होती है। यदि पंख की निचली सतह द्वारा प्रवाहित वायु का वेग $100\ \text{m s}^{-1}$ है तो अपेक्षित उत्थापन (लिफ्ट) $1000\ \text{N m}^{-2}$ देने के लिए उसकी ऊपरी सतह पर कितने वेग की आवश्यकता होगी?

25. विभिन्न अनुप्रस्थ काट वाले पाइप से जल प्रवाहित होता है। यदि किसी बिंदु पर, जहां कि प्रवाह का वेग $28\ \text{cm s}^{-1}$ है, पानी का दाब 5 cm पारे के दाब के बराबर हो तो उस बिन्दु पर दाब कितना होगा जहाँ प्रवाह का वेग $70\ \text{cm s}^{-1}$ है? (पानी का घनत्व $1\ \text{g cm}^{-3}$)

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

9.1

1. क्योंकि जब आदमी का भार अधिक क्षेत्रफल पर लगता है तो बर्फ पर दाब घट जाता है।

2. $P = P_a + \rho gh$

   $P = 1.5 \times 10^7\ Pa$

3. लड़के के भार द्वारा आरोपित दाब $= \dfrac{2.5}{0.05} = 500\ \text{N m}^{-2}$.

   हाथी के भार के कारण आरोपित दाब $= \dfrac{5000}{10} = 500\ \text{N m}^{-2}$.

$\therefore$ इसलिए लड़का हाथी को संतुलित कर सकता है।

4. छड़ के अधिक क्षेत्रफल के कारण त्वचा पर दाब कम होगा।

5. $\dfrac{50}{0.1} = \dfrac{w}{10}$, $w = 5000$ kg wt.

9.2

1. एक ही पदार्थ के अणुओं के बीच मार्ग कार्य करने वाले आकर्षण बल को संसंजक बल और विभिन्न पदार्थों के अणुओं के बीच कार्य करने वाले बल को आसंजक बल कहते हैं।

2. पृष्ठ तनाव के कारण द्रव एक निश्चित आयतन के लिए न्यूनतम पृष्ठीय तल पाना चाहता है जो कि गोलाकार होता है।

3. नहीं उनके अणु बहुत दृढ़ता से बंधे होते है।

टिप्पणियाँ

4. पृष्ठ तनाव बलों के कारण।

5. पानी में हवा के बुलबुले के लिए

$$P = \frac{2T}{r} = \frac{2 \times 727 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-2}} = 72.7 \text{ N m}^{-2}.$$

हवा में साबुन के बुलबुले के लिए

$$P' = \frac{4T'}{r'} = \frac{4 \times 25 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-2}} = 2.5 \text{ N m}^{-2}.$$

9.3

1. नहीं

2. हाँ, द्रव ऊपर उठेगा।

3. पारे की सतह उत्तल होती है और स्पर्शकोण 90° से अधिक होता है। केशिका में पारे के तल में गिरावट के कारण यह कठिन होता है।

4. $r = \frac{2T}{h\rho g} = \frac{2 \times 7.2 \times 10^{-2}}{3 \times 1000 \times 10}$

   $= 4.8 \times 10^{-6}$m

5. केशिकार्षण के कारण

9.4

1. यदि पथ के किसी बिंदु से होकर गुजरने वाले सभी कण अपने पूर्ववर्ती कण की भांति एक ही प्रवाह रेखा का अनुसरण करें तो प्रवाह धारारेखीय कहलाता है, यदि प्रवाह पथ टेढ़ा मेढ़ा हो तो प्रवाह प्रक्षुब्ध कहलाता है।

2. नहीं, अन्यथा एक ही प्रवाह की दो दिशायें होंगी।

3. क्रांतिक वेग, द्रव की श्यानता, नली की त्रिज्या और द्रव के घनत्व पर निर्भर करता है।

4. .012 ms^{-1}

5. श्यान बलों के कारण

9.5

1. ऊपरी भाग में हवा के अधिक वेग से कम दाब का क्षेत्र विकसित हो जाता है।

2. क्षेत्रफल में कमी के कारण उच्च दाब विकसित होता है।

3. तरल असंपीड्य और अश्यान होना चाहिए। प्रवाह गति धारारेखीय होनी चाहिए।

4. $(P_1 - P_2) = \frac{1}{2} d\,(v_2^2 - v_1^2)$

5. जिससे कि दोनों तलों पर प्रवाह रेखाऐं भिन्न हों। गेंद में अधिक घुमाव उत्पन्न होगा।

पाठांत प्रश्नों के उत्तर

5. 2.67 N m^{-2}.

6. 200 N, No.

20. 2.1 mm s^{-1}, 35 cm s^{-1}.

21. 8 m s^{-1}, 6.3×10^{-2} m^3 s^{-1}.

22. 7.8 mm s^{-1}, 0.19 m s^{-1}.

23. 1500, अस्थिर

24. 2 cm पारे के दाब के बराबर

उच्चतर माध्यमिक पाठ्यक्रम
भौतिकी
विद्यार्थी मूल्याकंन पत्र - 2

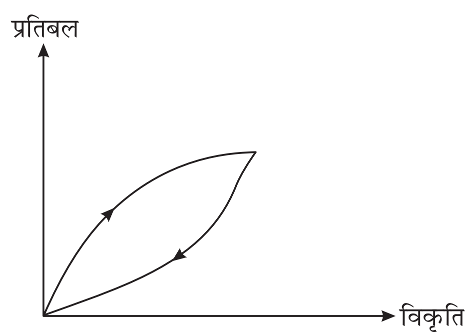
अधिकतम अंक : 50 **समय : $1\frac{1}{2}$ घंटा**

निर्देश

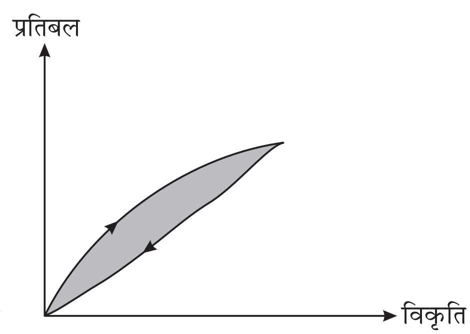
- सभी प्रश्नों के उत्तर कागज की पृथक शीट पर दीजिए।
- अपनी उत्तर पुस्तिका पर निम्नलिखित सूचनाएं दीजिए
  - नाम
  - पंजीयन संख्या
  - विषय
  - मूल्यांकन पत्र संख्या
  - पता
- अपने मूल्यांकन पत्र का मूल्यांकन अपने अध्ययन केन्द्र के विषयाध्यापक से करायें ताकि आपको उनसे अपने कार्य के संबंध में धनात्मक प्रतिक्रिया प्राप्त हो सके।

अपना मूल्यांकन पत्र NIOS को न भेजें

1. नीचे दिये गये चित्रों में रबर के दो नमूनों के प्रतिबल-विकृति ग्राफ दर्शाये गये हैं। इनमें से कौन-सा नमूना प्रघात-अवशोषक (Shock absorber) के रूप में अच्छा कार्य करेगा? (1)



(a)



(b)

2. एक ही धातु के समान लंबाई के दो तारों A एवं B पर समान भार लटकाया गया। यदि A में लंबाई वृद्धि B की अपेक्षा दो गुनी हो तो A एवं B की त्रिज्याओं में क्या अनुपात है? (1)

3. किसी बाँध की दीवारें आधार के पास मोटी क्यों बनाई जाती हैं? (1)

4. हीलियम गैस से भरा गुब्बारा हवा में अनिश्चित ऊँचाई तक ऊपर नहीं उठता वरन एक निश्चित ऊँचाई पर ठहर जाता है। ऐसा क्यों होता है? (1)

5. किसी गैस का ताप बढ़ाने से उसकी श्यानता किस प्रकार परिवर्तित होती है? (1)

6. लोहे एवं रबर में कौन अधिक प्रत्यास्थ है? (1)

मॉड्यूल - 3
ऊष्मीय भौतिकी

10

गैसों का अणुगतिक सिद्धांत

जैसा कि आपने पिछले अध्यायों में पढ़ा है कि मानक ताप व दाब पर पदार्थ तीन अवस्थाओं में पाये जाते हैं–ठोस, द्रव और गैस। ये अणओं से मिलकर बने होते हैं और आपस में अंतर–आण्विक बलों से बंधे रहते हैं। कमरे के ताप पर, इन परमाणुओं/अणुओं की एक निश्चित तापीय ऊर्जा होती है। जब औसत तापीय ऊर्जा में वृद्धि की जाती है तो ऐसी स्थिति आती है कि अणु अधिक स्वतंत्र रूप से गति करने लगते हैं, पदार्थ की इस अवस्था को गैसीय अवस्था कहते हैं। गैसीय अवस्था में अंतर–आण्विक बल पर्याप्त क्षीण हो जाते हैं और अणुओं की स्थितिज ऊर्जा उनकी गतिज ऊर्जा से काफी कम होती हैं।

ताप, दाब और आयतन की विभिन्न स्थितियों के लिये गैसे भिन्न–भिन्न गुण प्रदर्शित करती हैं। उदाहरण के लिये यदि नियत आयतन पर गैस का ताप बढ़ाया जाता है तो इसके दाब में वृद्धि होती है। इस अध्याय में आप गैसों के अणुगतिक सिद्धान्त के बारे में पढ़ेंगे जो कि कुछ सरलीकरण अवधारणाओं पर आधारित है। आप ताप की गतिक व्याख्या तथा अणुओं की गतिज ऊर्जा और ताप के मध्य संबंध के बारे में भी पढ़ेंगे, इस पाठ में यह व्याख्या भी की जाएगी कि गैसों की दो प्रकार की विशिष्ट ऊष्मा क्यों होती हैं, साथ ही ऊष्मीय प्रसार की संकल्पना की व्याख्या भी की जाएगी।

उद्देश्य

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप–

- गैसों के अणुगतिक सिद्धान्त की अभिधारणाओं को बता सकेंगे;
- दाब P के लिये व्यंजक $P = \frac{1}{3}\rho\overline{c^2}$; प्राप्त कर सकेंगे;
- अणुओं के वर्ग माध्य मूल (RMS) और औसत वेग का ताप के साथ संबंध स्थापित कर सकेंगे;
- गैस के अणुगति सिद्धान्त के आधार पर गैस के नियमों की व्युत्पति कर पायेंगे;

टिप्पणियाँ

- ताप की गतिक व्याख्या कर पायेंगे और माध्य गतिज ऊर्जा की गणना कर सकेंगे;
- ऊष्मा धारिता एवं विशिष्ट ऊष्मा को परिभाषित कर सकेंगे;
- कैलोरीमिति का सिद्धान्त समझा सकेंगे;
- ऊष्मीय प्रसार की व्याख्या कर सकेंगे;
- α, β, एवं γ में संबंध स्थापित कर सकेंगे;
- कणों के किसी निकाय के स्वातन्त्रय कोटिमान की व्याख्या कर सकेंगे;
- ऊर्जा के समविभाजन के नियम की व्याख्या कर सकेंगे;
- गैस की दो विशिष्ट ऊष्माएं होने की व्याख्या कर सकेंगे और
- $c_p - c_V = R/J$ संबंध को स्थापित कर सकेंगे।

10.1 ऊष्मीय ऊर्जा

वर्ष भर में वसन्त ऋतु बड़ी सुहावनी होती है, इसमें तापमान न तो ग्रीष्म की तरह अधिक होता है और न ही शरद की तरह कम होता है। यह तापमान परिवर्तन हमारे दैनिक क्रिया-कलापों को प्रभावित कैसे करता है? तापमान परिवर्तन से वस्तुओं के गुण कैसे परिवर्तित होते हैं? क्या तापमान एवं ऊष्मा में कोई अन्तर है? आगामी अनुभागों में ऐसे सभी प्रश्नों पर विचार किया जाएगा।

प्राय: आम बोलचाल में तापमान एवं ऊष्मा एक दूसरे के लिए उपयोग किए जाते हैं। हालांकि, भौतिक विज्ञान में इनके अर्थ में बहुत अन्तर होता है। ऊष्मा प्रदान करने से प्राय: तापमान बढ़ता है लेकिन क्या जल के उबलने अथवा जल के जमने की प्रक्रिया में भी ऐसा होता है? समुद्रतटीय क्षेत्रों में सूर्यास्त के बाद पवन के प्रवाह की दिशा उल्टी क्यों हो जाती है? हथेली पर रखी बर्फ पिघल क्यों जाती है और हथेली को ठंडक महसूस क्यों होती है? इस प्रकार के सभी तथ्यों की व्याख्या इस पाठ में की जाएगी।

10.1.1 ऊष्मा धारिता एवं विशिष्ट ऊष्मा

जब किसी ठोस (अथवा द्रव) को ऊष्मा प्रदान की जाती है तो उसके तापमान में वृद्धि होती है। विभिन्न ठोसों के समान द्रव्यमान को समान ऊष्मा प्रदान करने के बावजूद भी यह वृद्धि अलग-अलग होती है। इसका तात्पर्य है कि किसी ठोस को निश्चित ऊष्मा प्रदान करने पर तापमान में वृद्धि पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करती है। ठोस की प्रकृति पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा धारिता अथवा विशिष्ट ऊष्मा से निरुपित होती है। किसी ठोस (अथवा द्रव) के इकाई द्रव्यमान का तापमान $1°C$ अथवा $1K$ बढ़ाने के लिए आवश्यक ऊष्मा विशिष्ट ऊष्मा कहलाती है।

यदि m द्रव्यमान के किसी ठोस (अथवा द्रव) के तापमान को $\Delta\theta$ डिग्री बढ़ाने में अपेक्षित ऊष्मा ΔQ है तो विशिष्ट ऊष्मा निम्नवत् व्यक्त की जा सकती है:

$$C = \frac{\Delta Q}{m\Delta\theta}$$

अतः किसी पदार्थ को तापमान वृद्धि के लिए आवश्यक ऊष्मा को निम्न रूप में प्रकट कर सकते हैं:

$$\Delta Q = mC\Delta\theta$$

विशिष्ट ऊष्मा का SI मात्रक J kg^{-1} K^{-1} है।

10.1.2 कैलोरीमिति

जब दो असमान तापमान की वस्तुओं को सम्पर्क में रखा जाता है तो अधिक तापमान की वस्तु से कम तापमान की वस्तु में ऊष्मा का स्थानान्तरण होता है। पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा एवं इससे संबधित भौतिक राशियों का मापन एक युक्ति द्वारा किया जाता है जिसे कैलोरी मीटर कहते है एवं यह विधि कैलोरीमिति कहलाती है।

10.1.3 कैलोरीमिति का सिद्धान्त

माना m_1, m_2 द्रव्यमान के दो पदार्थ जिनकी विशिष्ट ऊष्मा क्रमशः C_1 एवं C_2 हैं तथा तापमान θ_1 एवं θ_2 हैं $(\theta_1 > \theta_2)$ परस्पर सम्पर्क में रखे गये हैं। तब अधिक तापमान की वस्तु से कम तापमान की वस्तु में ऊष्मा स्थानातरंण होगा एवं पदार्थ एक उभयनिष्ठ तापमान θ प्राप्त कर लेंगे।

यदि कोई अन्य प्रकार की ऊष्मा हानि नहीं है तो ऊर्जा संरक्षण के नियमानुसार:

$$\text{ऊष्मा हानि} = \text{ऊष्मा वृद्धि}$$

$$\Rightarrow \qquad m_1C_1(\theta_1 - \theta) = m_2C_2(\theta - \theta_2)$$

यह कैलोरीमिति का सिद्धान्त है। इस संबन्ध का उपयोग कर परिणामी तापमान θ ज्ञात किया जा सकता है। यदि एक पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा ज्ञात हो तो θ_1, θ_2 एवं θ ज्ञात होने पर पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा भी ज्ञात की जा सकती है।

10.1.4 ऊष्मीय प्रसार

जब किसी पदार्थ को ऊष्मा प्रदान की जाती है तो उसकी लम्बाई, क्षेत्रफल एवं आयतन में वृद्धि होती है जिसे ऊष्मीय प्रसार कहते हैं। लम्बाई, क्षेत्रफल एवं आयतन प्रसार क्रमशः रेखीय प्रसार, पृष्ठ प्रसार एवं घन-प्रसार कहलाते हैं।

रेखीय प्रसार में लम्बाई-वृद्धि, मूल-लम्बाई एवं ताप-वृद्धि के अनुक्रमानुपाती होती है।

$$\Delta l \propto l_0 \, \Delta\theta$$

अथवा
$$\Delta l = \alpha \, l_0 \, \Delta\theta$$

जहाँ α रेखीय प्रसार गुणांक अथवा रेखीय प्रसार का ताप गुणांक है। अतः

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta\theta}$$

यदि $\Delta\theta = 1°C$ एवं $l_0 = 1\text{m}$

तब $\alpha = \Delta l$

अतः एकांक लम्बाई का तापमान 1°C बढ़ाने पर लम्बाई में वृद्धि (परिवर्तन) α होती है।

पृष्ठीय प्रसार में, क्षेत्रफल - वृद्धि, मूल-क्षेत्रफल एवं तापमान-वृद्धि के अनुक्रमानुपाती होती है।

$$\Delta A \propto A_0 \, \Delta\theta$$

अथवा $$\Delta A = \beta A_0 \, \Delta\theta$$

जहां β पृष्ठीय ताप-प्रसार गुणांक है।

आयतन प्रसार में, आयतन - वृद्धि, मूल-आयतन एवं तापमान-वृद्धि के अनुक्रमानुपाती होती है।

$$\Delta V \propto V_0 \, \Delta\theta$$

अथवा $$\Delta V = \gamma V_0 \, \Delta\theta$$

जहां γ आयतन ताप-प्रसार गुणांक है।

यदि $V_0 = 1\text{m}^3$ एवं $\Delta\theta = 1°C$, तब $\gamma = \Delta V$

अतः आयतन प्रसार में, एकांक आयतन का तापमान 1°C बढ़ाने पर आयतन में वृद्धि γ होती है।

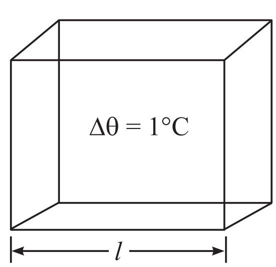
α, β एवं γ में संबन्ध

माना एक घन की भुजा l है जिसका तापमान 1ºC बढ़ाया गया है।
लम्बाई में परिवर्तन,

$$\Delta l = \alpha l \Delta\theta$$

$$= \alpha l \qquad (\because \Delta\theta = 1°C)$$

अथवा नवीन लम्बाई, $l' = l + \Delta l = l + \alpha l = l(1+\alpha)$



चित्र 10.1

अतः $\alpha = \dfrac{\Delta l}{l}$

एवं $\beta = \dfrac{\Delta A}{A} = \dfrac{l^2(1+\alpha)^2 - l^2}{l^2}$

$$= 1 + \alpha^2 + 2\alpha - 1$$

$\therefore$ α बहुत छोटा है अतः α^2 नगण्य होगा। इसीलिए

$$\beta = 2\alpha$$

इसी प्रकार, $\gamma = \dfrac{\Delta V}{V} = \dfrac{l^3(1+\alpha)^3 - l^3}{l^3}$

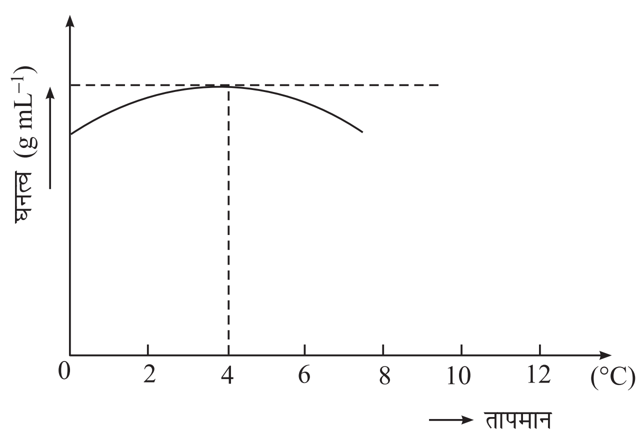
अथवा $\gamma = l^3 + \alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha - l^3$

$\because$ α बहुत छोटा है अतः α^2 एवं α^3 नगण्य होंगे।

अतः $\gamma = 3\alpha.$

10.1.5 जल में विसंगतीपूर्ण प्रसार एवं इसका प्रभाव

सामान्यतः किसी द्रव का तापमान बढ़ने पर उनका आयतन बढ़ता है। द्रवों का ताप–प्रसार गुणांक ठोसों से लगभग 10 गुना अधिक होता है। तथापि 0 से 4ºC तापमान के लिए जल के आयतन में वृद्धि नहीं होती। उल्टा जब तापमान 0ºc से 4ºC तक बढ़ता है तो जल का आयतन कम होता है एवं यह 4ºC पर घनत्व का महत्तम मान 1 g mL^{-1} अथवा 1000 kg m^{-3} प्राप्त कर लेता है। इसके बाद आयतन बढ़ना प्रारम्भ हो जाता है। (जबकि घनत्व कम होता है) जैसा कि चित्र 10.2 में दर्शाया गया है।



चित्र 10.2

टिप्पणियाँ

अब, यह समझा जा सकता है कि तालाब एवं झील सतह पर क्यों जम जाती है जबकि इसके नीचे जल द्रव अवस्था में रहता है। जैसे–जैसे तालाब ठंडा होता है, भारी एवं ठंडा जल प्रारम्भ में सतह से तली की ओर डूबता है। जब समस्त जल का तापमान 4ºC हो जाता है तब यह प्रवाह रुक जाता है। जल की सतह का तापमान घटता रहता है एवं 0º पर जम जाता है। जैसे ही सतह का जल जमता है यह वहीं रहता है क्योंकि बर्फ ऊष्मा का कुचालक है। चूंकि बर्फ जल से हल्का होता है अत: सतह पर बर्फ की परत मोटी होती जाती है जबकि तली में 4ºC का जल बना रहता है। यदि ऐसा नहीं होता तो मत्स्य एवं अन्य जल जीव जीवित नहीं बने रह सकते थे।

10.1.6 गैसों में ऊष्मीय प्रसार

जब गैसों को ऊष्मा प्रदान की जाती है तो वे भी फैलती हैं और यह फैलाव ठोस एवं द्रवों की अपेक्षा बहुत अधिक होता है। लेकिन गैस के प्रकरण में तापमान वृद्धि से आयतन एवं दाब एक साथ परिवर्तित हो सकते है। अत: तापमान वृद्धि के साथ हमें आयतन में वृद्धि नियत दाब अथवा दाब में वृद्धि नियत आयतन पर विचार करनी होगी। अत: नियत दाब पर आयतन प्रसार गुणांक निम्नवत् दिया जा सकता है।

$$\gamma_v = \left(\frac{V_2 - V_1}{V_1 \Delta\theta}\right)_{\Delta p = 0}$$

इसी प्रकार

$$\gamma_p = \left(\frac{p_2 - p_1}{p_1 \Delta\theta}\right)_{\Delta v = 0}$$

10.2 गैसों का अणुगति सिद्धान्त

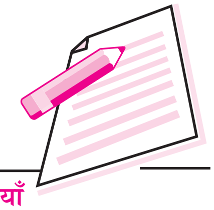
आप जानते हैं कि पदार्थ बहुत से परमाणुओं और अणुओं से मिलकर बना होता है। इन अणुओं में से प्रत्येक अणु उस पदार्थ के गुणधर्म दर्शाता है जिसका वह अंग है।

गैसों का अणुगति सिद्धान्त आदर्श गैसों के स्थूल गुणधर्म जैसे कि उसके दाब,आयतन और ताप का इसके सूक्ष्म गुणधर्मों, जैसे अणुओं की चाल तथा द्रव्यमान के बीच संबंध स्थापित करने का प्रयास करता है।

अणुगति सिद्धान्त कुछ अवधारणाओं पर आधारित है। यह केवल आदर्श गैसों के लिये उपयुक्त है। (यदि किसी गैस के अणु बिन्दु द्रव्यमान की तरह व्यवहार करें और उनके बीच कोई अन्तर–आण्विक बल न लगता हो तो इस गैस को आदर्श गैस कहा जा सकता है। कमरे के ताप एवं वायुमण्डलीय दाब (कम दाब) पर कोई गैस आदर्श गैस की भांति व्यवहार करती है।

10.2.1 गैस के अणुगति सिद्धान्त की अभिधारणा

क्लार्क मैक्सवैल ने 1860 में प्रतिपादित किया कि गैसों के प्रेक्षित गुणधर्मों की व्याख्या गैसों के अणुओं की प्रकृति उनकी गति और अन्योन्य क्रियाओं के विषय में की गई कुछ अभिधारणाओं के आधार पर की जा सकती हैं। अणुगति सिद्धान्त की अभिधारणायें निम्नलिखित हैं–



(i) गैस बहुत से समान अणुओं से मिलकर बनी होती है, जो दृढ़ होते हैं और सभी संभव वेगों से सभी दिशाओं में गति करते हैं। उनके बीच अंतराण्विक बल नगण्य होता है।

(ii) ये अणु आपस में और गैस–धारक की दीवार से संघट्ट करते रहते हैं। ये संघट्ट पूर्णत: प्रत्यास्थ होते हैं।

(iii) अणुओं का आकार उनके आपस की दूरी की तुलना में नगण्य होता है।

(iv) संघट्टों के बीच अणु एक समान वेग से सीधी रेखा में गति करते हैं।

(v) संघट्ट में लगा समय दो क्रमश: संघट्टों के बीच के समय की तुलना में नगण्य होता है।

(vi) सम्पूर्ण पात्र में अणुओं का वितरण एक समान होता है।

किसी पात्र में विद्यमान गैस के कारण उत्पन्न दाब का व्यंजक प्राप्त करने के लिये हम केवल एक अणु की गति के बारे में विचार करते हैं। क्योंकि सभी अणु समान हैं (अवधारणा (z) इस गति करने वाले अणु के x, y, z दिशाओं में वेग घटक होते हैं, अवधारणा (vi) के अनुसार केवल एक आयाम जैसे x- अक्ष अनुदिश गति पर विचार करना पर्याप्त होगा। (चित्र 10.3) ध्यान दीजिये कि यदि गैस के N (6×10^{26}) अणु प्रति घनमीटर होते हैं तो 3N पथों पर विचार करना होता है किन्तु इस अभिधारणा से अब समस्या केवल एक अणु की एकायामी गति की रह गई है। आइये पृष्ठ LMNO पर C वेग से गति करते हुए किसी कण पर विचार करें। इसके x, y तथा z घटक क्रमश: u, v तथा w हैं, यदि अणु का द्रव्यमान m हो और यह u चाल से x दिशा में गति कर रहा हो तो ox दिशा के लम्बवत् तल पर इसका संवेग mu होगा, दीवार से टकराकर यह अणु समान चाल से विपरीत दिशा में लौटेगा, दीवार से संघट्ट के बाद अणु का संवेग $= -mu$

$$\text{अत: अणु के संवेग में परिवर्तन } = mu - (-mu) = 2mu$$

यदि अणु पृष्ठ ABCD से पृष्ठ LMNO की ओर से u वेग से गति करता है और संघट्ट के पश्चात बिना किसी अणु से टकराये वापस आता है तो यह 2l दूरी $\dfrac{2l}{u}$ समय में तय करता है।

अत: अणुओं के दीवार से दो क्रमबद्ध संघट्टों के बीच का समय $\dfrac{2l}{u}$ है।

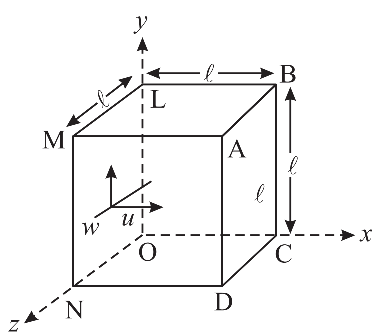
न्यूटन के द्वितीय गति नियम के अनुसार संवेग परिवर्तन की दर लगाये गये बल के बराबर होती है। अत:

ABCD पर संवेग परिवर्तन की दर

$$= \frac{\text{संवेग परिवर्तन}}{\text{समय}}$$

$$= \frac{2mu}{2l/u} = \frac{mu^2}{l}$$

यह एक अणु के संवेग परिवर्तन की दर है।



चित्र 10.3 अणु की x- अक्ष के अनुदिश गति

चूंकि गैस में N अणु हैं, ABCD पर x – अक्ष के अनुदिश $u_1, u_2, ..., u_N$ वेग से गति करते हुए N अणुओं के कारण कुल संवेग परिवर्तन की दर या ABCD पर कुल आरोपित बल

$$= \frac{m}{l}\left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_N^2\right)$$

∴ ABCD दीवार पर लगा दाब (क्योंकि दाब एकांक क्षेत्रफल पर लगने वाला बल है)

$$P = \frac{\frac{m}{l}\left(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_N^2\right)}{l^2}$$

$$= \frac{m}{l^3}\left(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_N^2\right) \qquad (10.1)$$

यदि $\overline{u}^2$ Ox दिशा में सभी वेगों के घटकों के वर्ग का माध्य हो तो

$$\overline{u}^2 = \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_N^2}{N}$$

अथवा

$$N\overline{u}^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_N^2$$

$(u_1^2 + u_2^2 + ... + u_N^2)$ के मान को समी. (10.1) में रखने पर

$$P = \frac{Nm\overline{u^2}}{\ell^3} \qquad (10.2)$$

ज्यामिति द्वारा यह दर्शाया जा सकता है कि

$$c^2 = u^2 + \upsilon^2 + w^2$$

जहाँ पर u, v और w, c के तीन एक दूसरे पर लंबवत दिशाओं में घटक हैं,

वर्ग माध्य मानों के लिये भी यह संबंध सत्य है अर्थात्

$$\overline{c}^2 = \overline{u}^2 + \overline{\upsilon^2} + \overline{w}^2$$

चूंकि घन के किसी एक किनारे के समान्तर गति करने के लिये अणु कोई वरीयता नहीं दिखलाते हैं, इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि u^2, υ^2, w^2 के माध्यमान बराबर हैं।

अर्थात्

$$\overline{u}^2 = \overline{\upsilon^2} = \overline{w}^2$$

या

$$\overline{u}^2 = \frac{\overline{c}^2}{3}$$

समीकरण (10.2) में इसका मान प्रतिस्थापित करने पर

$$P = \frac{1}{3}\frac{Nm}{\ell^3}\overline{c^2}$$

चूंकि l^3 गैस धारक का आयतन है,

$$PV = \frac{1}{3}Nm\overline{c^2} = \frac{1}{3}M\overline{c^2} \qquad (10.3)$$

इस संबंध का महत्त्व यह है कि यह स्थूल दर्शीय गुणधर्मों अर्थात् दाब और आयतन को सूक्ष्मदर्शी गुणधर्मों, अर्थात् अणुओं के द्रव्यमान तथा वर्गमाध्य चाल से जोड़ता है।

समीकरण (10.3) को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है।

$$P = \frac{1}{3}\frac{Nm}{V}\overline{c^2}$$

यदि $\rho = \frac{mN}{V}$, गैस का घनत्व हो तो

$$P = \frac{1}{3}\rho\overline{c^2}$$

या

$$\overline{c^2} = \frac{3P}{\rho} \qquad (10.4)$$

वैकल्पिक रूप से यदि हम N/V अनुपात को संख्या घनत्व n से दर्शायें तो समी. (10.3) को लिख सकते हैं;

$$P = \frac{1}{3}mn\overline{c^2} \qquad (10.3a)$$

उपरोक्त व्युत्पत्ति में निम्नांकित बिंदु ध्यान देने योग्य हैं:

(i) समीकरण (10.4) से यह स्पष्ट है कि अणुगति सिद्धान्त में पात्र के आकार की कोई भूमिका नहीं है। केवल आयतन ही महत्वपूर्ण है। हम घन के अलावा कोई अन्य पात्र भी ले सकते हैं। घन केवल हमारे परिकलन को सरल कर देता है।

(ii) हमने अंतरा-अणुक संघट्टों की उपेक्षा की है। लेकिन ये परिणाम पर प्रभाव नहीं डालते हैं क्योंकि उनके एक दूसरे से टकराने से या दीवारों से टकराने पर अणुओं का औसत संवेग नहीं बदलता है।

(iii) चाल के वर्ग का माध्य अर्थात्, $\overline{c^2}$ और चाल के माध्य का वर्ग $(\bar{c})^2$ समान नहीं हैं। यह निम्नलिखित उदाहरण से स्पष्ट हो जायेगा।

मान लीजिए हमारे पास 5 अणु हैं और उनकी चाल क्रमशः 1, 2, 3, 4, 5 इकाई है, तब उनकी माध्य चाल

$$\frac{1+2+3+4+5}{5} = 3 \text{ यूनिट}$$

इसका वर्ग 9 है

दूसरी ओर चाल के वर्गों का माध्य

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

अतः हम देखते हैं कि चाल के वर्ग का माध्य और चाल के माध्य का वर्ग समान नहीं है।

उदाहरण 10.1: 10 cm भुजा के खोखले घन में 10^{22} आक्सीजन अणुओं द्वारा उत्पन्न दाब का परिकलन कीजिए जहां अणुओं की औसत स्थानान्तरीय चाल 500 m s^{-1} है और प्रत्येक अणु का द्रव्यमान 5×10^{-26} kg, है।

हलः संवेग में परिवर्तन $2m\,u = 2 \times (5 \times 10^{-26}\ \text{kg}) \times (500\ \text{m s}^{-1})$

$$= 5 \times 10^{-23}\ \text{kg m s}^{-1}.$$

एक ही पार्श्व में उत्तरोत्तर संघट्ट करने में लगा समय = 2×10 cm या 2×10^{-1} m. दूरी तय करने में लगा समय

$$t = \frac{2\times10^{-2}\ \text{m}}{500\ \text{m s}^{-1}} = 4 \times 10^{-4}\ \text{s}$$

$\therefore$ संवेग परिवर्तन की दर $= \dfrac{5\times10^{-23}\ \text{kg m s}^{-1}}{4\times10^{-4}\ \text{s}} = 1.25 \times 10^{-19}$ N

एक धारक की दीवार पर कुल अणुओं की एक तिहाई संख्या के कारण बल

$$f = \frac{1}{3} \times 1.25 \times 10^{-19} \times 10^{22} = 416.7\ \text{N}$$

और दाब $= \dfrac{\text{बल}}{\text{क्षेत्रफल}} = \dfrac{417\ \text{N}}{100 \times 10^{-4}\ \text{m}^2}$

$$= 4.2 \times 10^{-4}\ \text{N m}^{-2}$$

पाठगत प्रश्न 10.1

1. (i) एक गैस किसी भी पात्र को पूरा भर देती है लेकिन द्रव नहीं। क्यों?
   (ii) गैसों की तुलना में ठोसों की रचना अधिक क्रमबद्ध होती है। क्यों?
2. आदर्श गैस से क्या तात्पर्य है?

टिप्पणियाँ

3. गैस का दाब अणुओं के घनत्व से कैसे संबंधित है?
4. किसी पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा से आप क्या समझते हैं?
5. आयतन प्रसार गुणांक की परिभाषा कीजिए।
6. $20°C$ पर किसी स्टील के तार की लम्बाई 2 m है। $120°C$ ताप पर इसकी लम्बाई 2.01 m हो जाती है। तार के पदार्थ के रैखिक प्रसार गुणांक α की गणना कीजिए।

10.3 ताप की गतिक व्याख्या

समीकरण (10.3) से हम जानते हैं कि

$$PV = \frac{1}{3} m N \overline{c^2}$$

हम यह भी जानते हैं कि गैसों के n मोलों (moles) के लिए अवस्था–समीकरण

$PV = nRT$, जहां पर R एक नियतांक है जिसका मान $8.3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ है। अतः इस परिणाम को दाब व्यंजक के साथ संयोजित करने पर

$$nRT = \frac{1}{3} m N \overline{c^2}$$

दोनों ओर $\frac{3}{2n}$ से गुणा करने पर

$$\frac{3}{2} RT = \frac{1}{2} \frac{Nm\overline{c^2}}{n} = \frac{1}{2} m N_A \overline{c^2}$$

जहां पर $\frac{N}{n} = N_A$ एवोगेड्रो संख्या

यह एक मोल पदार्थ में परमाणुओं या अणुओं की संख्या दर्शाता है। इसका मान 6.023×10^{23} प्रति ग्राम मोल है। N_A, का उपयोग करने पर हम इसे निम्न प्रकार लिख सकते हैं:

$$\frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{1}{2} m \overline{c^2}$$

लेकिन $\frac{1}{2} m \overline{c^2}$ एक अणु की माध्य गतिज ऊर्जा है। अतः हम लिख सकते हैं।

$$\frac{1}{2} m \overline{c^2} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT \qquad (10.5)$$

जहां पर $k = \frac{R}{N_A}$ बोल्ट्ज़मान नियतांक (k) है

अर्थात्

$$k = \frac{R}{N_A} \qquad (10.6)$$

k का मान $1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ है।

k के पदों में, गैस के एक अणु की माध्य गतिज ऊर्जा निम्न प्रकार दर्शायी जाती है

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} m \, \overline{c^2} = \frac{3}{2} \mathrm{k\,T} \qquad (10.7)$$

अतः गैस के 1 ग्राम मोल की गतिज ऊर्जा $= \frac{3}{2} \mathrm{R\,T}$

यह संबंध हमें बतलाता है कि अणु की माध्य गतिज ऊर्जा गैस के निरपेक्ष ताप T पर निर्भर करती है और अपने द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती है। यह तथ्य **ताप की अणुगतिक व्याख्या** के रूप में जाना जाता है।

स्पष्टतया, $T = 0$, पर 1 अणु की गतिज ऊर्जा शून्य हो जाती है अथवा दूसरे शब्दों में इस ताप पर कुल अणुगति समाप्त हो जाती है और अणु ऐसे व्यवहार करते हैं जैसे कि वे जम गये हों। नवीन संकल्पनाओं के आधार पर परम शून्य तापमान पर, किसी भी निकाय की ऊर्जा पूर्णतया शून्य नहीं होती, एक निकाय में इस तापमान पर भी कुछ ऊर्जा पाई जाती है जिसे शून्य बिंदु ऊर्जा कहते हैं।

समीकरण (10.5) की सहायता से हम $\overline{c^2}$, वर्ग माध्य मूल वेग का मान लिख सकते हैं

$$c_{rms} = \sqrt{\overline{c^2}} = \sqrt{\frac{3\mathrm{kT}}{m}} = \sqrt{\frac{3\mathrm{RT}}{M}} \qquad (10.8)$$

यह संबंध दर्शाता है कि किसी ताप T पर c_{rms} आणविक द्रव्यमान M के वर्गमूल का व्युत्क्रमानुपाती होता है। अर्थात् हल्के अणुओं का औसत वेग भारी अणुओं के वेग से अधिक होता है। उदाहरण के लिए ऑक्सीजन का आणविक द्रव्यमान हाइड्रोजन के आणविक द्रव्यमान का 16 गुना है। हाइड्रोजन के अणु आक्सीजन के अणुओं की अपेक्षा 4 गुना तेज गति करते हैं, इसीलिये हल्की गैसें हमारे वायुमण्डल के ऊपरी भाग में पाई जाती हैं। यह प्रेक्षित तथ्य अणुगतिक सिद्धान्त की मान्यता के लिए पहले महत्त्वपूर्ण प्रमाणों में से एक था।

10.4 अणुगति सिद्धान्त से गैस के नियमों का निगमन

(i) बॉयल का नियम

हम जानते हैं कि एक गैस के लिये समीकरण (10.3) के अनुसार

$$\mathrm{PV} = \frac{1}{3} M \, \overline{c^2}$$

जब किसी गैस के दिये गये किसी द्रव्यमान का ताप नियत होता है तो,
उसका वर्ग माध्य मूल वेग नियत रहता है।

अतः समी. (10.6) में M और $\overline{c^2}$ दोनों स्थिर है

अतः हम लिख सकते हैं कि

$$\mathrm{PV} = \text{स्थिर} \qquad (10.9)$$

यह बॉयल का नियम है जो बतलाता है कि **नियत ताप पर किसी गैस के दिये गये द्रव्यमान का दाब उस गैस के आयतन का व्युत्क्रमानुपाती होता है।**

(ii) चार्ल्स का नियम

समी. (10.3) से हम जानते हैं कि

$$PV = \frac{1}{3} M \overline{c}^2$$

अथवा
$$V = \frac{1}{3} \frac{M}{P} \overline{c}^2$$

यदि M एवं P अपरिवर्तित रहें अर्थात् अचर हों तो

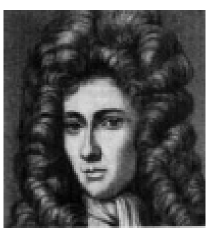
$V \propto \overline{c}^2$ लेकिन $\overline{c}^2 \propto T$ (यह चार्ल्स का नियम है।)

$$\therefore \qquad V \propto T \qquad (10.10)$$

अत: चार्ल्स के नियम का कथन यह है कि **एक नियत दाब पर किसी गैस के निश्चित द्रव्यमान का आयतन ताप के समानुपाती होता है।**

राबर्ट बॉयल

(1627–1691)



ब्रिटिश प्रयोगकर्त्ता रॉबर्ट बॉयल गैस के आयतन व दाब के बीच संबंध दर्शाने वाले नियम के लिये प्रसिद्ध है (PV = नियतांक)। राबर्ट हुक द्वारा बनाये गये निर्वात पम्प का प्रयोग करके उन्होंने दर्शाया कि ध्वनि निर्वात में नहीं चलती। उन्होंने सिद्ध किया कि जलने के लिये हवा की आवश्यकता होती है और हवा के प्रत्यास्थ गुणों का अध्ययन किया। वे रॉयल सोसाइटी ऑफ लन्दन के संस्थापक सदस्य थे और अपनी वैज्ञानिक कार्यों में रुचि के कारण आजन्म अविवाहित रहे। चन्द्रमा पर क्रेटर बॉयल का नामकरण उनके सम्मान में किया गया है।

(iii) गे लुसक का नियम

गैसों के अणुगति सिद्धान्त के अनुसार एक आदर्श गैस के लिये

$$P = \frac{1}{3} \frac{M}{V} \overline{c}^2$$

एक निश्चित द्रव्यमान (M) और निश्चित आयतन (V) के लिये,

$$P \propto \overline{c}^2$$

लेकिन
$$\overline{c}^2 \propto T$$

$$\therefore \qquad P \propto T \qquad (10:11)$$

यह गे लुसक नियम है, जो इस प्रकार है।

यदि किसी गैस का आयतन स्थिर रखा जाय तो उसका दाब परम ताप का अनुक्रमानुपाती होता है।

(iv) एवोगेड्रो नियम

दो अलग-अलग गैसों, गैस 1 तथा 2 पर विचार करें। अणुगतिकी के सिद्धान्त के अनुसार

$$P_1V_1 = \frac{1}{3}m_1N_1\,\overline{c_1^2}$$

और

$$P_2V_2 = \frac{1}{3}m_2N_2\,\overline{c_2^2}$$

यदि उनके दाब तथा आयतन समान हों तो–

$$P_1V_2 = P_2V_2$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{3}m_1N_1\,\overline{c_1^2} = \frac{1}{3}m_2N_2\,\overline{c_2^2}$$

चूंकि ताप नियत है इसलिये उनकी गतिज ऊर्जायें समान होंगी

अर्थात

$$\frac{1}{2}m_1\,\overline{c_1^2} = \frac{1}{2}m_2\,\overline{c_2^2}$$

इस परिणाम को पूर्ववर्ती समीकरण में प्रयोग करने पर $N_1 = N_2$. (10.12)

अर्थात् ताप और दाब की समान अवस्थाओं में आदर्श गैसों के समान आयतन में अणुओं की संख्या भी समान होती है।

(v) डाल्टन के आंशिक दाब का नियम

मान लीजिये हमारे पास अनेक गैसें या वाष्प हैं जो एक दूसरे के साथ रासायनिक प्रतिक्रिया नहीं करती हैं। माना उनके घनत्व क्रमशः ρ_1, ρ_2, ρ_3 ... और वर्ग माध्य वेग क्रमशः $\overline{c_1^2}$, $\overline{c_2^2}$, $\overline{c_3^2}$ ... हैं। यदि हम इन गैसों के एक समान आयतन मिला देते हैं तो परिणामी P स्पष्ट रूप से निम्न प्रकार व्यक्त होगा।

$$P = \frac{1}{3}\rho_1\overline{c_1^2} + \frac{1}{3}\rho_2\overline{c_2^2} + \frac{1}{3}\rho_3\overline{c_3^2} + \ldots$$

यहां पर $\frac{1}{3}\rho_1\overline{c_1^2}$, $\frac{1}{3}\rho_2\overline{c_2^2}$, $\frac{1}{3}\rho_3\overline{c_3^2}$ ... यदि भिन्न-भिन्न गैसों या वाष्पों के क्रमशः अपने-अपने आंशिक दाब हैं, यदि हम उन्हें P_1, P_2, P_3, से व्यक्त करें तो हमें प्राप्त होता है

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots. \qquad (10.13)$$

दूसरे शब्दों में गैसों के एक मिश्रण का कुल दाब पृथक-पृथक गैसों द्वारा लगाये गये आंशिक दाबों के जोड़ के बराबर होता है। **इस कथन में व्यक्तिगत गैस द्वारा लगाया गया** वह दाब

उसका आंशिक दाब कहलाता है जो वह गैस मिश्रण के आयतन के बराबर आयतन प्राप्त करने पर लगाती है। यह डाल्टन का आंशिक दाब का नियम है।

(vi) ग्राहम का गैस विसरण नियम

ग्राहम ने सरंध्र पदार्थों में से गैसों के विसरण का अध्ययन किया। विभिन्न गैसों के विसरण वेगों की तुलना करने पर ग्राहम ने पाया कि–**ताप और दाब की समान अवस्थाओं में किसी गैस के विसरण का वेग उसके घनत्व के वर्गमूल का व्युत्क्रमानुपाती होता है।** इसे ग्राहम का गैस विसरण का नियम कहते हैं?

गैसों के अणुगति सिद्धान्त के अनुसार एक रंध्र से विसरण की दर वर्ग वेग माध्य c_{rms} के समानुपाती होगी। समीकरण (10.4) से हम जानते हैं कि

$$\overline{c^2} = \frac{3P}{r}$$

या
$$\sqrt{\overline{c^2}} = c_{rms} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}$$

इसलिये दो गैसों के लिये जिनके घनत्व क्रमशः ρ_1 और ρ_2 हैं। एक नियत दाब P पर इनकी वर्गमाध्य मूल चाल क्रमशः

$$(c_{rms})_1 = \sqrt{\frac{3P}{r_1}} \quad \text{and} \quad (c_{rms})_2 = \sqrt{\frac{3P}{r_2}}$$

अतः
$$\frac{\text{एक गैस के विसरण की दर}}{\text{दूसरे गैस के विसरण की दर}} = \frac{(c_{rms})_1}{(c_{rms})_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \qquad (10.14)$$

अतः गैसों के विसरण की दर उनके घनत्वों के व्युत्क्रमानुपाती होती है जबकि दाब स्थिर हो।

उदाहरण 10.2: 300 K पर हाइड्रोजन अणु का वर्ग माध्य वेग का वर्गमूल (Root mean square speed) कितना होता है?

हाइड्रोजन अणु का द्रव्यमान 3.347×10^{-27} kg और $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J mol^{-1} K^{-1}

हल: हम जानते हैं कि

$$c_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \times (1.38 \times 10^{-23}\,\text{J K}^{-1}) \times (300\,\text{K})}{3.347 \times 10^{-27}\ \text{kg}}}$$

$$= 1927 \text{ m s}^{-1}$$

उदाहरण 10.3: किस ताप पर हाइड्रोजन का वर्ग माध्य मूल वेग मानक ताप और दाब (STP) पर इसके मान का दुगुना होगा जबकि दाब नियत है।

हल: हम जानते हैं कि

$$c_{rms} \,\alpha\, \sqrt{T}$$

टिप्पणियाँ

यदि STP पर वेग c_0 है

और T अपेक्षित ताप है तथा उस ताप पर वेग $c = 2\,c_0$ है जैसा कि प्रश्न में दिया गया है।

तब
$$\frac{c}{c_0} = \frac{2c_0}{c_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$4 = \frac{T}{T_0}$$

या
$$T = 4T_0$$

चूंकि $T_0 = 273K$,

$$\therefore \qquad T = 4 \times 273\text{ K} = 1092\text{ K} = 819\,^0\text{C}$$

उदाहरण 10.4: 300 K पर गैस की औसत ऊर्जा ज्ञात कीजिए, दिया है $k = 1.38 \times 10^{-23}\ JK^{-1}$.

हल: हम जानते हैं कि

$$\frac{1}{2} M\,\overline{c}^2 = \frac{3}{2} k\,T$$

क्योंकि $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J K^{-1} और T = 300 K

$$\therefore \qquad E = \frac{3}{2}\,(1.38 \times 10^{-23}\text{ J K}^{-1})\,(300\text{ K})$$

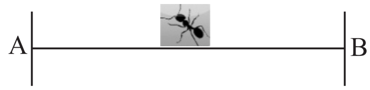
$$= 6.21 \times 10^{-21}\ \text{J}$$

10.4.1 स्वातन्त्र्य कोटिमान

किसी निकाय का स्वातन्त्र्य कोटिमान उस निकाय के कणों द्वारा की जा सकने वाली स्वतंत्र गतियों की संख्या होती है।

मान लीजिए आप एक सड़क पर चल रहे है जिसमें से बायीं एवं दाहिनी ओर को कई अन्य सड़कें निकलती है। आप सड़क पर चलने एवं बांई ओर अथवा दाहिनी ओर मुड़ने के लिए स्वतंन्त्र है अत: आपका स्वातन्त्र्य कोटिमान दो हुआ। यदि सड़क पर कोई ऊपर-सेतु है और आपको उसी मार्ग से जाना है आपको बायीं एवं दायीं ओर मुड़ने की स्वतन्त्रता नहीं है इसका अर्थ है कि अब आपकी स्वतंन्त्रता बाधित हो गई आप केवल ऊपर-सेतु मार्ग से ही आ जा सकते है अत: आपका स्वातन्त्र्य कोटिमान एक है।

चित्र 10.4 के सन्दर्भ में एक रस्सी कमरे की दो विपरीत दीवारों पर बिन्दु A एवं B के मध्य टांगी गई है। इसके ऊपर एक चींटी चलती है तो उसका स्वातंन्त्र्य कोटिमान एक है।



चित्र 10.4

टिप्पणियाँ

अब यदि यह कमरे के फर्श पर गिर जाती है तो यह x एवं y दिशा में स्वतंत्र रूप से चल सकती है अत: इसका स्वातन्त्रय कोटिमान दो है। यदि चीटीं के पंख है एवं वह उड़ सकती है तो वह x, y एवं z दिशा में चलने के लिए स्वतन्त्र है एवं इसका स्वातन्त्र्य कोटिमान तीन हुआ।

एकपरमाणुक अणु उपरोक्त उदाहरण की उड़ने वाली चीटीं की तरह तीन स्वातंन्त्रय कोटिमान वाला अकेला बिन्दु है। यह सभी कोटिमान स्थानान्तरीय हैं। एक द्वि–परमाणुक अणु दो परमाणुओं का बना होना है यह स्थानान्तरीय गति के अतिरिक्त दो परस्पर लम्बवत् अक्षों के इर्द गिर्द घूर्णन कर सकता है। अत: द्विपरमाणुक अणु का स्वांतन्त्र्य कोटिमान $(3 + 2 = 5)$ पांच हुआ, तीन कोटिमान स्थानान्तरण के संगत एवं दो घूर्णन के संगत।

पाठगत प्रश्न 10.2

1. यादृच्छिक रूप से चुने गये पांच अणुओं की चाल 500 m s^{-1}, 600 m s^{-1}, 700 m s^{-1}, 800 m s^{-1}, और 900 m s^{-1}, पाई गई। उनका वर्ग माध्य मूल वेग ज्ञात कीजिए।

2. यदि बिना किसी रासायनिक प्रतिक्रिया के दो गैसों 1 और 2 का समान आयतन मिलाया जाता है तो मिश्रण का परिणामी दाब क्या होगा?

3. जब हम एक गुब्बारे में हवा भरते हैं तो इसका आयतन और बिना हवा भरी स्थिति की तुलना में दाब भी बढ़ता है, क्या यह स्थिति बॉयल के नियम का पालन नहीं करती?

10.5 ऊर्जा समविभाजन का नियम

हम जानते हैं कि एक गैस की गतिज ऊर्जा = $\frac{1}{2}m\overline{c^2} = \frac{3}{2}\text{kT}$.

क्योंकि किसी अणु की x, y तथा z दिशाओं में गति समान रूप से संभाव्य होती है अत: वेग c के घटकों (अर्थात् u, v और w) के औसत मान तीनों दिशाओं में समान होने चाहिये या यह कहें कि अणु के लिये तीनों दिशायें समान होती है।

अर्थात् $\quad \overline{u} = \overline{v} = \overline{w}$

और $\quad \overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2} = \frac{1}{3}\overline{c^2}$

चूंकि $\quad c^2 = u^2 + v^2 + w^2$

$\therefore \qquad \overline{c^2} = \overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}$

$\frac{1}{2}m$, द्वारा गुणा करने पर,

$$\frac{1}{2}m\,\overline{u^2} = \frac{1}{2}m\,\overline{v^2} = \frac{1}{2}m\,\overline{w^2}$$

लेकिन $\frac{1}{2}m\,\overline{u^2} = E =$ (x–अक्ष में अणु की कुल माध्य गतिज ऊर्जा है।)

अतः $E_x = E_y = E_z$. किन्तु, अणु की कुल माध्य गतिज ऊर्जा होती है– $\frac{3}{2}$k T. अतः हमें एक महत्वपूर्ण परिणाम प्राप्त होता है

$$E_x = E_y = E_z = \frac{1}{2}\text{k T}$$

क्योंकि तीनों वेग घटक u, v और w अणु की तीन स्वातंत्र्य कोटियों के अनुरूप होते हैं। अतः हम कह सकते हैं; **एक गतिकीय निकाय की कुल गतिज ऊर्जा उसकी सभी स्वातंत्र्य कोटियों में समान रूप से विभक्त होती है और प्रति स्वातंत्र्य कोटि यह $\frac{1}{2}$ k T के बराबर होती है।**

यह ऊर्जा समविभाजन का नियम है, और इसका निगमन लुडविग बोल्ट्समान ने किया, अब हम विभिन्न प्रकार की गैसों पर इस नियम को लगाकर देखते हैं

अब तक हम केवल स्थानान्तरीय गति पर ही विचार करते आये हैं। वास्तव में एकल परमाणविक अणु के लिये केवल स्थानान्तरीय गति ही होती है क्योंकि वे घूर्णन नहीं कर सकते हैं (यद्यपि तीनों परस्पर लम्बवत् अक्षों में से किसी के भी चारों ओर चक्रण (Spin) कर सकते हैं, यदि ये परिमित गोले की तरह हों।

अतः एक परमाणवीय अणु के लिये कुल ऊर्जा

$$E = \frac{3}{2}\text{k T} \qquad (10.15)$$

द्विपरमाणुक अणु के लिये हम मान सकते हैं कि यह दृढ़ दंड द्वारा जुड़े हुये दो गोलकों की तरह होता है। इस तरह का अणु तीनों पारस्परिक लंबवत् अक्षों में से किसी के चारों ओर घूर्णन कर सकता है। दृढ़ दण्ड के साथ अक्ष के चारो ओर का जड़त्व आघूर्ण की तुलना में नगण्य होता है, जिससे कि आघूर्ण ऊर्जा दो पदों की बनी होती है,

जैसे $\qquad \frac{1}{2}I\,\omega_y^2$ and $\frac{1}{2}I\,\omega_z^2$.

अब द्विपरमाणुक अणु गैस के द्रव्यमान (संहति) केन्द्र के विशेष वर्णन के लिये तीन निर्देशांकों (कोटियों) की आवश्यकता होगी। अतः द्विपरमाणु के अणु में स्थानांतरीय एवं घूर्णन दोनों ही गतियां है;

$$E = 3 \; \frac{1}{2}kT \; + 2 \; \frac{1}{2}kT$$

$$= \frac{5}{2}k\,T \qquad (10.16)$$

ल्युडविग बोल्ट्समान
(1844–1906)

वियना (आस्ट्रिया) में जन्में और युवा हुए, बोल्ट्समान ने जोसेफ स्टीफन के दिशानिर्देश में डाक्टरेट पूरी की। उन्होंने लुन्सन किरखाफ और हेल्मोल्ज के साथ भी काम किया। वे काफी भावुक व्यक्ति थे उन्होंने दो बार आत्महत्या का प्रयास किया और दूसरे प्रयास में सफल हुये। लोगों के अनुसार इन प्रयासों के पीछे कारण मैक और ओस्टवाल्ड से मतभेद थे।

वह गैस के आणविक सिद्धान्त, सांख्यिकी-यांत्रिकी और ऊष्मागतिकी में योगदान के लिये प्रसिद्ध हैं। चन्द्रमा में क्रेटर बोल्ट्समान का नाम उनकी स्मृति और सम्मान में रखा गया है।

10.6 गैसों की ऊष्मा धारितायें

हम जानते हैं कि किसी गैस के ताप को आयतन व दाब की विभिन्न अवस्थाओं के अन्तर्गत बढ़ाया जा सकता है उदाहरण के लिए आयतन या दाब को नियत रखा जा सकता है। या दोनों को यादृच्छिक तरीके से बदलने दिया जा सकता है। प्रत्येक मामले में एकांक द्रव्यमान में ताप की एकांक वृद्धि करने के लिये वांछित ऊष्मा की मात्रा पृथक-पृथक होती है। अतः किसी भी गैस की दो भिन्न-भिन्न ऊष्मा धारितायें होती हैं।

यदि किसी गैस का ताप ΔT बढ़ाने के लिये ΔQ परिमाण की ऊष्मा की आवश्यकता हो तो ऊष्मा धारिता को इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है–

$$\text{ऊष्मा धारिता} = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

किसी वस्तु की प्रति इकाई संहति की ऊष्मा धारिता को उस पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा कहते हैं और सामान्यतः संकेत c से दर्शाते हैं, इस प्रकार

$$\text{विशिष्ट ऊष्मा } c = \frac{\text{ऊष्मा धारिता}}{m} \qquad (10.17)$$

समी. (10.16) और समी. (10.17) को संयुक्त करने पर

$$c = \frac{\Delta Q}{m\,\Delta T} \qquad (10.18)$$

अत: किसी पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा, ऊष्मा का वह मात्रा होती है जो उस पदार्थ की एकांक संहति के ताप में एकांक वृद्धि करने के लिये आवश्यक होती है।

विशिष्ट ऊष्मा का SI मात्रक जूल प्रति किलोग्राम प्रति कैल्विन है। उदाहरण के तौर पर जल की विशिष्ट ऊष्मा है।

$$4.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

विशिष्ट ऊष्मा की उपरोक्त परिभाषा ठोस और द्रव के लिये तो ठीक है पर गैस के संबंध में नहीं क्योंकि यह आयतन या दाब के साथ परिवर्तित हो सकती है।

किसी गैस की विशिष्ट ऊष्मा का अध्ययन करने के लिये गैस के दाब या आयतन में से किसी एक को स्थिर रखना पड़ता है। परिणामस्वरूप हम गैस की दो विशिष्ट ऊष्मायें परिभाषित करते हैं।

(i) स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा (c_V)

(ii) स्थिर दाब पर विशिष्ट ऊष्मा (c_P)

(a) स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा (c_v)

स्थिर आयतन पर गैस की विशिष्ट ऊष्मा (c_v) को गैस की एंकांक संहति के ताप में 1 K वृद्धि करने के लिये आवश्यक ऊष्मा के परिमाण के रूप में परिभाषित किया जाता है जबकि उसका आयतन अपरिवर्तित रहे।

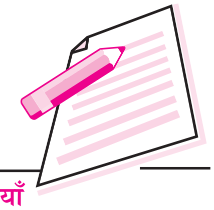
$$c_v = \frac{\Delta Q}{\Delta T}_V \qquad (10.19)$$

(b) स्थिर दाब पर विशिष्ट ऊष्मा (c_P)

स्थिर दाब पर गैस की विशिष्ट ऊष्मा (c_P) का गैस की एकांक संहति के ताप में 1 K वृद्धि करने के लिये आवश्यक ऊष्मा परिमाण के रूप में परिभाषित किया जाता है जबकि उस का दाब अपरिवर्तित रहे।

अर्थात्
$$c_p = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_P \qquad (10.20)$$

जब गैस का 1 मोल लिया जाता है तो उसके ताप में 1 डिग्री की वृद्धि के लिये आवश्यक ऊष्मा को मोलर विशिष्ट ऊष्मा (molar specific heat) कहते हैं,



हम जानते हैं कि जब दाब को स्थिर रखा जाता है तब गैस का आयतन बढ़ जाता है। ध्यान दीजिए कि इस प्रकार की स्थिति में स्थिर दाब पर एकांक संहति के ताप को 1 डिग्री तक बढ़ाने के लिये आवश्यक ऊष्मा दो भागों से बनी होतीहै।

(i) गैस के आयतन में परिवर्तन हेतु बाह्य कार्य करने के लिये वांछित ऊष्मा, तथा

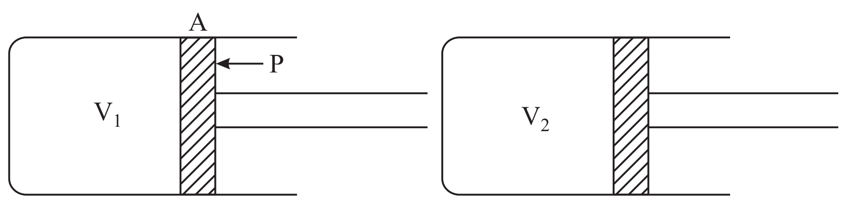
(ii) 1 डिग्री तक गैस के ताप को बढ़ाने के लिये वांछित ऊष्मा (c_v).

इसका तात्पर्य यह है कि स्थिर दाब पर गैस की विशिष्ट ऊष्मा, स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा की तुलना में कहीं अधिक होती है। और यह आधिक्य बाह्य दाब के विपरीत गैस को विस्तारित करने में किये गये कार्य के बराबर होता है।

$$c_p = W + c_v \qquad (10.21)$$

10.7 c_p और c_v के बीच संबंध

हम एक घर्षण रहित चल पिस्टन युक्त सिलैण्डर में परिबद्ध आदर्श गैस के एक मोल (Mole) पर विचार करते हैं (चित्र 10.5)। गैस को आदर्श माना गया है अत: इसके अणुओं के बीच कोई अन्तर-आणुक बल नहीं है और जब इस तरह की गैस विस्तारित होती है तब अणुओं को अलग-अलग करने में आंतरिक दाब के विपरीत कार्य किया जाता है।



चित्र 10.5 एक स्थिर ताप पर गर्म गैस

मान लीजिये P बाह्य दाब है और A पिस्टन के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल है, तब पिस्टन पर कार्यरत बल $= P \times A$

माना कि अब स्थिर दाब पर गैस को 1 K गर्म किया जाता है, जिसके परिणामस्वरूप पिस्टन बाहर की ओर x दूरी तक चला जाता है जैसा चित्र 10.5 में दर्शाया गया है। माना, V_1 गैस का प्रारंभिक आयतन है और V_2 गरम करने के बाद आयतन है। तब,

गैस द्वारा बाह्य दाब P के विपरीत x दूरी तक पिस्टन को धकेलने में किया गया कार्य

$$W = P \times A \times x$$
$$= P \times (\text{आयतन में वृद्धि})$$
$$= P(V_2 - V_1)$$

समीकरण 10.51 से हम जानते हैं कि $c_p - c_v = W$ बाह्य बलों के विरुद्ध 1 मोल गैस का ताप 1 K बढ़ाने में किया गया कार्य

अर्थात्
$$c_p - c_v = P(V_2 - V_1) \tag{10.22}$$
अब इन दो स्थितियों (गैस को गर्म करने से पूर्व और पश्चात्)–पूर्ण गैस (आदर्श गैस) समीकरण का प्रयोग करने पर
$$PV_1 = RT \tag{10.23}$$
$$PV_2 = R(T+1) \tag{10.24}$$
समी. (10.23) को समी. (10.24) में से हटाने पर,
$$P(V_2 - V_1) = R \tag{10.25}$$
$\therefore$ समीकरण (10.19) तथा समीकरण (10.22) से हम पाते हैं,
$$c_p - c_v = R \tag{10.26}$$
जहां पर R का मान J mol^{-1} K^{-1} में है।

जूल को कैलोरी में बदलने में
$$c_p - c_v = \frac{R}{J} \tag{10.27}$$
जहां J = 4.18 ऊष्मा का यांत्रिक तुल्यांक है।

उदाहरण 10.5: एक परमाणुक द्विपरमाणुक और त्रिपरमाणुक गैस अणुओं के लिये c_p और c_v के मान ज्ञात कीजिये।

हल: हम जानते हैं कि गैस के 1 माले के लिये औसत गतिज ऊर्जा (KE)
$$E = \frac{3}{2}RT$$
c_v को स्थिर आयतन पर गैस के 1 मोल का ताप 1 डिग्री तक बढ़ाने के लिये वांछित ऊष्मा के रूप में परिभाषित किया जाता है, अर्थात् यदि E_T = T K पर गैस की कुल ऊर्जा और E_{T+1} (T + 1केल्विन पर गैस की कुल ऊर्जा हो तो $c_v = E_{T+1} - E_T$.

(i) हम जानते हैं कि एक परमाणुक गैस के लिये कुल ऊर्जा $= \frac{3}{2}$ R T एक परमाणुक गैस के लिये
$$c_V = \frac{3}{2}R(T+1) - \frac{3}{2}RT = \frac{3}{2}R.$$
$$\therefore \quad c_p = c_V + R = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R.$$
(ii) द्विपरमाणुक गैस के लिये कुल ऊर्जा $= \frac{5}{2}RT$
$$\therefore \quad c_V = \frac{5}{2}R(T+1) - R\,\frac{5}{2}RT = \frac{5}{2}R$$
$$c_p = c_V + R = \frac{5}{2}R + R = \frac{7}{2}R.$$
(iii) अब आप इसी प्रकार त्रिपरमाणुक गैस के लिये c_V और c_p का मान प्राप्त कर सकते हैं।

पाठगत प्रश्न 10.3

1. नाइट्रोजन अणु की कुल ऊर्जा कितनी होती है?
2. नाइट्रोजन के लिये c_p और c_v की गणना कीजिए।
3. गैस की दो विशिष्ट ऊष्मायें क्यों होती है?

ब्राउनियन गति और माध्य मुक्त पथ

स्कॉटलैंड के वनस्पतिशास्त्री राबर्ट ब्राउन जब पानी में निलम्बित पराग कणों को देख रहे थे तो उन्होंने पाया कि परागकण यादृच्छिक रूप से गति कर रहे हैं परागकणों की गति को प्रारम्भ में जीवित वस्तु की गति समझा गया लेकिन अभ्रक, पत्थर या मृत वृक्षों के परागकणों ने भी यही व्यवहार दिखाया। इस गति को **ब्राउनियन गति** कहते हैं। यह गति पानी के कणों के आघात से असंतुलित बलों के कारण थी। ब्राउनियन गति पदार्थ के अणुगतिक सिद्धान्त का एक सीधा प्रमाण है। ब्राउनियन विस्थापन निम्न बातों पर निर्भर करता पाया गया

(i) निलंबित कणों का आकार छोटे कणों के लिये असंतुलित आघातों की अधिक संभावनाऐं होती हैं और ब्राउनियन गति अधिक सुस्पष्ट होती हैं

(ii) ब्राउनियन गति ताप के साथ बढ़ती है और माध्यम की श्यानता के साथ घटती है।

पारस्परिक संघट्टों के फलस्वरूप द्रव के अणु भी टेढ़ी-मेढ़ी रेखा में गति करते हैं। अणुओं के दो उत्तरोत्तर संघट्टों के बीच चली गयी दूरी को माध्यमुक्त पथ (mean free path) कहते हैं। इसका सूत्र निम्नवत् है

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}\, n\, \pi\, d^2}$$

जहां पर n संख्या घनत्व व d अणुओं का व्यास है।

आपने क्या सीखा

- किसी पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा पदार्थ के इकाई द्रव्यमान का तापमान 1°C (अथवा 1 K) बढ़ाने हेतु आवश्यक ऊष्मा की मात्रा है।
- कैलोरीमिति के सिद्धान्तानुसार : ऊष्मा हानि = ऊष्मा वृद्धि

- अणु गति सिद्धान्त गैस के परमाणुओंऔर अणुओं के अस्तित्व को मानता है और यांत्रिकी के नियमों और माध्य परिकलन विधि द्वारा इन नियमों का निगमन किया जाता है।
- अणुगति सिद्धांत गैस के स्थूल गुणधर्मों को उनके सूक्ष्म गुणधर्मों से संबद्ध करता है।
- गैस का दाब, पात्र की दीवारों पर अणुओं द्वारा प्रति इकाई क्षेत्रफल में प्रति सेकण्ड डाला गया औसत संघट्ट-प्रभाव है।
- ताप के परम शून्य पर अणु की गतिज ऊर्जा शून्य हो जाती है और आणविक गति का अस्तित्व नहीं रहता।
- अणुगति सिद्धान्त के आधार पर गैस के नियमों का निगमन किया जा सकता है।
- किसी गैस की एकांक संहति का ताप एकांक डिग्री बढ़ाने के लिये आवश्यक ऊष्मा की मात्रा भिन्न-भिन्न होती है जो इस बात पर निर्भर करती है कि उसे स्थिर दाब पर गर्म किया जाता है या स्थिर आयतन पर। अतः गैस की दो विशिष्ट ऊष्माएं होती हैं,

  i) स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा (c_V)

  ii) स्थिर दाब पर विशिष्ट ऊष्मा (c_p)

  इनमें यह संबंध है–

$$c_p = W + c_V$$

$$c_p - c_V = \frac{R}{J}$$

- किसी निकाय का स्वातन्त्र्य कोटिमान उस निकाय के कणों द्वारा की जा सकने वाली स्वतंत्र गतियों की संख्या होती है।
- ऊर्जा सम विभाजन नियम बताता है कि किसी ताप गतिकीय निकाय की कुल गतिज ऊर्जा समान रूप से इसकी स्वातंत्र्य कोटियों में बंट जाती है। और प्रति स्वतंत्र कोटि के लिए इसका परिमाण $\frac{1}{2}$ k T होता है,
- (i) एक परमाणुक गैस के अणु की कुल ऊर्जा $\frac{3}{2}$ k T,

  (ii) द्विपरमाणुक गैस के अणु की कुल ऊर्जा $\frac{5}{2}$ k T.

  (iii) त्रिपरमाणुक गैस के अणु की ऊर्जा 3 k T.

पाठान्त प्रश्न

1. दो भिन्न-भिन्न आदर्श गैसों की तुलना के लिये क्या हम बॉयल के नियम का उपयोग कर सकते हैं?

2. परम शून्य ताप पर किसी पदार्थ के अणुओं का वेग और गतिज ऊर्जा क्या होगी?

3. यदि किसी गैस के निरपेक्ष ताप को 4 गुना कर दिया जाय तो इसकी गतिज ऊर्जा, वर्ग माध्य मूल वेग व दाब में क्या अंतर आयेगा?

4. हाइड्रोजन (आणविक संहति-2) अणुओं के वेग और आक्सीजन (आणविक संहति-32) के अणुओं के वेग का अनुपात ज्ञात कीजिए जबकि ये गैसे मिश्रण बनाती है और इन दोनों प्रकार के अणुओं की गतिज ऊर्जा समान रहती है।

5. यदि तीन अणुओं का वेग 0.5, 1 और 2 $km\ s^{-1}$ हों तो उनके औसत वेग और माध्य वर्ग वेग (root mean square speed) के अनुपात लिखिये।

6. गैस के अणुओं के वर्ग माध्य मूल वेग (root mean square velocity) का क्या तात्पर्य है? वर्ग माध्य मूल वेग के लिये गैस के दाब और घनत्व को संबंधित करते हुए तथा अणुगति सिद्धान्त की अवधारणाओं का उपयोग करते हुये एक व्यंजक ज्ञात कीजिए।

7. i) नियोन परमाणु की 25 ^0C पर औसत स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा का परिकलन कीजिए।

   ii) किस ताप पर औसत ऊर्जा इस मान की आधी होती है?

8. 50 cm^3 आयतन के पात्र में 1.0 P_a दाब और 27° C पर हाइड्रोजन भरी हई है। गणना कीजिए

   (a) पात्र में गैस के अणुओं की संख्या की।

   (b) उनकी माध्य वर्ग मूल चाल (root mean square speed) की।

   ($R = 8.3\ J\ mol^{-1}\ K^{-1}$, $N = 6 \times 10^{23}\ mol^{-1}$. हाइड्रोजन अणु के 1 मोल का द्रव्यमान $= 20 \times 10^{-3}\ kg\ mol^{-1}$).

9. एक बंद पात्र में हाइड्रोजन भरी है जो 50.0 K ताप पर 20 mm Hg की ऊँचाई के बराबर दाब डालती है।

   a) वह किस ताप पर 180 mm Hg दाब डालेगी।

   b) यदि हाइड्रोजन अणुओं का माध्य वर्ग मूल वेग 10.0 K पर 800 $m\ s^{-1}$ है तो इस नये ताप पर उनका माध्य वर्ग मूल वेग क्या होगा।

10. गैस के अणुगति सिद्धान्त की अवधारणाओं का वर्णन कीजिये।

11. गैस के दाब के लिये व्यंजक प्राप्त कीजिए।

12. गैस के अणुगति सिद्धांत के आधार पर बॉयल तथा चार्ल्स के नियम की व्युत्पति कीजिए।

13. गैस के अणुगति सिद्धान्त के आधार पर ताप की व्याख्या कीजिए।

14. आवोगाद्रो नियम क्या है? गैस के अणुगति सिद्धान्त से इसे कैसे व्युत्पन्न किया जा सकता है?

15. $0°$ C और $100°$ C पर हाइड्रोजन के अणुओं के माध्य वर्ग मूल वेग की गणना कीजिए।

    (0^0C और 760 mm Hg पर हाइड्रोजन का घनत्व = 0.09 kg m^{-3}) है।

16. यदि प्रति घनमीटर अणुओं की संख्या 8.10×10^{24} और अणुओं की माध्य वर्ग चाल 1.90×10 m s^{-1} है तो हाइड्रोजन गैस द्वारा उत्पन्न दाब की (आवोगाद्रो संख्या 6.02×10^{23} प्रति ग्राम मोल और हाइड्रोजन का आणविक भार 2.02 है) गणना कीजिए।

17. नियम दाब पर गैस की विशिष्ट ऊष्मा की परिभाषा कीजिए c_p और c_V ये संबंध भी स्थापित कीजिए।

18. नियत आयतन पर गैस की विशिष्ट ऊष्मा की परिभाषा कीजिए। सिद्ध कीजिए कि त्रिपरमाणुक गैस के लिये $c_V = 3R$ होता है।

19. आर्गन के लिये c_P और c_V की गणना कीजिए $R = 8.3$ J mol^{-1} K^{-1}.

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

10.1

1. (i) क्योंकि गैस के अणुओं के बीच ससंजन बल, द्रव के अणुओं के बीच के ससंजन बल की तुलना में बहुत कम होता है।

   (ii) क्योंकि ठोस के अणु अत्यंत पास-पास होते हैं, अणुओं के बीच में अधिक मजबूत बंध-क्रमबद्ध रचना प्रदान करते हैं।

2. जो गैस अणुगति सिद्धान्त का अनुगमन करती है आदर्श गैस कहलाती है।

3. $P = \dfrac{1}{3}\rho \overline{c^2}$

4. किसी पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा, उस पदार्थ के इकाई द्रव्यमान का ताप $1°$C (अथवा 1 K) बढ़ाने हेतु आवश्यक ऊष्मा की मात्रा है।

5. किसी पदार्थ का आयतन प्रसार गुणांक, उस पदार्थ के एकांक आयतन का तापमान $1°$C (अथवा 1 K) बढ़ाने पर आयतन में वृद्धि होती है।

6. $0.00005°C^{-1}$

10.2

1. औसत चाल $\bar{c}$

   $$= \frac{500+600+700+800+900}{5} = 700 \text{ m s}^{-1}$$

$\overline{c}^2$ का औसत मान

$$= \frac{500^2 + 600^2 + 700^2 + 800^2 + 900^2}{5}$$

$= 510{,}000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$

$c_{rms} = \sqrt{\overline{c^2}} = \sqrt{510{,}000} = 714 \text{ m s}^{-1}$

c_{rms} और $\overline{c}$ समान नहीं है।

2. मिश्रण का कुल दाब प्रथम व द्वितीय गैस के आंशिक दाबों के योग के बराबर होता है। अर्थात् $P = P_1 + P_2$

3. बॉयल का नियम प्रयोग नहीं किया जा सकता है।

10.3

1. प्रत्येक स्वातंत्र्य कोटि के लिये ऊर्जा $= \frac{1}{2}\text{k T}$

   $\therefore$ नाइट्रोजन के अणु की 5 स्वातंत्र्य कोटि के लिये कुल ऊर्जा $= \frac{5}{2}\text{k T}$.

2. c_V द्विपरमाणुक अणु के लिये $= \frac{5}{2}$ R

   $c_V = \frac{5}{2} \times 8.3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 20.75 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

   $c_p = c_V + R = 29.05 \text{ J mol}^{-1} \text{ C}^{-1}$.

पाठान्त प्रश्नों के उत्तर

2. शून्य
3. चार गुना हो जाता हे, दो गुना हो जाता है, चार गुना हो जाता है।
4. 4 : 1
5. 2
7. $6.18 \times 10^{-21} \text{ m s}^{-1}$, – 124 ºC
8. 12×10^{20}, $7.9 \times 10^{11} \text{ m s}^{-1}$
9. 2634ºC, 2560 m s^{-1}
15. 1800 m s^{-1}, 2088 m s^{-1}
16. $3.97 \times 10^3 \text{ N m}^{-2}$
17. $12.45 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $20.75 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

11

ऊष्मागतिकी

आप अपने दैनिक जीवन में गर्मी व ठंडक के संवेदनों से परिचित हैं। जब आप अपने हाथों को आपस में रगड़ते हैं तो गरमाहट अनुभव करते हैं। आप इस बात को मानेंगे कि इस घटना में गरमाहट का कारण यांत्रिक कार्य है। यह दर्शाता है कि यांत्रिक कार्य व तापीय प्रभाव में कुछ संबंध है। विभिन्न तापमानों पर वस्तुओं के बीच ऊष्मीय (तापीय) ऊर्जा का स्थानान्तरण ऊष्मागतिकी की विषय वस्तु है जो कि अनुभवों पर आधारित घटनाओं का विज्ञान है। तापीय घटना के मात्रात्मक वर्णन के लिये ताप, ऊष्मा और आंतरिक ऊर्जा को परिभाषित करना आवश्यक है। ऊष्मागतिकी के नियम किसी निकाय में ऊष्मा प्रवाह, किए गए कार्य और आंतरिक ऊर्जा के बीच संबंध बताते हैं।

इस पाठ में आप ऊष्मागतिकी के तीन नियमों–शून्य कोटि नियम, ऊष्मागतिकी के प्रथम व द्वितीय नियमों के बारे में ज्ञान प्राप्त करेंगे। ये नियम अनुभव पर आधारित हैं ओर इन्हें किसी प्रमाण की आवश्यकता नहीं है। ऊष्मा गतिकी के शून्य कोटि नियम, प्रथम एवं द्वितीय नियम क्रमशः ताप, आंतरिक ऊर्जा व एन्ट्रॉपी की संकल्पनाओं को प्रस्तुत करते हैं। प्रथम नियम वस्तुतः एक ऊष्मागतिक निकाय के लिए ऊर्जा संरक्षण का सिद्धान्त है। दूसरा नियम कार्य व ऊष्मा के पारस्परिक रूपान्तरण से संबंधित है। आप यह भी जानेंगे कि ऊष्मा ऊर्जा को कार्य में परिणित करने में कार्नो इंजन की दक्षता सर्वाधिक होती है।

उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के बाद आप

- विभिन्न ऊष्मागतिक प्रक्रियाओं के लिये सूचक आरेख खींच सकेंगे और यह दर्शा पाएंगे कि सूचक आरेख के अन्तर्गत क्षेत्रफल कार्य को दर्शाता है;
- ऊष्मागतिक साम्य की व्याख्या कर पायेंगे और ऊष्मागतिकी के शून्य कोटि के नियम का कथन कर पाएगें;
- किसी तंत्र की आंतरिक ऊर्जा की व्याख्या कर पाएंगे और ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम का कथन कर पाएंगे;

- सरल निकायों (तंत्रों) में ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम का उपयोग कर पाएँगे और इसके सीमाबंधनों का कथन कर पाएंगे;
- त्रिक बिंदु को परिभाषित कर सकेंगे; तथा
- कार्नो चक्र का वर्णन कर सकेंगे तथा इसकी दक्षता के लिये व्यंजक प्राप्त कर पाएंगे।

11.1 ऊष्मा तथा ताप की संकल्पना

11.1.1 ऊष्मा

गुफा मानव के समय से लेकर आज तक सभी मानवीय गतिविधियों में ऊर्जा व्याप्त रही है। ऊर्जा का ऊष्मा के रूप में आविर्भाव हमारे अस्तित्व के लिये अति आवश्यक है। खाने-पकाने में प्रयुक्त ऊर्जा, घरों को रोशन करने वाली प्रकाश ऊर्जा, रेलगाड़ियों व वायुयानों को चलानी वाली ऊर्जा का उद्‌गम लकड़ी, कोयला, गैस या तेल जलाने पर मुक्त हुई ऊष्मा ऊर्जा है। आप यह पूछेंगे कि ऊष्मा क्या है? इस प्रश्न का उत्तर पाने के लिये हम इस बात पर विचार करते हैं कि जब हम एक साइकिल के पहिये में हवा भरते हैं तो क्या होता है? यदि आप नोजल को छुवें तो आप पायेंगे कि पम्प गरम हो गया है, इसी प्रकार जब आप हाथों को आपस में रगड़ते हैं तो आपको गरमाहट महसूस होती है। आप इस बात से सहमत होंगे कि यह गर्मी पम्प या हाथ के नीचे लौ या किसी और गरम वस्तु के रखने से नहीं हुयी है। यह गर्मी किये गये यांत्रिक कार्य से उत्पन्न हुई है। एक पंप में गैस को संपीडित करने के लिये तथा हाथ को घर्षण के विरुद्ध गति करने में कार्य करना पड़ता है। ये उदाहरण वास्तव में, यांत्रिक कार्य व तापीय प्रभावों के बीच एक संबंध की ओर संकेत करते है।

अनुभव के आधार पर हम जानते हैं कि बर्फ के बराबर ठंडे पानी को गर्मी में खुला छोड़ने पर वह अन्ततः गरम हो जाता है लेकिन गर्म कॉफी का प्याला ठंडा हो जाता है। इसका आशय यह है कि पानी या कॉफी व इसके वातावरण के बीच ऊर्जा का आदान-प्रदान हुआ है। यह ऊर्जा स्थानान्तरण तब तक होता है जब तक कि तापीय साम्य स्थापित नहीं हो जाता अर्थात् निकाय व इसके चारों ओर का वातावरण समान ताप पर नहीं आ जाते। यह इस बात को भी दर्शाता है कि ऊर्जा सदैव उच्च तापमान की वस्तु से निम्न तापमान की वस्तु की ओर संचरित होती है। अब आप पूछ सकते हैं कि ऊर्जा किस रूप में स्थानान्तरित हो रही है। ऊपर दिये गये उदाहरणों में ऊर्जा ऊष्मा के रूप में स्थानान्तरित हो रही है, अतः हम यह कह सकते हैं कि–*ऊष्मा वह ऊर्जा है जो दो या अधिक निकायों या एक निकाय और इसके वातावरण के बीच तापान्तर के कारण स्थानांतरित होती है।*

अब आप पूछ सकते हैं कि इस प्रकार की ऊर्जा की प्रकृति क्या है? इसका उत्तर जूल ने यांत्रिक कार्य और ऊष्मा की तुल्यता पर अपने कार्य द्वारा किया। किसी निकाय अणुओं की यांत्रिक ऊर्जा ऊष्मा से संबंधित होती है।

ऊष्मा का मात्रक कैलॉरी है। एक कैलॉरी को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है। एक ग्राम जल का ताप 14.5^oC से 15.5^oC तक बढ़ाने के लिये आवश्यक ऊष्मा-ऊर्जा की मात्रा को कैलोरी कहते हैं।

टिप्पणियाँ

किलो कैलॉरी (k cal) ऊष्मा ऊर्जा का अपेक्षाकृत बड़ा मात्रक है।

$$1\,\text{kcal} = 10^3\,\text{cal.}$$

और

$$1\,\text{cal} = 4.18\,\text{J}$$

11.1.2 ताप की संकल्पना

ऊष्मा की प्रकृति का अध्ययन करने में आपने सीखा कि एक ठंडे पानी के गिलास व इसके वातावरण के बीच ऊर्जा का आदान-प्रदान तब तक चलता रहता है जब तक कि तापीय साम्य स्थापित नहीं हो जाता है। एक तापीय साम्य में सभी वस्तुओं का एक सर्वनिष्ठ गुण होता है जिसे **ताप** कहते हैं, जिसका मान उन सभी वस्तुओं के लिये समान होता है। अत: हम यह कह सकते हैं कि *ताप किसी वस्तु का वह गुण है जो कि इस बात का निर्धारण करता है कि यह दूसरी वस्तुओं के साथ तापीय साम्य में है अथवा नहीं।*

11.1.3. ऊष्मागतिक शब्दावली

(i) ऊष्मागतिकी निकाय : ऊष्मा गतिक निकाय का तात्पर्य एक निश्चित मात्रा में द्रव्य से है जो कि अद्वितीय (unique) है और उन सभी चीजों से विलगित है जो कि इसे प्रभावित कर सकते हैं। प्रत्येक निकाय एक स्वच्छंद पृष्ठ से परिबद्ध है जो कि इसकी परिसीमा कहलाती है। यह परिसीमा किसी ठोस, द्रव या गैस को परिबद्ध कर सकती है। यह वास्तविक या काल्पनिक हो सकती है, विराम या गति की अवस्था में हो सकती है और अपना आकार व साइज बदल सकती है। किसी निकाय की परिसीमा से बाहर का क्षेत्र उसके वातावरण का निर्माण करता है।

(a) विवृत्त निकाय (Open System) : यह निकाय अपने वातावरण के साथ द्रव्यमान एवं ऊर्जा का आदान-प्रदान कर सकता है। पानी गर्म करने का हीटर एक विवृत्त निकाय है।

(b) संवृत्त निकाय (Closed system) : यह अपने वातावरण के साथ ऊर्जा का विनिमय कर सकता है, लेकिन द्रव्यमान का नहीं। एक पिस्टन लगे सिलिण्डर में परिबद्ध गैस एक संवृत्त निकाय है।

(c) विलगित निकाय (Isolated system) : यह अपने वातावरण से ऊर्जा या द्रव्यमान का किसी भी प्रकार का विनियम नहीं कर सकता, एक भरा हुआ थर्मस फ्लास्क इसका एक अच्छा उदाहरण है।

(ii) ऊष्मागतिक-चर या निर्देशांक : माड्यूल 1 में हमने एक वस्तु या निकाय की गति का उसके द्रव्यमान, स्थिति व वेग के पदों में अध्ययन किया। ऊष्मागतिक निकाय का वर्णन करने के लिये हम इसके भौतिक गुणों जैसे तापमान (T), दाब (P) व आयतन (V) को लेते हैं। इन्हें ऊष्मागतिक चर कहा जाता है।

(iii) सूचक आरेख : आप पाठ-2 में विस्थापन-समय और वेग-समय ग्राफों के बारे में पढ़ चुके हैं। एक ऊष्मागतिक निकाय का अध्ययन करने के लिये हम एक दाब-आयतन

ग्राफ का उपयोग करते हैं। यह ग्राफ यह दर्शाता है कि ऊष्मागतिक प्रक्रम के दौरान किसी निकाय का दाब (P) अपने आयतन (V) के साथ किस प्रकार परिवर्तित होता है। इसे सूचक आरेख कहते हैं।

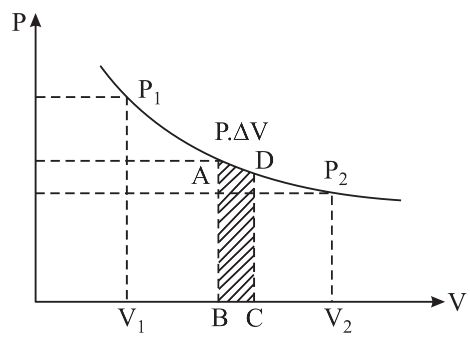
सूचक आरेख का उपयोग किये गये कार्य के लिये एक व्यंजक प्राप्त करने में किया जा सकता है। यह PV ग्राफ (चित्र 11.1) के अंतर्गत क्षेत्र के बराबर है। मान लीजिये कि एक अत्यंत लघु प्रसार ΔV के लिये दाब का प्रारंभिक मान P है। अतः निकाय द्वारा किया गया कार्य

$$\Delta W = P\,\Delta V \qquad (11.1)$$

= छायामय पट्टी का क्षेत्रफल ABCD

अब निकाय द्वारा V_1 से V_2 तक प्रसार में किया गया कार्य = $P_1P_2V_2V_1P_1$ का क्षेत्रफल। ध्यान दीजिए कि यह क्षेत्रफल सूचक आरेख की आकृति पर निर्भर करता है।

सूचक आरेख का प्रसार या संपीडन की प्रक्रियाओं में किये गये कार्य की गणना करने के लिए व्यापक रूप से उपयोग किया जाता है। यह उन प्रक्रियाओं में अधिक उपयोगी पाया जाता है जहां P व V के बीच संबंध अज्ञात है। किसी निकाय पर किया गया कार्य उसकी ऊर्जा को बढ़ाता है और निकाय द्वारा किया गया कार्य इसकी ऊर्जा को घटाता है। इसका कारण वस्तु पर किया गया कार्य ऋणात्मक लिया जाता है। आपको यह ध्यान रखना चाहिये कि एक समताप-वक्र (समान ताप पर P-V ग्राफ) के अंतर्गत क्षेत्रफल इसकी आकृति पर निर्भर करता है। हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि एक निकाय द्वारा या उस पर किया गया कार्य उसके पथ पर निर्भर करता है। अर्थात् किया गया कार्य प्रारंभिक व अंतिम अवस्था पर निर्भर नहीं करता है।



चित्र 11.1: सूचक आरेख

11.2 ऊष्मागतिक साम्य

कल्पना कीजिए कि एक पात्र में 60° C पर एक द्रव (पानी, चाय, दूध, कॉफी) भरा है। इसे खुला छोड़ दिया जाता है। यह सामान्य अनुभव की बात है कि कुछ समय पश्चात् पात्र में रखे द्रव का ताप कमरे के ताप के बराबर हो जाता है। हम कह सकते हैं कि पानी ने अपने वातावरण के साथ तापीय साम्य स्थापित कर लिया है।

यदि किसी निकाय के अन्दर दाब या प्रत्यास्थ प्रतिबल में कुछ परिवर्तन उत्पन्न होते हैं तो इससे उसके भागों में कुछ बदलाव हो सकते हैं, तथापि ये परिवर्तन अंततोगत्वा रूक जाते हैं और तंत्र पर कोई असंतुलित बल कार्य नहीं करता है, तब हम कहते हैं कि यह यांत्रिक साम्य की स्थिति में है। क्या आप जानते हैं कि एक पिघली अवस्था से ठोस अवस्था में आने की प्रक्रिया में यांत्रिक संतुलन प्राप्त करने के लिये पृथ्वी भूमध्य रेखा के पास उभर गई। यदि किसी निकाय के अवयव रासायनिक क्रिया करने वाले हों तो कुछ समय पश्चात् सभी

टिप्पणियाँ

रासायनिक प्रतिक्रियायें रूक जायेंगी। तब यह निकाय रासायनिक साम्यावस्था में कहलायेगा। एक निकाय जो तापीय, यांत्रिक व रासायनिक साम्य को दर्शाता है उसे ऊष्मागतिक साम्यावस्था में कहा जाता है। इस अवस्था में निकाय के स्थूल गुण समय के साथ परिवर्तित नहीं होते हैं।

11.2.1 ऊष्मागतिक प्रक्रम

एक साम्य अवस्था से दूसरी साम्यवस्था में जाने पर यदि ऊष्मागतिक निकाय का कोई भी चर बदलता है तो निकाय को ऊष्मागतिक प्रक्रिया में कहा जाता है। उदाहरण के लिये स्थिर दाब पर एक सिलिण्डर की गैस को गरम किये जाने पर प्रसार होना एक ऊष्मागतिक प्रक्रम है। किसी ऊष्मागतिक प्रक्रम का ग्राफीय निरूपण एक **पथ** कहलाता हैं।

अब हम विभिन्न प्रकार के ऊष्मागतिक प्रक्रमों के बारे में विचार करेंगे।

(i) **उत्क्रमणीय प्रक्रम :** यदि कोई प्रक्रम ऐसे है जिसमें प्रारंभिक व अंतिम अवस्था के बीच की सभी अवस्थायें साम्यावस्था में हों तथा प्रक्रम का विपरीत दिशा में वापस प्रारंभिक अवस्था में जा पाना संभव हो तो इसे उत्क्रमणीय प्रक्रम कहते हैं। एक उत्क्रमणीय प्रक्रम की गति बहुत धीमी व नियंत्रित होती है। निम्नलिखित उदाहरण देखें–

- एक बीकर में एक बर्फ का टुकड़ा लें और इसे गरम करें। आप देखेंगे कि यह पानी में परिवर्तित हो जाता है। यदि आप इसे रेफ्रीजिरेटर में रखकर समान मात्रा में ऊष्मा बाहर निकाल लें तो यह बर्फ में परिवर्तित हो जाता है अर्थात् प्रारंभिक अवस्था में वापस आ जाता है, अत: यह एक उत्क्रमणीय प्रक्रम है।
- मान लो कोई स्प्रिंग है जिसका एक सिरा स्थिर किया गया है। इसके मुक्त सिरे पर एक के बाद एक द्रव्यमान लटकायें। आप पायेंगे कि स्प्रिंग की लंबाई बढ़ जाती है। अब एक-एक करके द्रव्यमानों को हटाइये। आप देखेंगे कि स्प्रिंग अपनी पूर्वावस्था में आ जाता है। अत: यह एक उत्क्रमणीय प्रक्रम है। उत्क्रमणीय प्रक्रम एक आदर्श स्थिति है जो कभी भी वास्तविकता नहीं बन सकती।

(ii) **अनुत्क्रमणीय प्रक्रम :** वह प्रक्रम जो अपनी अंतिम अवस्था से प्रारंभिक अवस्था में उसी साम्य अवस्था के साथ-साथ वापिस नहीं लौट सकता अनुत्क्रमणीय प्रक्रम कहलाता है। सभी प्राकृतिक प्रक्रम अनुत्क्रमणीय है। उदाहरण के लिये घर्षण में उत्पन्न ऊष्मा, पानी में घुली चीनी, हवा से लोहे में जंग लगना। अर्थात् अनुत्क्रमणीय प्रक्रम के लिये, बीच की स्थितियां साम्य स्थितियां नहीं हैं, अत: इस प्रकार के प्रक्रम को एक पथ द्वारा निरूपित नहीं किया जा सकता है। क्या इसका यह अर्थ हुआ कि हम एक अनुत्क्रमणीय प्रक्रम विश्लेषण नहीं कर सकते हैं? ऐसा करने के लिए हम स्थिर प्राय: प्रक्रम (quasistatic process) का प्रयोग करते हैं जो कि साम्यावस्था के अत्यंत समीप है।

(iii) **समतापी प्रक्रम :** एक ऊष्मागतिक प्रक्रम जो एक नियत ताप पर होता है समतापी प्रक्रम कहलाता है।, एक पूर्णरूप से चालक दीवारों वाले सिलिण्डर में आदर्श गैस का प्रसार या संपीडन समतापी प्रक्रम प्रक्रियायें है। दाब व आयतन में परिवर्तन बहुत धीरे होता है ताकि कोई भी ऊष्मा उत्पन्न होने पर वातावरण में स्थानान्तरित हो जाती है और निकाय

का ताप नियत रहता है। तापीय साम्य हमेशा बना रहता है। इस प्रक्रम में ΔQ, ΔU और ΔW नियत रहते हैं।

(iv) रूद्धोष्म प्रक्रम : एक प्रक्रम जिसमें ऊष्मीय ऊर्जा का कोई आदान–प्रदान नहीं होता, रूद्धोष्म प्रक्रम कहलाता है, उदाहरण के तौर पर एक पूर्णत: ऊष्मारोधी सिलिन्डर में आदर्श गैस का प्रसार या संपीडन। यह निकाय अपने वातावरण से पृथक्कृत है अत: कोई ऊष्मा न तो इसमें प्रवेश करती है और न ही इससे बाहर जाती है। अत: इस प्रक्रम में $\Delta Q = 0$ और $\Delta U = -\Delta W$.

निकाय की आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन उस पर किये गये कार्य के बराबर होती है। अत: जब गैस को संपीडित किया जाता है तो निकाय पर कार्य किया जाता है, अत: ΔU धनात्मक हो जाता है और निकाय की आंतरिक ऊर्जा बढ़ जाती है। जब गैस का प्रसार होता है तो निकाय द्वारा कार्य किया जाता है। इसे धनात्मक लिया जाता है और ΔU ऋणात्मक होता है। अत: निकाय की आंतरिक ऊर्जा घटती है।

(v) समदाबी प्रक्रम : स्थिर दाब पर होने वाला ऊष्मागतिक प्रक्रम समदाबी प्रक्रम कहलाता है। वायुमण्डलीय दाब पर पानी का गरम होना एक समदाबी प्रक्रम है।

(vi) समआयतनी प्रक्रम : एक ऊष्मागतिक प्रक्रम जिसमें निकाय का आयतन स्थिर रखा जाता है, समआयतनी प्रक्रम कहलाता है। उदाहरण के तौर पर एक स्थिर आयतन के सिलिन्डर के अन्दर गैस का गरम किया जाना एक समआयतनी प्रक्रम है, इस प्रक्रम में गैस का आयतन स्थिर रखा जाता है अत: कोई कार्य नहीं किया जाता है। अत: $\Delta W = 0$. और हम पाते हैं $\Delta Q = \Delta U$.

एक **चक्रीय प्रक्रम** में निकाय अपनी प्रारंभिक स्थिति में वापस आता है। अर्थात् आंतरिक ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं होता $\Delta U = 0$.

अर्थात् $\Delta Q = \Delta W$.

11.2.2 ऊष्मागतिकी का शून्यकोटि का नियम

माना धातु के तीन गुटके A, B, C हैं। गुटका A गुटके B के साथ तापीय साम्य में है और गुटका A गुटके C के साथ भी साम्य में है। इसका आशय यह है कि गुटके A का ताप गुटकों B एवं C के ताप के समान है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि गुटकों B एवं C के ताप समान है। हम इस परिमाण को शून्य कोटि के नियम के रूप में संक्षेप में इस प्रकार व्यक्त करते हैं।

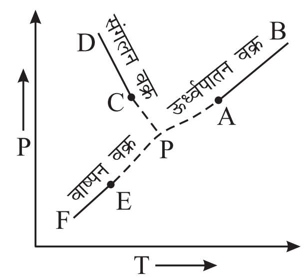
यदि दो पिंड या निकाय A एवं B एक तीसरे पिंड या निकाय C के साथ अलग–अलग तापीय साम्यावस्था में हों तो वे परस्पर भी तापीय साम्य अवस्था में होंगे।

टिप्पणियाँ

अवस्था परिवर्तन एवं प्रावस्था ग्राफ

आप पढ़ चुके हैं कि मानव ताप व दाब पर किसी वस्तु की तीन अवस्थायें होती हैं, ठोस, द्रव और गैस। एक द्रव्य की विभिन्न अवस्थायें उसकी प्रावस्था कहलाती है–उदाहरण के तौर पर बर्फ (ठोस), पानी (द्रव) व भाप (गैस) पानी की तीन अवस्थायें हैं। हम इन तीन अवस्थाओं का दाब (P), ताप (T) व आयतन (V) दर्शाने वाले ग्राफ की सहायता से विवेचन कर सकते हैं। त्रिविमीय ग्राफ खींचना कठिन है। अत: हम पदार्थ की तीन अवस्थाओं का एक दाब-ताप ग्राफ खींचकर विवेचन कर सकते हैं। इस ग्राफ को प्रावस्था ग्राफ कहते हैं।

चित्र 11.2 को देखिये जो पानी के प्रावस्था ग्राफ को दर्शाता है। आप तीन वक्रों CD, AB, और EF को देख सकते हैं। CD दाब के साथ बर्फ के गलनांक में परिवर्तन को दर्शाता है। इसे **संगलन वक्र** कहते हैं। वक्र ıб पानी के क्वथनांक में दाब के साथ परिवर्तन को दर्शाता है इसे **वाष्पन वक्र** कहते हैं। वक्र EF बर्फ का सीधे वाष्प में परिवर्तन दर्शाता है। इसे **ऊर्ध्वापातन वक्र** कहते हैं। यह **वाष्प-हिम वक्र** भी कहलाता है।



चित्र 11.2: जल का प्रावस्था आरेख

यदि आप AB, CD तथा EF रेखाओं को बढ़ाते हैं जैसा कि चित्र में किन्दुकित रेखाओं द्वारा दर्शाया गया है वे एक बिंदु P पर मिलते हैं। इस बिंदु को **त्रिक बिंदु** (triple point) कहते हैं। इस बिंदु पर तीनों अवस्थाओं का सह अस्तित्व होता है।

जब हम किसी ठोस को गरम करते हैं तो इसका ताप बढ़ता है और एक विशिष्ट ताप पर यह गलने लगता है। इस ताप को ठोस का **गलनांक** कहते हैं। अवस्था परिवर्तन की अवधि में हम लगातार ऊष्मा देते हैं लेकिन ताप में वृद्धि नहीं होती है। एकांक द्रव्यमान के ठोस को पूर्णतया इसकी संगत द्रव अवस्था में परिवर्तित करने वे लिये आवश्यक ऊष्मा को **गलन की गुप्त ऊष्मा** कहते हैं।

एक द्रव को गरम करने पर इसके क्वथनांक तक ताप बढ़ता है। क्वथनांक पर दी गयी ऊष्मा इसे गैसीय अवस्था में परिवर्तन करने में प्रयुक्त होती है। किसी द्रव के एकांक द्रव्यमान को एक नियत ताप पर गैसीय अवस्था में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक ऊष्मा उस द्रव के **वाष्पीकरण की गुप्त ऊष्मा कहलाती** है।

11.2.3 पानी का त्रिक बिन्दु

किसी शुद्ध पदार्थ का त्रिक बिन्दु एक बहुत स्थायी अवस्था होती है जिसे सटीक रूप से नियत ताप व दाब की मात्राओं से अभिव्यक्त किया जाता है। इसी कारण कैल्विन के थर्मामीटर के पैमाने में पानी का त्रिक बिन्दु उच्च नियत बिंदु के रूप में लिया जाता है।

दाब बढ़ाने पर, ठोस का गलनांक कम होता है और द्रव का क्वथनांक बढ़ता है। अत: यह संभव है कि ताप व दाब की मात्राओं को समायोजित करके हम ऐसे बिंदु पर पहुंच सकते हैं जहां पर पदार्थ की तीनों अवस्थाओं का सहअस्तित्व हो, ताप व दाब के ये मान त्रिक बिंदु को दर्शाते हैं।

पाठगत प्रश्न 11.1

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये-

   (i) ऊष्मागतिकी के शून्य कोटि नियम जिस मूल संकल्पना का आधार है वह है.....

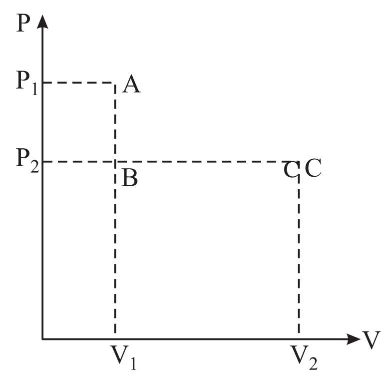
   (ii) यदि एक निकाय A एक निकाय B के साथ तापीय साम्य में है एवं निकाय B एक दूसरे निकाय C के साथ तापीय साम्य में है, तब निकाय A ......के साथ भी तापीय साम्य में होगा।

   (iii) ऊष्मा का सामान्य प्रचलित मात्रक है ......

2. चित्र 11.3 में एक ऊष्मागतिक प्रक्रम का सूचक आरेख दर्शाया गया है। प्रक्रम में तंत्र द्वारा किये गये कार्य की गणना कीजिये।

   (a) A से C तक ABC पथ द्वारा

   (b) यदि C से A तक उसी पथ से वापस आता है तो, उसके द्वारा कुल कितना कार्य किया जाता है?



चित्र. 11.3

3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये–

   (i) एक उत्क्रमणीय क्रिया वह है जिसमें .... अंतिम अवस्था से प्रारंभिक अवस्था में वापस आया जा सकता है।

   (ii) एक .... प्रक्रम वह है जिसमें अंतिम स्थिति से प्रारंभिक स्थिति में उन्हीं साम्य अवस्थाओं से वापस नहीं आया जा सकता है।

4. समतापी व रूद्धोष्म प्रक्रम में मूलभूत अंतर लिखिये।

5. त्रिक बिंदु का अभिलक्षण लिखिये।

टिप्पणियाँ

11.3 किसी निकाय की आंतरिक ऊर्जा

क्या आपने कभी पानी के जमकर बर्फ बनने की प्रक्रिया में युक्त हुई ऊर्जा के बारे में विचार किया है? क्या आप ऐसा नहीं सोचते कि पानी में भी किसी प्रकार की ऊर्जा संग्रहित है। यह ऊष्मा पानी के बर्फ बनने में मुक्त होती है। इस संग्रहीत ऊर्जा को **आंतरिक ऊर्जा** कहते हैं। द्रव्य के अणुगति सिद्धान्त के आधार पर हम आंतरिक ऊर्जा की संकल्पना का विवेचन सभी एकल अवयवों की ऊर्जाओं के योग के रूप में कर सकते हैं। इसमें उनकी यादृच्छिक गति के कारण गतिज ऊर्जा व उनके बीच अन्योन्य क्रियाओं के फलस्वरूप स्थितिज ऊर्जाएं शामिल हैं। अब हम इसका विवेचन करते हैं।

(a) **आंतरिक गतिज ऊर्जा :** जैसा कि आप जानते हैं, अणुगति सिद्धान्त के अनुसार द्रव्य असंख्य अणुओं से मिलकर बनता है। ये अणु निरन्तर तीव्र गति में होते हैं। जिसके फलस्वरूप इनमें गतिज ऊर्जा होती है। अणुओं की कुल गतिज ऊर्जा वस्तु की आंतरिक गतिज ऊर्जा होती है।

(b) **आंतरिक स्थितिज ऊर्जा :** अंतरा-अणुक बलों के कारण उत्पन्न ऊर्जा को आंतरिक स्थितिज ऊर्जा कहते हैं।

किसी धातु की छड़ की आंतरिक ऊर्जा चालन इलैक्ट्रॉनों की गतिज ऊर्जाओं, परमाणुओं की स्थितिज ऊर्जाओं और अपनी साम्य स्थिति के इधर-उधर उनकी कंपन ऊर्जाओं से निर्मित होती है। किसी निकाय की ऊर्जा अणुओं की गति में वृद्धि कर (गतिज ऊर्जा में तापीय ऊर्जा के कारण वृद्धि) बढ़ायी जा सकती है। यह अंतराणुक बलों के विरुद्ध अणुओं को खिसकाकर (यानि इस पर कार्य करके) भी बढ़ाई जा सकती है। आंतरिक ऊर्जा को U से दर्शाया जाता है।

किसी निकाय की आंतरिक ऊर्जा = अणुओं की गतिज ऊर्जा + अणुओं की स्थितिज ऊर्जा

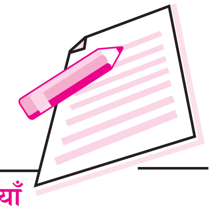
हम एक पृथक्कृत ऊष्मागतिक निकाय के बारे में विचार करते हैं, जिस पर एक बाह्य बल लगा है। मान लिया जाय कि प्रारंभिक अवस्था i से अंतिम अवस्था f तक रूद्धोष्म प्रक्रम से जाने में किया गया कार्य W है। मान लीजिए कि U_i और U_f निकाय की क्रमशः प्रारंभिक व अंतिम स्थिति में आंतरिक ऊर्जायें हैं। क्योंकि निकाय पर कार्य किया जाता है अतः अंतिम अवस्था की आंतरिक ऊर्जा प्रारंभिक अवस्था की आंतरिक ऊर्जा से अधिक होती है।

ऊर्जा संरक्षण के सिद्धान्त के अनुसार

$$U_i - U_f = -W$$

ऋणात्मक चिह्न दर्शाता है कि निकाय पर कार्य किया जाता है।

हम यह इंगित करना चाहते हैं कि कार्य के विपरीत, आंतरिक ऊर्जा प्रारंभिक व अंतिम अवस्थाओं पर निर्भर करती हे, जो कि पथ पर निर्भर नहीं करती है। इसे हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं कि U स्थिति का फलन है और अवस्था चरों (state variables) P.V. T. पर निर्भर करता है। ध्यान दीजिए कि निकाय द्वारा कुछ कार्य किया जाता है तो इसकी आंतरिक ऊर्जा कम होती है।



11.4 ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम

अब आप जानते हैं कि ऊष्मागतिकी का शून्य कोटि का नियम हमें विभिन्न निकायों के बीच तापीय साम्य के बारे में जानकारी देता है जिसका अभिलक्षण उनका ताप समान होना है। तथापि यह नियम *असाम्य अवस्था* के विषय में कोई जानकारी नहीं देता है। हम दो उदाहरणों के बारे में विचार करते हैं (i) दो विभिन्न तापों वाले निकाय तापीय संपर्क में रखे जाते हैं और (ii) दो निकायों के बीच यांत्रिक घर्षण। इन दोनों स्थितियों में उनके तापमानों में परिवर्तन आता है लेकिन शून्यकोटि के नियम द्वारा इसकी व्याख्या नहीं की जा सकती, इन प्रक्रमों की व्याख्या करने के लिये ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम की पूर्वधारणा की गयी।

ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम वस्तुतः एक ऊष्मागतिक निकाय के लिये ऊर्जा संरक्षण का सिद्धान्त है। इसके अनुसार किसी ऊष्मागतिक प्रक्रम में आंतरिक ऊर्जा परिवर्तन उसको दी गयी ऊष्मा व इस पर किये गये कार्य के योग के बराबर होती है।

मान लीजिए कि किसी निकाय को ΔQ मात्रा प्रदान की जाती है। $-\Delta W$ वस्तु पर किया गया कार्य है, तब ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम के अनुसार आंतरिक ऊर्जा में वृद्धि

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W \tag{11.3 a}$$

यह ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम का गणितीय रूप है। यहाँ ΔQ, ΔU और ΔW SI मात्रकों में हैं। ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम को निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं।

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W \tag{11.3 b}$$

ΔQ, ΔU और ΔW के चिह्न निम्न परिपाटी के अनुसार हैं–

1. किसी निकाय द्वारा किया गया कार्य (ΔW) धनात्मक और किसी निकाय पर किया गया कार्य ऋणात्मक लिया जाता है। निकाय के प्रसार में कार्य धनात्मक व संपीडन में ऋणात्मक लिया जाता है। किया गया कार्य प्रारंभिक व अंतिम ऊष्मागतिक अवस्थाओं पर निर्भर नहीं करता यह परिवर्तन के लिये अपनाये गये पथ पर निर्भर करता है।
2. निकाय द्वारा प्राप्त की गयी ऊष्मा धनात्मक तथा उसके द्वारा खोई गयी ऊष्मा ऋणात्मक ली जाती है।
3. आंतरिक ऊर्जा में वृद्धि धनात्मक व ह्रास ऋणात्मक लिया जाता है।

यदि एक निकाय को स्थिति 1 से स्थिति 2 में ले जाया जाता है तो यह पाया जाता है कि ΔQ और ΔW अवस्था परिवर्तन के पथ पर निर्भर करते हैं। तथापि ($\Delta Q - \Delta W$) का मान सभी अवस्था परिवर्तन के पथों के लिये समान रहता है। अतः हम कह सकते हैं कि आंतरिक ऊर्जा ΔU किसी निकाय के ऊष्मागतिकीय परिवर्तन के पथ पर निर्भर नहीं करती।

11.4.1 ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम की सीमाएं

ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम ऊष्मा एवं अन्य प्रकार की ऊर्जा की तुल्यता पर जोर देता है। इस तुल्यता के आधार पर ही हमारी आपकी गतिविधियां संभव है। विद्युत ऊर्जा जिससे हमारे

घरों में प्रकाश होता है, मशीनें काम करती हैं, रेलगाड़ियां चलती है उस ऊष्मा से प्राप्त होती है जो कि जैवाश्म ईंधन या नाभिकीय ईंधन को जलाने से प्राप्त होती है। एक दृष्टि से यह नियम सार्वभौमिक है। यह ऊंचाई बढ़ने के साथ तापमान की गिरावट (रूद्धोष्म ह्रास दर) को समझाता है। प्रवाह प्रक्रमों और रासायनिक क्रियाओं में भी इनके अनुप्रयोग काफी मनोरंजक है। तथापि निम्न प्रक्रमों पर विचार करें।

- आप जानते हैं कि ऊष्मा सदैव गर्म पदार्थ से ठंडे पदार्थ की ओर प्रवाहित होती है लेकिन ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम यह स्पष्टीकरण देने में असमर्थ है कि ऊष्मा अपेक्षाकृत ठंडी वस्तु से गर्म वस्तु की ओर प्रवाहित क्यों नहीं हो सकती है। इसका अर्थ यह हुआ कि इस नियम से ऊष्मा प्रवाह की दिशा के बारे में कोई संकेत नहीं मिलता है।
- आप जानते हैं जब एक गोली लक्ष्य को बेधती है तो गोली की गतिज ऊर्जा ऊष्मा में रूपान्तरित हो जाती है। इस नियम से इस बात का स्पष्टीकरण नहीं होता कि निशाने पर गोली लगने से उत्पन्न ऊष्मा गोली की गतिज ऊर्जा में क्यों रूपान्तरित नहीं हो जाती है ताकि गोली उड़ कर दूर चली जाती। इसका अर्थ यह हुआ कि यह नियम उस परिस्थिति का ज्ञान देनें में असमर्थ है जिसमें ऊष्मा कार्य में रूपान्तरित हो सकती है।

इसके अलावा इसकी एक और स्पष्ट सीमा यह है कि इस नियम से यह ज्ञान नहीं होता कि ऊष्मा किस सीमा तक कार्य में रूपान्तरित हो सकती है, साथ ही इस नियम से यह भी इंगित नहीं होता कि किस सीमा तक ऊष्मा कार्य में रूपान्तरित हो सकती है।

अब आप विराम लें और निम्न प्रश्नों के उत्तर देने का प्रयास करें।

पाठगत प्रश्न 11.2

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

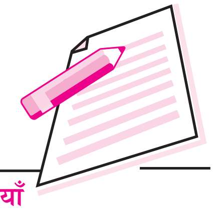
(i) किसी निकाय के कणों की गतिज व स्थितिज ऊर्जाओं का योग इसकी ....है।

(ii) किया गया कार्य = – W यह दर्शाता है निकाय......................... कार्य किया जाता है।

2. ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम का कथन यह है कि

11.5 ऊष्मागतिकी का दूसरा नियम

आप जानते हैं कि ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम में ऊष्मा प्रवाह, व रूपान्तरण की क्षमता (अर्थात् ऊष्मा को कार्य में परिवर्तित करने की क्षमता) के संदर्भ में स्वाभाविक सीमायें हैं। इस प्रकार आपके मस्तिष्क में एक विचार उठ सकता है कि क्या ऊष्मा को कार्य में बदला जा सकता है। रूपान्तरण की क्या शर्ते है? इन सभी प्रश्नों के उत्तर ऊष्मागतिकी के दूसरे नियम की संकल्पना में शामिल है। ऊष्मागतिकी के द्वितीय नियम के अनेक प्रक्कथन (Statements) हैं। तथापि आप ऊष्मागतिकी के दूसरे नियम के केल्विन प्लाँक (Kelvin Plank) तथा कलॉसियस (Classius) के प्रक्कथन के बारे में अध्ययन करेंगे।



केल्विन-प्लाँक प्रक्कथन : यह ऊष्मा इंजनों की क्षमताओं के बारे में अनुभव पर आधारित है। ऊष्मा इंजन के बारे में अगले परिच्छेद में विवेचना की गयी है। एक ऊष्मा इंजन में, कार्यकारी पदार्थ स्रोत (गर्म पदार्थ) से ऊष्मा लेता है और इसके कुछ अंश को कार्य में रूपान्तरित करने के पश्चात ऊष्मा के शेष भाग को सिंक (ठंडी वस्तु या वातावरण) को दे देता है। ऐसा कोई इंजन नहीं है जो सम्पूर्ण ऊष्मा को, बिना सिंक को कुछ ऊष्मा प्रदान किये, कार्य में बदल सकता है। इन प्रेक्षणों के आधार पर केल्विन व प्लाँक ने ऊष्मागतिकी के दूसरे नियम के बारे में यह कथन दिया।

किसी निकाय के लिये नियत ताप पर किसी स्रोत से ऊष्मा अवशोषित करके उसकी संपूर्ण मात्रा को कार्य में रूपान्तरित करना असंभव है।

क्लॉसियस द्वारा दिया गया ऊष्मागतिकी का दूसरा नियम: यह रेफ्रीजरेटर के कार्य पर आधारित है। रेफ्रीजरेटर विपरीत दिशा में कार्य करने वाला ऊष्मा इंजन है। जब इस पर कार्य किया जाता है तो यह अपेक्षाकृत ठंडी वस्तु से अपेक्षाकृत गर्म वस्तु को ऊष्मा हस्तान्तरित कर देता है। यहाँ निकाय पर किये गये बाह्य कार्य की संकल्पना महत्वपूर्ण है। इस बाह्य कार्य को करने के लिये किसी बाह्य स्रोत द्वारा ऊर्जा आपूर्ति आवश्यक हैं इन तथ्यों के आधार पर क्लासियस ने ऊष्मागतिकी के दूसरे नियम के बारे में यह प्रक्कथन दिया।

किसी प्रक्रम में बाह्य कार्य किये बिना अपेक्षाकृत ठंडी वस्तु से ऊष्मा गर्म वस्तु में रूपांतरित करना असंभव है।

अत: ऊष्मागतिकी के दूसरे नियम की भूमिका प्रायोगिक रूप से उपयोगी जैसे ऊष्मा इंजन और रेफ्रीजरेटर में बेजोड़ है।

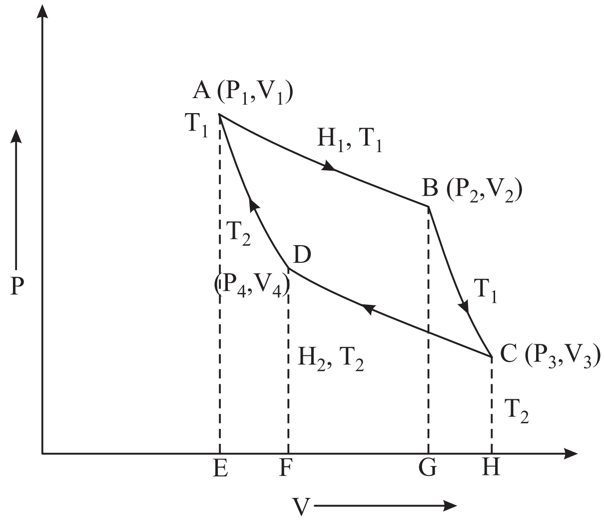
11.5.1 कार्नो चक्र

आपने यह अवलोकन किया होगा कि जब एक ढक्कन वाले बर्तन में पानी उबाला जाता है तो अन्दर पैदा हुई भाप ढक्कन को उछाल देती है। इससे यह संकेत मिलता है कि उच्च दाब की भाप से उपयोगी कार्य किया जा सकता है। **ऐसी युक्ति जो ऊष्मा को अविराम रूप से कार्य में रूपान्तरित करती है ऊष्मा इंजन कहलाती है।** दैनिक जीवन में काम आने वाले आधुनिक इंजन, ऊष्मा इंजन के सिद्धान्त पर आधारित है। इनको तीन श्रेणियों में बांटा जाता है–भाप इंजन, अंतर्दहन इंजन और गैस टरबाइन इंजन।

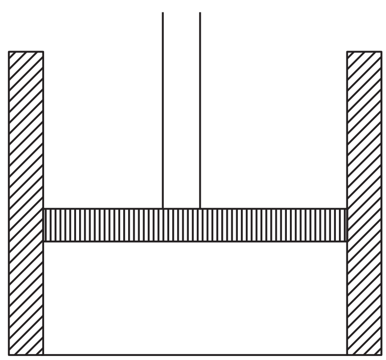
कार्नो चक्रमें कार्यकारी पदार्थ को चार प्रचालनों के चक्र से गुजारा जाता है–(a) समतापी प्रसार (b) रूद्धोष्म प्रसार (c) समतापी संपीडन व (d) रूद्धोष्म संपीडन।

ऐसा चक्र चित्र 11.4 में P-V ग्राफ से निरूपति किया गया है। कार्नो चक्र के चार प्रचालनों को समझाने के लिये मान लीजिये कि कार्यकारी पदार्थ के एक ग्राम मोल (1 g mol) को सिलिंडर में भरा गया है। चित्र 11.5 देखिये। सूचक ग्राफ में पदार्थ की मूल अवस्थाओं को बिन्दु द्वारा दर्शाया गया है। बिन्दु A पर पदार्थ का तापमान T_1, दाब P_1 और आयतन V_1 हैं।

टिप्पणियाँ



चित्र 11.4: कार्नो चक्र का सूचक आरेख



चित्र 11.5: कार्यकारी पदार्थ के साथ सिलिन्डर

(a) **समतापी प्रसार** : सिलिण्डर को स्रोत के साथ तापीय संपर्क में रख दिया जाता है और कार्यकारी पदार्थ का प्रसार होने दिया जाता है। कार्यकारी पदार्थ का आयतन V_2 हो जाता है। इस प्रकार कार्यकारी पदार्थ पिस्टन को उठाने में कार्य करता है। जिससे, कार्यकारी पदार्थ का ताप गिरने लगता है, लेकिन यह स्रोत के साथ ऊष्मीय संपर्क में है इसलिये यह T_1 ताप पर स्रोत से ऊष्मा की H_1 मात्रा अवशोषित करेगा। इसे बिंदु B से दर्शाया गया है। बिंदु B पर दाब व आयतन के मान P_2 और V_2 है। सूचक आरेख (चित्र 11.4) में आप देखते हैं कि A से B में जाने पर तंत्र का ताप समान रहता है और कार्यकारी पदार्थ का प्रसार होता है। हम इसे **समतापी प्रसार प्रक्रम** कहते हैं, H_1 समतापी प्रसार में अवशोषित हुई ऊष्मा है। तब ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम के अनुसार H_1 ताप T पर A से B तक समतापी प्रसार में गैस द्वारा किये गये कार्य के बराबर है। माना W_1 समतापी प्रसार AB में गैस द्वारा किया गया बाह्य कार्य है। तब यह क्षेत्रफल AB, EA के बराबर होगा,

$$W_1 = \text{क्षेत्रफल} ABGEA$$

(b) **रूद्धोष्म प्रसार :** फिर सिलिन्डर को स्रोत से हटाकर एक पूर्ण ऊष्मारोधी स्टेण्ड पर रखा जाता है। पिस्टन पर भार को P_3 तक कम किया जाता है। यह प्रसार पूर्णतया रूद्धोष्म है क्योंकि कोई ऊष्मा न तो कार्यकारी पदार्थ तक पहुंच सकती है और न ही इससे अलग हो सकती है। अत: पिस्टन उठाने में कार्यकारी पदार्थ अपनी आंतरिक ऊर्जा खर्च करके बाह्य कार्य करता है। अत: इसका ताप गिर जाता है। गैस का ताप T_2 (सिंक का ताप) तक गिरने तक रूद्धोष्म रूप से प्रसार करने दिया जाता है इसे सूचक ग्राफ में रूद्धोष्म वक्र BC से दर्शाया गया हैं। हम इसे **रूद्धोष्म प्रसार** कहते हैं। C पर कार्यकारी पदार्थ का दाब व आयतन क्रमश: P_3 व V_3 हैं। B से C तक जाने में कार्यकारी पदार्थ द्वारा किया गया कार्य

$$W_2 = \text{BCHGB क्षेत्रफल}$$

(c) **समतापी संपीडन :** सिलिन्डर को ऊष्मारोधी स्टैण्ड से हटाकर इसे T_2 ताप के सिंक पर रखें। गैस को धीरे से संपीडित करने के लिये पिस्टन के ऊपर भार रखकर (दाब लगाकर) दाब व आयतन के मान क्रमश: P_4 व V_4 होने तक जारी रखें। इसे सूचक आरेख में D बिंदु से निरूपित किया गया है (चित्र 11.4)। संपीडन से बढ़ी ऊष्मा H_2 सिंक को दे दी जायेगी। इस प्रकार तंत्र के ताप में कोई अन्तर नहीं आता। अत: इसे **समतापी संपीडन प्रक्रम** कहते हैं। इसे (चित्र 11.4) में CD वक्र द्वारा दर्शाया गया है।

$$W_3 = \text{CHFDC क्षेत्रफल}$$

(d) **रूद्धोष्म संपीडन :** एक बार फिर से निकाय को (सिलिन्डर को) ऊष्मारोधी स्टैंड पर रखिए और पिस्टन पर धीरे-धीरे भार बढ़ाइए। पदार्थ का रूद्धोष्म संपीडन होता है। यह संपीडन ताप T_1 होने तक बढ़ने दिया जाता हैं और पदार्थ अपने प्रारंभिक दाब व आयतन के मान P_1 व V_1 प्राप्त कर लेता है। यह एक रूद्धोष्म संपीडन प्रक्रम है– जिसे वक्र DA द्वारा सूचक ग्राफ (चित्र 11.4) में दर्शाया गया है। माना D से A तक रूद्धोष्म प्रक्रम में W_4 कार्य किया जाता है। तब

$$W_4 = \text{Area DFEAD}$$

प्रचालन चक्र के दौरान कार्यकारी पदार्थ स्रोत से H_1 मात्रा में ऊष्मा लेता है–और सिंक को H_2 मात्रा देता है। अत: कार्यकारी पदार्थ द्वारा अवशोषित नेट ऊष्मा का मान

$$\Delta H = H_1 - H_2$$

और इंजन द्वारा एक चक्र में किया गया नेट कार्य (मान W) है।

जहां
$$W = \text{क्षेत्र ABCHEA} - \text{क्षेत्र CHEADC}$$
$$= \text{क्षेत्र ABCD}$$

या ABCD का क्षेत्रफल

अत: एक चक्र में किया गया कार्य P-v आरेख के क्षेत्रफल के बराबर होता है।

आप यह पढ़ चुके हैं कि चक्रीय प्रक्रम में पदार्थ की प्रारंभिक व अंतिम स्थितियां समान हैं। अर्थात् इसकी आंतरिक ऊर्जा अपरिवर्तित रहती है। अत: ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम के अनुसार

$$W = H_1 - H_2$$

अत: ऊष्मा कार्य में परिवर्तित हो गयी है और चक्र की पुनरावृत्ति करके कितनी ही मात्रा में कार्य किया जा सकता है।

11.7.2 कार्नो इंजन की दक्षता

कार्नो इंजन की दक्षता की परिभाषा, ''यह एक चक्र में कार्य में रूपान्तरित ऊष्मा तथा कार्यकारी पदार्थ द्वारा स्रोत से ली गयी ऊष्मा का अनुपात है,

$$\eta = \frac{\text{ऊष्मा का कार्य में रूपान्तरण}}{\text{स्रोत से ली गयी ऊष्मा}}$$

अथवा
$$\eta = \frac{H_1 - H_2}{H_1} = 1 - \frac{H_2}{H_1}$$

कार्नो इंजन के लिए यह दिखाया जा सकता है कि,

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

अत:
$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

लेकिन $H_2 = 0$ के लिये $T_2 = 0$ होना चाहिये। इसका आशय यह हुआ कि η 100% तभी होगी जब $T_2 = 0$ होगा। ऐसी स्थिति में गर्म स्रोत से ली गयी पूरी ऊष्मा कार्य में बदल जाती है। यह ऊष्मागतिकी के दूसरे नियम की अवहेलना होगी। अत: एक भाप इंजन निश्चित ताप सीमाओं के बीच ही कार्य कर सकता है और इसकी क्षमता 1 से कम होगी।

यह तर्क भी दिया जा सकता है कि कार्नो चक्र क्योंकि एक उत्क्रमणीय चक्र है। अत: कोई भी इंजन समान तापान्तर के बीच कार्य करने वाले कार्नो इंजन से अधिक क्षमता का नहीं हो सकता है।

11.7.3 कार्नो चक्र की सीमाएं

आपने कार्नोचक्र का अध्ययन समतापी व रूद्धोष्म प्रक्रमों के संदर्भ में किया है। यहां इस बात पर ध्यान देना आवश्यक है कि समतापी प्रक्रम केवल तभी होता है जब पिस्टन अत्यधिक धीरे-धीरे चले। तात्पर्य यह है कि कार्यकारी पदार्थ से स्रोत तक ऊष्मा के स्थानान्तरण के लिए पर्याप्त समय हो तथा दूसरी ओर रूद्धोष्म प्रक्रम में ऊष्मा स्थानान्तरण से बचने के लिए पिस्टन अत्यधिक तीव्र गति से चलता है। व्यवहार में इन दोनों ही महत्वपूर्ण शर्तों को पूरा करना असंभव है। इन्हीं कारणों से सभी व्यावहारिक इंजनों की दक्षता कार्नो इंजन से कम होती है।

पाठगत प्रश्न 11.3

1. निम्न कथन सत्य हैं या असत्य

   (i) एक कार्नो इंजन में जब एक आदर्श गैस द्वारा गर्म ऊष्मा ली जाती है तब स्रोत का ताप गिर जाता है।

   (ii) कार्नो इंजन में यदि सिंक का ताप कम हो जाता है तो इंजन की दक्षता भी कम हो जाती है।

2. एक कार्नो इंजन की 100 K और 500 K के बीच तथा T और 100 K के बीच दक्षता समान है। बतलाइये T का मान क्या होगा?

3. कार्नो इंजन के लिये एक प्रारूपी (typical) आरेख बनाइये और इस आरेख में वह क्षेत्र दर्शाइए जो

   (i) स्रोत से ली गयी ऊष्मा को दर्शाता है (ii) सिंक को दी गई ऊष्मा को दिखाता है। (iii) कार्य में रूपान्तरित ऊष्मा को दर्शाता है।

आपने क्या सीखा

- ऊष्मा ऊर्जा का एक रूप है जो हमें गर्मी की अनुभूति कराता है।
- उच्चतर ताप पर वस्तु से निम्नतर ताप पर वस्तु के बीच तापान्तर के कारण जो ऊर्जा प्रवाहित होती है उसे ऊष्मा कहते हैं।
- ऊष्मा ऊर्जा का सामान्य प्रचलित मात्रक कैलॉरी है। 1 cal = 4.18 J और 1k cal = 10^3 cal
- ऊष्मागतिक प्रक्रम का ऐसा ग्राफ जो यह दर्शाता है कि किसी निकाय का दाब अपने आयतन के साथ किस प्रकार परिवर्तित होता है, सूचक ग्राफ कहलाता है।
- एक गैस के प्रसार या संपीडन में किया गया कार्य $P\Delta V = P(V_f - V_i)$।
- ऊष्मागतिकी के शून्य कोटि के नियम के अनुसार, "यदि दो निकाय किसी तीसरे निकाय के साथ अलग-अलग तापीय साम्य में हों तो उन दोनों निकायों के बीच भी तापीय साम्य होना चाहिए।
- किसी वस्तु के अणुओं की गतिज ऊर्जा व स्थितिज ऊर्जा का योग उसकी आंतरिक ऊर्जा बतलाता है। आंतरिक ऊर्जा व कार्य में $U_i - U_f = -W$ संबंध होता है।
- ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम के अनुसार किसी निकाय को दी गयी ऊष्मा ऊर्जा की मात्रा निकाय की आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन व किये गये बाह्य कार्य के योग के बराबर होती है।

- ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम प्रक्रम की दिशा के बारे में कोई जानकारी नहीं देता है।
- वह प्रक्रम जो अंतिम अवस्था में पहुंचने पर विपरीत दिशा में लौट कर प्रारंभिक अवस्था में पहुंच जाता है उत्क्रमणीय प्रक्रम कहलाता है।
- वह प्रक्रम जो अपनी अंतिम अवस्था में से प्रारंभिक अवस्था में उसी साम्य अवस्था के साथ-साथ वापिस नहीं लौट सकता अनुत्क्रमणीय प्रक्रम कहलाता है। किन्तु स्थिर ताप पर होने वाला प्रक्रम समतापी प्रक्रम होता है।
- एक समान ऊष्मा पर होने वाला कोई भी ऊष्मागतिक प्रक्रम रूद्धोष्म प्रक्रम होता है।
- द्रव की तीन अवस्थाएं इसकी प्रावस्थायें कहलाती हैं तथा द्रव की तीन प्रवस्थाओं को दर्शाने वाला दाब–ताप आरेख प्रावस्था आरेख कहलाता है।
- प्रावस्था आरेख में त्रिक बिंदु द्रव्य के विशेष ताप एवं दाब को दर्शाता है। इस बिंदु पर द्रव्य की तीनों अवस्थाएं–ठोस, द्रव एवं वाष्प एक साथ पाई जा सकती हैं।
- ऊष्मागतिकी के दूसरे नियम के बारे में केल्विन–प्लांक प्रक्कथन के अनुसार–ऊष्मा के एक स्रोत से अविराम कार्य प्राप्त करते रहना संभव है।
- क्लासियस के दूसरे नियम के कथन के अनुसार–कार्यकारी पदार्थ पर बाह्य कार्य किये बिना अपेक्षाकृत ठंडी वस्तु से ऊष्मा अपेक्षाकृत गरम वस्तु में स्थानान्तरित नहीं हो सकती है।
- किसी ऊष्मा इंजन के तीन अनिवार्य अवयव हैं

  (i) सिंक–जिसमें से ऊष्मा ली जा सकती है।

  (ii) सिंक–जिसमें ऊष्मा दी जा सकती हैं।

  (iii) कार्यकारी पदार्थ–जो ऊष्मा प्राप्त करने पर यांत्रिक कार्य करता है।
- कार्नो इंजन एक आदर्श इंजन होता है जिसमें कार्यकारी पदार्थ को चार प्रचालनों के चक्र से गुजारा जाता है: (i) समतापी प्रसार (ii) रूद्धोष्म प्रसार (iii) समतापी संपीडन (iv) रूद्धोष्म संपीडन। इस प्रकार के चक्र को कार्नो चक्र कहते हैं।
- एक कार्नो इंजन की दक्षता इस प्रकार दी जाती है।

$$\eta = 1 - \frac{H_2}{H_1}, \; H_1 = \text{अवशोषित ऊष्मा } H_2 = \text{ निराकृत ऊष्मा}$$

$$= 1 - \frac{T_2}{T_1}, \; T_1 = \text{स्रोत का ताप } T_2 = \text{सिंक का ताप}$$

- दक्षता पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर नहीं करती है।

पाठांत प्रश्न

1. आंतरिक ऊर्जा और ऊष्मा ऊर्जा में भेद लिखिए।
2. सूचक ग्राफ किसे कहते है? आदर्श गैस प्रसार के दौरान किए गए कार्य के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए।
3. ऊष्मागतिकी के शून्य कोटि नियम का उपयोग करके ताप की परिभाषा लिखिए।
4. ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम और उसकी सीमायें लिखिए।
5. समतापी, रूद्धोष्म, समदाबी तथा समआयतनी प्रक्रमों में क्या अन्तर है?
6. ऊष्मागतिकी का दूसरा नियम लिखिए।
7. उदाहरणों सहित उत्क्रमणीय व अनुत्क्रमणीय प्रक्रमों की विवेचना कीजिए।
8. कार्नो चक्र की व्याख्या कीजिए। सूचक ग्राफ की सहायता से कार्नो इंजन की दक्षता की गणना कीजिए।
9. उस निकाय की आंतरिक ऊर्जा में होने वाले परिवर्तन का मान ज्ञात कीजिए जो (a) 200 J ऊष्मा अवशोषित करता है और 500 J कार्य करता है (b) 110 J ऊष्मा अवशोषित करता है तथा इस पर 400 J का कार्य किया जाता है।
10. एक कार्नो इंजन जिसके स्रोत का ताप 400 K है, इस ताप पर ऊष्मा की 200 कैलोरी लेता है और सिंक को ऊष्मा की 150 कैलोरी निराकृत कर देता है। (i) बतलाइए सिंक का ताप क्या है? (ii) इंजन की दक्षता का मान ज्ञात कीजिए।
11. 250 K व 300 K के बीच रेफ्रिजरेटर के स्रोत रूप में कार्य कर रहा है कार्नो इंजन निम्न ताप पर सिंक से 500 कैलोरी ग्रहण करता है। बताइए (i) उच्च ताप पर सिंक में निराकृत ऊष्मा की मात्रा क्या होगी? (ii) रेफ्रिजरेटर को चलाने के लिये प्रतिचक्र किये कार्य की मात्रा बताइए।
12. एक कार्नो इंजन 400 K पर किसी स्रोत से 200 कैलोरी ऊष्मा लेता है और 150 कैलोरी सिंक को निराकृत करता है, तो (i) सिंक का ताप कितना है। (ii) इंजन की दक्षता ज्ञात कीजिए।

पाठान्त प्रश्नों के उत्तर

11.1

1. (i) ताप (ii) C (iii) जूल या कैलोरी
2. (a) $P_2 (V_2 - V_1)$ (b) $-P_2 (V_2 - V_1)$

3. (i) उत्क्रमणीय (ii) अनुत्क्रमणीय

4. समतापी प्रक्रम स्थिर ताप पर होता है जबकि रूद्धोष्म प्रक्रम स्थिर ऊष्मा पर।

5. त्रिक बिंदु पर द्रव्य की तीनों अवस्थाओं–ठोस, द्रव व वाष्प, का सहअस्तित्व हो सकता है।

11.2

1. (i) आंतरिक ऊर्जा (ii) पर

2. यह बतलाता है कि किसी निकाय को दी गई ऊष्मा उसकी आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन एवं बाह्य कार्य के योग के बराबर होती है।

11.3

1. (i) गलत (ii) सही

2. (i) 2000 K (ii) 8583.1K

पाठान्त प्रश्नों के उत्तर

9. (a) 1500 J (b) 1500 J.

10. 300K, 25%

11. 577 कैलोरी, 3225

टिप्पणियाँ

12

ऊष्मा स्थानान्तरण एवं सौर ऊर्जा

पिछले अध्याय में आपने ऊष्मागतिकी के नियमों का अध्ययन किया जो एक ऊष्मागतिकी निकाय में ऊष्मा के प्रवाह और उसकी दिशा को निर्धारित करते हैं। इस पाठ में आप ऊष्मा स्थानांतरण की प्रक्रियाओं के बारे में अध्ययन करेंगे। हमारे सुन्दर ग्रह पर जीवन का अस्तित्व सूर्य से प्राप्त होने वाली ऊर्जा के कारण है। पृथ्वी पर पहुंचने से पूर्व यह पृथ्वी और सूर्य के बीच अंतरिक्ष से होकर गुजरती है। क्या आप जानते हैं कि हम सब लगभग 70 वाट की दर से ऊर्जा उत्सर्जित करते हैं? यहां हम **विकिरण** के बारे में विस्तारपूर्वक पढ़ेंगे। यह अध्ययन हमें बहुत दूर स्थित तारों का ताप ज्ञात करने में सहायक होगा।

ऊष्मा स्थानांतरण की एक अन्य विधि **चालन** है जिसमें एक पदार्थ माध्यम की आवश्यकता होती है। जब किसी छड़ के एक सिरे को गर्म किया जाता है तो कुछ समय बाद इसका दूसरा सिरा भी गरम हो जाता है। इसी कारण से विभिन्न साधित्रों में लकड़ी अथवा ऊष्मा के किसी अन्य कुचालक के दस्ते लगाए जाते हैं। हमारे घर की दीवारों पर पड़ने वाली ऊष्मीय ऊर्जा हमारे घर के अन्दर चालन विधि से पहुंचती है। लेकिन जब आप एक बर्तन में पानी गरम करते हैं तो पहले बर्तन के तल के अणु ऊष्मा प्राप्त करते हैं। वे तल से ऊपर की ओर ऊष्मीय ऊर्जा को लेकर चलते हैं। ऊष्मा स्थानांतरण की इस विधि को **संवहन** कहते हैं। ये प्रक्रम अनेक प्राकृतिक परिघटनाओं जैसे मानसून आदि के लिए, जो पृथ्वी पर हमारे जीवन के अस्तित्व के लिए महत्वपूर्ण हैं, उत्तरदायी हैं। आप इस अध्याय में ऊष्मा स्थानान्तरण के अन्य प्रक्रमों के विषय में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप:

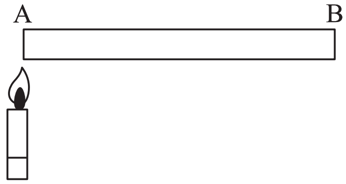
- चालन, संवहन और विकिरण में भेद कर सकेंगे;
- ऊष्मा चालकता गुणांक को परिभाषित कर सकेंगे;
- किसी पिंड की उत्सर्जन क्षमता एवं अवशोषण क्षमता की परिभाषा कर सकेंगे;
- ग्रीन हाउस प्रभाव और इसके पृथ्वी पर जीवन पर परिणामों का वर्णन कर सकेंगे; और
- कृष्णिका विकिरण को निर्धारित करने वाले नियमों को लागू कर पाएंगे।

टिप्पणियाँ

12.1 ऊष्मा संचरण की प्रक्रियाएं

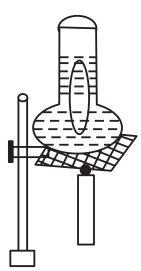
पिछले अध्याय में आपने ऊष्मागतिकी के नियमों का अध्ययन किया। इसके दूसरे नियम के अनुसार ऊष्मा स्वत: उच्चतर ताप वाली वस्तु से निम्न ताप वाली वस्तु में प्रवाहित हो सकती है। ऊष्मा का स्थानान्तरण तब तक होता रहता है जब तक कि दोनों का ताप समान नहीं हो जाता है। गैस के अणुगति सिद्धान्त के अनुसार गैस का ताप उसकी औसत गतिज ऊर्जा से संबंधित है। इसका अर्थ यह हुआ कि विभिन्न तापों पर गैस के अणुओं की औसत गतिज ऊर्जाएं भिन्न-भिन्न होती हैं।

ऊष्मा स्थानांतरण तीन प्रक्रमों द्वारा हो सकता है। ये हैं; चालन, संवहन ओर विकिरण। चालन और संवहन में ऊष्मा का स्थानांतरण अणुओं की गति द्वारा होता है। अब हम यह समझने का प्रयास करते हैं कि यह कैसे होता है,



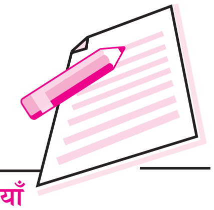
चित्र 12.1: धातु की छड़ में ऊष्मा चालन

चालन द्वारा ऊष्मा स्थानांतरण सामान्यतया ठोस पदार्थों में होता है। इसमें परमाणु आपस में कसकर बंधे होते हैं। गर्म किए जाने पर ये अपनी स्थान नहीं छोड़ सकते। वे अपनी साम्य स्थितियों के इर्द-गिर्द ही कम्पन कर सकते हैं। आइए हम समझने का प्रयत्न करें कि यदि एक धातु की छड़ को एक सिरे पर गर्म किया जाए तो परमाणुओं की गति किस प्रकार प्रभावित होती है (चित्र 12.1)। A सिरे के पास के परमाणु गर्म हो जाते हैं और उनकी गतिज ऊर्जा बढ़ जाती है। वे अपनी साम्य स्थिति के इर्द-गिर्द बढ़ी हुई गतिज ऊर्जा से कंपन करने लगते हैं और अपने समीपवर्ती अणुओं से सम्पर्क में होने से अपनी कुछ गतिज ऊर्जा उन तक पहुंचाते हैं, और ये परमाणु फिर अपने पड़ोसी परमाणुओं से टकराते हैं और कुछ गतिज ऊर्जा उन तक भेजते हैं। यह क्रम तब तक चलता रहता है जब तक कि गतिज ऊर्जा छड़ के दूसरे सिरे B तक स्थित परमाणुओं तक संचरित नहीं हो जातीं क्योंकि औसत गतिज ऊर्जा ताप के समानुपाती है। अत: B सिरा गर्म हो जाता है। इस प्रकार चालन द्वारा ऊष्मा परमाणु से परमाणु में होकर संचरित होती है। इस प्रक्रिया में परमाणुओं का स्थान परिवर्तन नहीं होता। ये केवल अपनी माध्य अवस्था के इर्द-गिर्द कंपन करते हैं तथा ऊर्जा को एक से दूसरे की ओर स्थानांतरित करते हैं।



चित्र 12.2: जल को गर्म करने पर उसमें संवहन धाराएं बनती हैं।

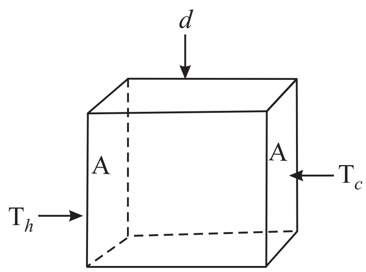
संवहन में तरल के अणु ऊष्मीय ऊर्जा ग्रहण करते हैं तथा ऊपर की ओर उठते हैं। इसे देखने के लिए, फ्लास्क में कुछ जल लें और इसकी तली पर पोटैशियम परमैंगनेट ($KMnO_4$) के कुछ कण डाल कर जल को गर्म करें। जैसे ही तली के पास का जल गर्म होता है यह फैलता है। इसका घनत्व कम हो जाता है, और उत्पलावन बल के कारण यह ऊपर सतह की ओर जाने लगता है (चित्र 12.2)। इसके स्थान पर ठंडा और अधिक घनत्व का जल आ जाता है। इस प्रकार



अधिक गर्म तरल की संवहन धारा ऊपर की ओर जाती है और ठंडा तरल द्रव नीचे जाता है। जल धीरे-धीरे गरम होने लगता है। ये संवहन धाराएं देखी जा सकती हैं क्योंकि ($KMnO_4$) के कारण ये लाल रंग की हो जाती है।

विकिरण में ऊष्मीय ऊर्जा तरंगों के रूप में प्रवाहित होती है। इन तरंगों के अभिलक्षणों के बारे में आप बाद में सीखेंगे। ये तरंगें निर्वात (Vaccum) से होकर गुजर सकती हैं और इनके संचरण के लिए किसी द्रव्य माध्यम की आवश्यकता नहीं होती है। सूर्य से प्राप्त होने वाली ऊष्मा अधिकांशत: विकिरण द्वारा ही हमें प्राप्त होती है। अब हम इन प्रक्रमों का विस्तृत अध्ययन करेंगे।

12.1.1 चालन



चित्र 12.3 एक *d* मोटाई और *A* क्षेत्रफल वाले फलक के एक खंड में ऊष्मा चालन जबकि दो सिरों का ताप T_h और T_c है।

एक आयताकार गुटका जिसके अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल A और मोटाई d है, पर विचार करें। इसके दो फलकों पर ताप T_h और T_c ($<T_h$) हैं, जैसा कि चित्र 12.3 में दर्शाया गया है। अब उन सभी कारकों पर विचार करते हैं जिन पर एक फलक से दूसरे फलक पर स्थानान्तरित ऊष्मा की मात्रा निर्भर करती है। हम सहजरूप से अनुभव कर सकते हैं कि क्षेत्रफल A जितना बड़ा दिया होगा उतनी ही अधिक ऊष्मा का स्थानान्तरण होगा ($Q \alpha A$) और मोटाई d जितनी अधिक होगी उतनी ही कम ऊष्मा स्थनान्तरित होगी ($Q \alpha l/d$)। ऊष्मा स्थानांतरण अधिक होगा यदि ($T_h - T_c$) फलकों के मध्य तापान्तर अधिक होगा। अंत में ऊष्मा स्थानान्तरित के लिए समय *t* जितना ही अधिक होगा उतना ही Q अधिक होगा।

इस प्रकार $$Q \; \alpha \; \frac{A(T_h - T_c)\,.\,t}{d}$$

$$Q = \frac{KA(T_h - T_c)\,t}{d} \qquad (12.1)$$

जहां पर K एक स्थिरांक है जो कि पदार्थ, जिससे गुटका बना है, की प्रकृति पर निर्भर करता है यह ऊष्मा चालकता गुणांक या सामान्यत: पदार्थ की ऊष्मा चालकता कहलाता है। किसी पदार्थ की ऊष्मा चालकता 1 सेकंड में स्थानांतरित हुई ऊष्मा की मात्रा है जबकि पदार्थ के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 1 m^2 हो और मोटाई (लंबाई) 1 m हो और इसके दो फलकों के बीच का तापान्तर 1 K हो। ऊष्मा चालकता का SI मात्रक $Wm^{-1}\,K^{-1}$ है। कुछ पदार्थों के लिये K का मान सारणी (12.1) में दिया गया है।

उदाहरण 12.1 : बर्फ से भरा एक घनाकृति थर्मोकोल बॉक्स का पार्श्व 30 cm और मोटाई 5.0 cm है, यदि बाहरी ताप 45° C हो तो 6 घंटे में पिघलने वाली बर्फ की मात्रा ज्ञात कीजिए। (थर्मोकोल के लिए K = 0.01 J s^{-1} m^{-1} $°C^{-1}$, बर्फ की गलन की गुप्त ऊष्मा 335 J g^{-1} है।)

हल: समीकरण 12.1 की सहायता से बॉक्स में स्थानांतरित ऊष्मा, जो कि इसके एक फलक से गुजरती है, ज्ञात की जा सकती है,

$$Q = \frac{KA(T_h - T_c)t}{d}$$

$$= (0.01 \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-1} \ {}^\circ\text{C}^{-1}) \times (900 \times 10^{-4} \text{ m}^2) \times (45 \ {}^\circ\text{C}) \times (6 \times 60 \times 60 \text{ s}) / (5 \times 10^{-2} \text{ m})$$

$$= 10496 \text{ J}$$

बॉक्स में से होकर गुजरने वाली कुल ऊर्जा

$$Q = 10496 \times 6 \text{ J}$$ (क्योंकि बॉक्स के 6 फलक होते हैं)

पिघली हुई बर्फ का द्रव्यमान m, Q को L से विभाजित करके ज्ञात किया जा सकता है।:

$$m = Q/L$$

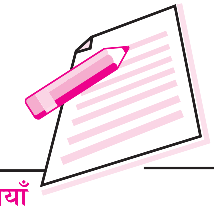
$$= \frac{10496 \text{J}}{335 \text{ Jg}^{-1}} \times 6$$

$$= 313 \times 6 \text{ g} = 1878 \text{ g}$$

हम सारणी 12.1 से देख सकते हैं कि धातुएं ताँबा एवं एलुमीनियम की ऊष्मा चालकता अधिक होती है। इसका अर्थ यह हुआ कि ऊष्मा का प्रवाह ताँबे में अधिक सुगमता से होता है। यही कारण है कि खाना बनाने के बर्तन और गर्म करने के लिए बर्तन ताँबे के बनाए जाते हैं। दूसरी ओर वायु और थर्मोकोल की ऊष्मा चालकता बहुत कम होती है। जिन पदार्थो का K कम होता है उन्हे कभी-कभी ऊष्मारोधी भी कहा जाता है। शीत ऋतु में हम ऊनी वस्त्र पहनते हैं क्योंकि ऊन के तंतुओं में फंसी वायु हमारे शरीर से निकलने वाली ऊष्मा की हानि को रोकती है। रूकी हुई ऊष्मा के कारण हम गर्माहट महसूस करते हैं यदि सूती कपड़े एक के ऊपर एक पहने जाएं तो परतों के बीच फंसी वायु की परत हमारे शरीर की गर्मी को बनाए रखती हैं। गर्मी के दिनों में, बर्फ की एक शिला को गलने से बचाने के लिये हम थर्मोकोल से बने बॉक्स में रखते हैं। कभी-कभी हम बर्फ की शिला को जूट (पटसन) की थैली में रखते हैं जिसकी ऊष्मा चालकता भी कम होती है।

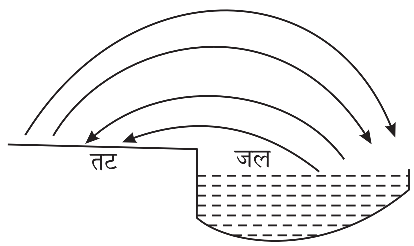
सारणी 12.1: कुछ पदार्थों की ऊष्मा चालकता

पदार्थ	ऊष्मा चालकता ($\mathbf{Wm^{-1} K^{-1}}$)
तांबा	400
एलुमीनियम	240
कंक्रीट	1.2
काँच	0.8
पानी	0.60
बॉडी टेल्क	0.20
वायु	0.025
थर्मोकोल	0.01



12.1.2 संवहन

यह एक साधारण अनुभव है कि गर्मियों में दिन के समय में झील या समुद्र के किनारे घूमते हुए हमें शीतल हवा का अनुभव होता है। क्या आप इसका कारण बता सकते हैं? आइए इसके विषय में ज्ञात करें:



चित्र 12.4 संवहन धारायें, समुद्र तट से गर्म हवा ठंडे जल की ओर प्रवाहित होती है। समुद्र से तट की ओर प्रवाहित होने वाली संवहन धारायें ठंडी हवा के रूप में महसूस की जाती हैं।

झील या समुद्र के पानी की सतह से लगातार वाष्पीकरण के कारण इसका (जल का) ताप कम हो जाताहै। समुद्र के किनारे से गर्म वायु ऊपर उठती है। (चित्र 12.4)। इससे समुद्र तट पर निम्न दाब का क्षेत्र बन जाता है, और जल सतह से ठंडी वायु किनारे की ओर बहने लगती है। इन संवहन धाराओं का कुल प्रभाव यह है कि गर्म तट से ऊष्मा का स्थानांतरण ठंडे जल की ओर हो जाता है। ऊष्मा स्थानांतरण की दर अनेक कारकों पर निर्भर करती है। चालन की तरह संवहन के लिये कोई सरल समीकरण नहीं है। फिर भी संवहन द्वारा ऊष्मा के स्थानान्तरण की दर दोनों पृष्ठों के बीच तापों के अंतर और इन पृष्ठों के क्षेत्रफल पर भी निर्भर करती है

आइए अब इस बात की जांच करें कि ऊष्मा संचरण की विधियों के बारे में आपने कितना ज्ञान प्राप्त किया।

12.1.3 विकिरण

किसी पिंड की सतह से ऊर्जा के सतत उत्सर्जन को विकिरण कहा जाता है। इस ऊर्जा को विकिरण ऊर्जा कहा जाता है और यह विद्युत चुम्बकीय तरंगों के रूप में होती है। ये तरंगे प्रकाश वेग (3×10^8 m s^{-1}) से गमन करती है और ये निर्वात और वायु में से होकर संचरित हो सकती हैं। पॉलिश की गई सतहों से ये आसानी से परावर्तित होती हैं तथा लेन्स के प्रयोग से संकेन्द्रित होती हैं।

सभी पिंडों से उत्सर्जित होने वाले विकिरण उनके ताप के अभिलक्षण होते हैं। सूर्य 6000 K पर मुख्य रूप से दृश्य स्पेक्ट्रम में ऊर्जा का उत्सर्जन करता है। पृथ्वी से 295 K के आदर्श विकिरण ताप पर ऊर्जा का उत्सर्जन होता है। यह मुख्यत: विद्युत चुम्बकीय स्पेक्ट्रम के अवरक्त (Infrared) (ऊष्मीय) क्षेत्र में उत्सर्जित होती है। मानव शरीर से भी अवरक्त क्षेत्र में ऊर्जा का उत्सर्जन होता है।

अब हम एक साधारण प्रयोग करते हैं। एक अंधेरे कमरे में काले रंग का प्लेटिनम तार लें। इससे होकर विद्युतधारा प्रवाहित करें। आप पाएंगे कि तार गरम हो जाता है। धीरे-धीरे विद्युतधारा का परिमाण बढ़ाइए। कुछ समय बाद तार से विकिरण का उत्सर्जन प्रारम्भ हो जाता है। इसमें

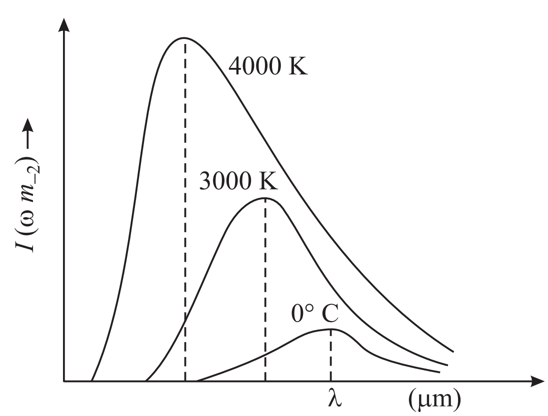
यदि आप थोड़ी और अधिक विद्युतधारा प्रवाहित करें तो तार फीके लाल रंग से दीप्त (glow) हो जाता है। यह दर्शाता है कि तार से लाल रंग का विकिरण हो रहा है जिसकी तीव्रता इतनी है कि हमारे नेत्रों पर इसका प्रभाव पड़ता है। यह लगभग 525° C पर होता है। ताप को और अधिक बढ़ाने पर तार का रंग फीके लाल से बदलकर चेरी लाल (लगभग 900°C) हो जाता है और लगभग 1100° C पर नारंगी, 1250° C के लगभग पीला और 1600° C के लगभग सफेद हो जाता है। इससे आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं? यह दर्शाता है कि किसी दीप्त पिंड का ताप इसके रंग से आंका जा सकता है। और ताप बढ़ाने से लघुत्तर तरंगदैर्ध्य की अधिक तरंगे, तप्त पिण्ड से पर्याप्त मात्रा में उत्सर्जित होती हैं। इसके विपरीत आप तर्क कर सकते हैं कि जब तार का ताप 525°C के नीचे होता है तो यह लाल की अपेक्षा अधिक लम्बी तरंगों को उत्सर्जित करता है लेकिन इन तरंगों का ताप संसूचन उनके तापन प्रभाव (heating effect) से ही किया जा सकता है।

पाठगत प्रश्न 12.1

1. चालन और संवहन में अन्तर स्पष्ट करें।
2. जाँच करें कि K का मात्रक $Js^{-1}\ m^{-1}\ °C^{-1}$ है।
3. मनुष्य सर्दी में अपने को ऊनी वस्त्र से क्यों ढके रहता है?
4. एक घनाकार टुकड़ा जिसकी सतह का क्षेत्रफल 1 m^2 और मोटाई 1 m है, एक ऐसे पदार्थ का बना है जिसका ऊष्मा चालकता गुणांक K है। इस टुकड़े के विपरीत फलकों के ताप में 1° C का अंतर रखा गया है। एक सेकन्ड में सतह से होकर स्थानांतरित ऊर्जा परिकलित कीजिए और K की आंकिक परिभाषा दीजिए।
5. गर्मी की ऋतु में दिन के समय भूमि काफी गर्म हो जाती है लेकिन समुद्र के ऊपर की वायु इतनी गर्म नहीं होती। इस कारण समुद्र-समीर चलना प्रारम्भ हो जाती हैं। व्याख्या करें।

12.2 विकिरण के नियम

किसी ताप पर, पिंड द्वारा उत्सर्जित ऊर्जा विभिन्न तरंगदैर्ध्य की तरंगों का मिश्रण होती है। इन तरंगों की सबसे तीव्र एक विशिष्ट तरंगदैर्ध्य (मान लीजिए λ_m) होती है। 400 °C, पर ताँबे के ब्लॉक के लिये λ_m लगभग 5×10^{-4} cm या 5 μm होता है (1 μ = 10^{-6}m)। इस मान से अधिक या कम तरंगदैर्ध्य पर तीव्रता घट जाती है (चित्र 12.5)।



चित्र 12.5: विभिन्न तापों पर कृष्णिका से उत्सर्जित विकिरणों की तीव्रता का तरंगदैर्ध्य के साथ विचरण

स्पष्ट रूप से प्रत्येक वक्र और क्षैतिज अक्ष के बीच के क्षेत्रफल से किसी नियत ताप पर कुल विकिरण दर की जानकारी मिलती है। आप चित्र 12.5 में दर्शाए वक्रों को देख सकते हैं और निम्न दो तथ्यों की जांच कर सकते हैं;

1) किसी एक निश्चित ताप (प्रत्येक वक्र और क्षैतिज अक्ष के बीच के क्षेत्रफल द्वारा दर्शाए गए) पर विकिरण की दर ताप के साथ तेजी से बढ़ती है।

2) प्रत्येक वक्र के लिए ऊर्जा की एक अधिकतम सीमा है और उसके अनुरूप तरंगदैर्ध्य λ_m (अर्थात सबसे तीव्र तरंग का तरंगदैर्ध्य) है। λ_m ताप में वृद्धि के साथ छोटे तरंगदैर्ध्य की ओर विस्थापित होती है।

इस दूसरे तथ्य को मात्रात्मक रूप से **वीन के विस्थापन का नियम** कहते हैं।

इस नियम का कथन है कि वस्तु का ताप बढ़ने से λ_m लघुत्तर तरंगदैर्ध्य की ओर विस्थापित होती है। यह नियम सही अर्थ में केवल आदर्श कृष्णिकाओं के लिए मान्य है। गणितीय रूप में

$$\lambda_m T = \text{नियतांक} \qquad (12.2)$$

समीकरण 12.2 में नियतांक का मान 2.884×10^{-3} mK पाया गया है। इस नियम से हमें सभी विकिरणकारी पिंडो (खगोलीय पिंडों सहित) के ताप के निर्धारण की सरल विधि का पता चलता है। $\lambda_m = 14$ micron (माइक्रॉन) पर चन्द्रमा के विकिरण स्पेक्ट्रम का शीर्ष है। समीकरण (12.2) प्रयोग करने पर

$$T = \frac{2884 \text{ माइक्रॉन K}}{14 \text{ माइक्रॉन}} = 206 \text{ K}$$

अर्थात् चन्द्र तल का ताप 206 K है।

विल्हेल्म वीन

(1864 – 1928)

1911 में नोबेल पुरस्कार से अलंकृत, विल्हेल्म वीन पूर्वी प्रसिया के एक जमींदार के पुत्र थे। प्रसिया में स्कूली शिक्षा के बाद वे कॉलेज की पढ़ाई के लिये जर्मनी गए। बर्लिन विश्वविद्यालय में उन्होंने महान भौतिक शास्त्री हेल्महोल्ज के मार्गदर्शन में अध्ययन किया और प्रकाश के धात्वीय सतहों से विवर्तन के लिए उन्हें 1886 में डाक्टरेट की उपाधि मिली। उनकी व्यावसायिक जीवनवृत्ति बड़ी शानदार थी। 1896 में वे फिलिप लेनार्ड के बाद ऐकस–ला–चेपेल में प्रोफेसर बने। 1899 में वे गीसेन (Giessen) विश्वविद्यालय में भौतिक शास्त्र के प्रोफेसर बने। 1900में वे वुजवर्ग में डब्ल्यू. सी. रून्टगेन (W.C. Roentgen) के उत्तराधिकारी बने। 1902 में उन्हें लीपजिग (Leipzig) विश्वविद्यालय में ल्युडविग बोल्टजमान और 1906 में बर्लिन विश्वविद्यालय में ड्रड (Drude) का स्थान सौंपा गया जिन्हें इन्होंने अस्वीकार कर दिया। 1920 में उन्हें मुनीच में भौतिकी का प्रोफेसर नियुक्त किया गया और ये अपने जीवन के अंतिम समय तक वहीं रहें।

12.2.1 किरखोफ का नियम

जैसा कि पहले बताया जा चुका है कि जब किसी द्रव्य पर विकिरण पड़ता है तो इसका कुछ अंश परावर्तित, कुछ अंश अवशोषित और कुछ अंश पारगत होता है। यदि किसी सतह पर एक विशेष तरंगदैर्ध्य के लिए मान लें कि r_λ , a_λ और t_λ क्रमशः परावर्तित ऊर्जा, अवशोषित ऊर्जा और पारगत अंश हों तो

$$1 = r_\lambda + a_\lambda + t_\lambda \tag{12.3}$$

कोई पिंड आदर्श कृष्णिका कहलाती है यदि $r_\lambda = t_\lambda = 0$ और $a_\lambda = 1$। अतः आदर्श कृष्णिका पर आपतित विकिरण पूर्णतया अवशोषित हो जाते हैं। काजल को किसी हद तक आदर्श कृष्णिका माना जा सकता हे। प्रकृति में आदर्श कृण्णिका का अस्तित्व नहीं है। काजल दीर्घ तरंगदैर्ध्य का प्रकाश पारगत करती है। काजल दृश्य प्रकाश के 96% को और प्लैटिनम ब्लैक 98% को अवशोषित करता है।

इसके विपरीत **आदर्श श्वेत पिंड** की परिभाषा इस प्रकार की जाती है कि यह वह पिंड है जिसके लिए $a_\lambda = 0, t_\lambda = 0$ और $r_\lambda = 1$ होता है। श्वेत खड़िया के टुकड़े को किसी हद तक आदर्श श्वेत पिंड कह सकते हैं।

इसका आशय यह हुआ कि अच्छे उत्सर्जक अच्छे अवशोषक भी होते हैं। लेकिन क्योंकि कोई भी वस्तु अपने पर आपतित उत्सर्जित ऊर्जा को या तो अवशोषित करती है या परावर्तित, एक अच्छा अवशोषक एक अल्प परावर्तक (अथवा अच्छा उत्सर्जक) होता है।

कृष्णिका की अभिकल्पना (डिजाइनिंग)

किरखोफ के नियम के प्रयोग से हम एक पूर्ण कृष्णिका का निर्माण प्रायोगिक प्रयोजनों के लिए करने में सक्षम होते हैं। हम एक स्थिर ताप पर अंतः क्षेत्र लेते हैं जिसमें एक स्थिर ताप में λ से $\lambda + d\lambda$ के बीच की तरंगदैर्ध्य हैं। अब हम इस अंतः क्षेत्र (enclosure) में एक छेद करते है और इससे बाहर निकलने वाले विकिरण की जांच करते हैं। यह विकिरण अंतःक्षेत्र की दीवारों से अनेकों बार परावर्तित होता है। अतः यदि सतह की परावर्तक क्षमता r_λ और उत्सर्जक क्षमता e_λ हो तो, इसमें से निकलने वाला कुल विकिरण निम्न भांति दर्शाया जाता है।

$$\mathrm{E}_\lambda = e_\lambda + e_\lambda r_\lambda + e_\lambda r_\lambda^{\,2} + e_\lambda r_\lambda^{\,3} + \ldots = e_\lambda\,(1 + r_\lambda + r_\lambda^{\,2} + r_\lambda^{\,3} + \ldots)$$

$$= \frac{e_\lambda}{1 - r_\lambda} \tag{12.4}$$

लेकिन किरखोफ के नियम के अनुसार $\dfrac{e_\lambda}{a_\lambda} = \mathrm{E}_\lambda$

$$e_\lambda = \mathrm{E}_\lambda a_\lambda \tag{12.5}$$

जहां E_λ कृष्णिका से उत्सर्जन है। अब यदि दीवारों को अपारदर्शक (opaque) मान लें तो समीकरण (12.3) को हम इस प्रकार लिख सकते हैं।

टिप्पणियाँ

$$a_\lambda = 1 - r_\lambda \qquad (12.6)$$

समीकरण (12.5) में मान रखने पर, हमें प्राप्त होता है

$$e_\lambda = E_\lambda (1 - r_\lambda)$$

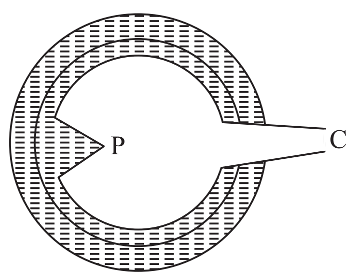
या

$$E_\lambda = \frac{e_\lambda}{1 - r_\lambda} \qquad (12.7)$$

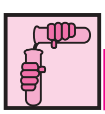
समीकरण (12.4) और (12.7) की तुलना करने पर हम पाते हैं कि किसी छिद्र से निकलने वाला विकिरण पूर्णतया कृष्ण उत्सर्जक सतह के लगभग समरूप होगा। छिद्र जितना ही छोटा होता है उतना ही निर्गत विकिरण आदर्श कृष्णिका के विकिरण के निकट होता है।

अत: हम पाते हैं कि–एकसमान रूप से गर्म अंत:क्षेत्र जिसमें कि एक छोटी सी गुहा (Cavity) हो तो वह उत्सर्जन के लिये एक कृष्णिका की भांति व्यवहार करता है।

ऐसा अत:क्षेत्र आपतित विकिरण के लिए भी एक पूर्ण कृष्णिका की भांति व्यवहार करता हैं। छिद्र में से होकर अन्दर प्रवेश करने वाली किरण अंत: क्षेत्र के भीतर परावर्तित होती रहेगी तथा बाहर नहीं निकल पाएगी। इस अंत:क्षेत्र के तल को काला करके और सुधारा जा सकता है। अत: एक अंत:क्षेत्र एक पूर्ण अवशोषक है और एक पूर्ण कृषिका की भांति व्यवहार करता है। चित्र 12.6 फेरी की कृष्णिका को दर्शाता है। इसमें एक खोखले गोले के रूप में एक गुहा है जिसके अन्दर के भाग को काले पदार्थ से लेपित किया गया है। इसमें एक छोटा शंक्वाकार द्वार O है। छिद्र O के सामने एक शंकु प्रक्षेप P है। यह छिद्र के सामने की सतह से विकिरणों को वापस आने से रोकता है, अन्यथा यह पूर्ण कृष्णिका की भांति व्यवहार नहीं करेगी।

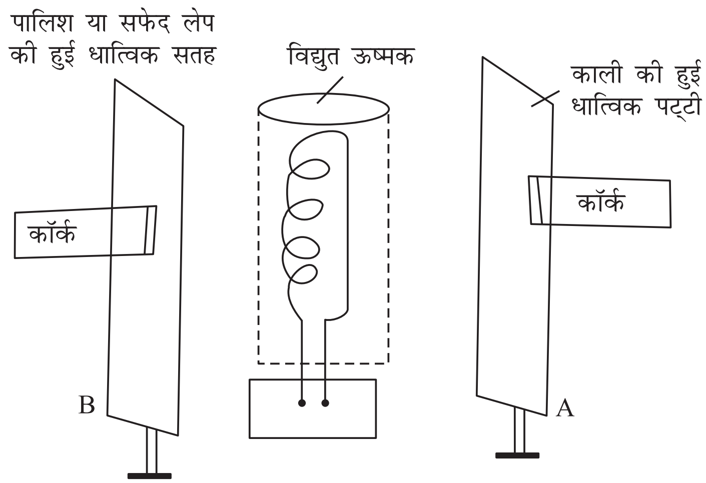


चित्र 12.6: फेरी की कृष्णिका



क्रियाकलाप 12.1

आप पढ़ चुके हैं कि काली सतह एक चमकदार सफेद सतह की अपेक्षा शीघ्रतापूर्वक ऊष्मा विकिरणों का अवशोषण कर लेती है। इस प्रभाव को देखने के लिए आप निम्नलिखित प्रयोग कर सकते हैं। दो धात्विक प्लेटें A और B लीजिए। A की एक सतह को काला करें और B की एक सतह को चमकदार बनाएं। एक इलैक्ट्रिक हीटर (विद्युत ऊष्मक) लें। इन्हें ऐसे व्यवस्थित करें कि काली सतह और चमकदार सफेद सतह हीटर के सामने हों और हीटर से समान दूरी पर हों। एक-एक कॉर्क को मोम के सहारे से बिना लेप लगाए पृष्ठ पर चिपकाएं।



चित्र 12.7 एक काली व एक चमकदार सतह द्वारा ऊष्मा अवशोषण में अंतर दिखाने के लिए प्रयोग

विद्युत हीटर को ऑन कीजिए। क्योंकि दोनों प्लेटें समरूप और समान दूरी पर रखी हैं, अतः वे समान मात्रा में हीटर से विकिरण प्राप्त करती हैं। आप पाएंगे कि काली पट्टी पर लगी कार्क पहले गिरती है। ऐसा इसलिये होता है क्योंकि काली सतह सफेद सतह से अधिक ऊष्मा अवशोषित करती है। यह सिद्ध करता है कि काली सतह विकिरण की अच्छी अवशोषक हैं।

12.2.2 उत्सर्जन एवं अवशोषण क्षमता

समान तापमान पर भिन्न-भिन्न वस्तुएं भिन्न-भिन्न परिमाण में तापीय ऊर्जा का उत्सर्जन करती हैं। किसी गर्म वस्तु की विकरणों का उत्सर्जन करने की क्षमता को उसकी उत्सर्जन क्षमता कहते हैं। किसी विशेष तापमान पर विकरणों का उत्सर्जन करने वाली वस्तु द्वारा ईकाई पृष्ठ क्षेत्रफल से एक सेकन्ड में उत्सर्जित कुल ऊर्जा उसकी कुल उत्सर्जन-क्षमता कहलाती है। यह इस बात पर भी निर्भर करती है कि पिंड का तापमान आस पास के तापमान की अपेक्षा कितना अधिक है। इसका मात्रक है $Jm^{-2}s^{-1}$। समान तापमान पर कृष्णिका की कुल उत्सर्जन-क्षमता का मान अधिकतम (E_b) होता है। समान ताप पर किसी वास्तविक वस्तु की उत्सर्जन-क्षमता (E) एवं कृष्णिका की उत्सर्जन-क्षमता का अनुपात उत्सर्जकता (ε) कहलाती है। अतः उत्सर्जकता,

$$\varepsilon = \frac{E}{E_b}$$

अथवा $$E = \varepsilon E_b$$

E एवं E_b के मान तापमान पर निर्भर करते हैं। किसी पिंड की उत्सर्जकता नियत नहीं होती, तापमान के साथ इसमें अल्प परिवर्तन होता है।

टिप्पणियाँ

जब किसी वस्तु पर विकरित ऊर्जा पड़ती है तो इसका कुछ भाग अवशोषित हो जाता है। विकरित ऊर्जा को अवशोषित करने की वस्तु की क्षमता को अवशोषण क्षमता कहते हैं। कुल अवशोषण क्षमता अवशोषित एवं आपतित ऊर्जा का अनुपात होती है। अवशोषण क्षमता (a) आपतित ऊर्जा का अवशोषित भिन्नात्मक अंश है। कृष्णिका के लिए $a = 1$.

कभी-कभी एक दिए गए तरंगदैर्ध्य की ऊर्जा के अवशोषण के बारे में जानना बड़ा रोचक होता है। ऐसी स्थिति में स्पेक्ट्रमी अवशोषण क्षमता a_λ का उपयोग किया जाता है। अत: कृष्णिका के लिए स्पेक्ट्रमी अवशोषण क्षमता $a_{b\lambda} = 1$

प्रायोगिक तौर पर यह ज्ञात है कि ऊष्मीय विकरणों का अच्छा उत्सर्जक अच्छा अवशोषक भी होता है। इसका अर्थ है कि उत्सर्जन-क्षमता एवं अवशोषण-क्षमता में एक निकट संबंध है।

12.2.3 स्टीफन बोल्ट्समान नियम

प्रायोगिक मापनों के आधार पर स्टीफन और बोल्ट्समान ने यह निष्कर्ष निकाला कि किसी सतह से प्रति सेकण्ड विकिरित ऊर्जा ताप की चतुर्थ धातु के समानुपाती होती है।

$$E = Ae\,\sigma\, T^4 \qquad (12.8)$$

जहाँ पर σ स्टीफन बोल्ट्समान नियतांक है और इसका मान $5.672 \times 10^{-8}\,\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}\,K^{-4}}$ है। T केल्विन में व्यक्त ताप, e = उत्सर्जकता या आपेक्षिक उत्सर्जकता कहलाती है और पृष्ठ की प्रकृति और ताप पर निर्भर करती है। e का मान 0 और 1 के मध्य है; पॉलिश की हुई सतह के लिए अल्प और आदर्श कृष्ण पदार्थों के लिये इसका मान 1 है।

समीकरण (12.8) से आप यह सोच सकते हैं कि यदि सभी पिंडों की सतहें लगातार विकिरण ऊर्जा उत्सर्जन करती हों तो अंततोगत्वा सभी पिंड अपनी सम्पूर्ण आन्तरिक ऊर्जा को विकरित करके परम शून्य ताप तक ठंडी क्यों नहीं हो जाती। यदि किसी ओर विधि से ऊर्जा की आपूर्ति न हो तो पिंड परम शून्य ताप तक ठंडी हो जाएंगी। वास्तव में सभी पिंड विकिरण ऊर्जा का विकिरण और अवशोषण दोनों क्रियाएं एक ही समय करते हैं। यदि किसी पिंड का ताप अपने आस पास के ताप के बराबर होता है तो उत्सर्जन दर एवं अवशोषण दर समान होती हैं। इस प्रकार ऊर्जा का कुल मान अपरिवर्तित रहता है और ताप में परिवर्तन नहीं होता है। अगर पिंड का ताप अपने आस-पास के वातावरण के ताप से कम हो तो अवशोषण की दर उत्सर्जन की दर की अपेक्षा अधिक होगी। पिंड के ताप में तब तक वृद्धि होती रहेगी जब तक कि पिंड का ताप कक्ष के ताप के तुल्य है। यदि पिंड का ताप अधिक है तो उत्सर्जन दर अवशोषण दर से अधिक होगी। एक नेट ऊर्जा की हानि होती है। अत: यदि पिंड का ताप T_1 और वातावरण का ताप T_2 हो तो प्रति सेकेंड नेट ऊर्जा हानि

$$E_{net} = Ae\sigma\,(T_1^4 - T_2^4), \quad \text{जहाँ } T_1 > T_2 \qquad (12.5)$$

टिप्पणियाँ

उदाहरण 12.2 : 3000 K ताप पर 100W के तापदीप्त लैंप (incandescent lamp) के तंतु का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\sigma = 5.7 \times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4} तथा तंतु की उत्सर्जकता $e = 0.3$)

हल: स्टीफन बोल्ट्समान नियम के अनुसार

$$E = eA\sigma\, T^4$$

जहां E उत्सर्जित ऊर्जा दर = 100W, A, पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा T, पृष्ठ का ताप = 3000 K

अत:
$$A = \frac{E}{e\sigma T^4}$$

$$A = \frac{100\text{ W}}{0.3 \times 5.7 \times 10^{-8}\text{ Wm}^{-2}\text{ K}^{-4} \times (3000\text{K})^4}$$

$$= 7.25 \times 10^{-5}\text{ m}^2$$

अब आपके द्वारा अर्जित ज्ञान की जांच का समय है।

पाठगत प्रश्न 12.2

1. 300K ताप पर गुहिका विकिरक (Cavity radiator) किस तरंगदैर्ध्य के लिये अधिकतम विकिरण उत्सर्जित करता है?
2. ग्रीष्म ऋतु में हल्के रंग के कपड़े क्यों पहनते हैं?
3. कृष्णिका विकिरण के स्पेक्ट्रम के प्रायोगिक अध्ययन से कौन से महत्वपूर्ण तथ्य प्राप्त होते हैं?
4. किसी व्यक्ति की त्वचा का ताप 28 °C है और वह 22 °C ताप वाले कमरे में विद्यमान है। मान लीजिए इस व्यक्ति की त्वचा की उत्सर्जकता एक हो और शरीर का पृष्ठीय क्षेत्रफल 1.9 m^2 हो तो व्यक्ति की विकिरण क्षमता ज्ञात कीजिए।
5. किसी पिंड की उत्सर्जन क्षमता एवं अवशोषण क्षमता की परिभाषा कीजिए। आदर्श कृष्णिका क्या होती है?

12.3 सौर ऊर्जा

आपने अपनी पूर्ववर्ती कक्षाओं में सीखा कि सूर्य पृथ्वी को उपलब्ध होने वाली समस्त ऊर्जा का परम स्रोत है। सूर्य बहुत अधिक मात्रा में प्रकाश एवं ऊष्मा ऊर्जा के रूप में ऊर्जा का उत्सर्जन कर रहा है और पृथ्वी द्वारा प्राप्त किया अल्पांश विकिरण भी पृथ्वी की सतह पर पाए जाने वाले सभी प्राणियों की आवश्यकता पूर्ति के लिये पर्याप्त है।अत: सौर ऊर्जा का प्रभावशाली उपयोग, किसी दिन हमारे ऊर्जा संकट का हल प्रदान करेगा।

सौर विकिरण से जुड़े कुछ विषयों पर नीचे विवेचन किया जा रहा है।

1. सौर नियतांक

पृथ्वी पर पहुंचने वाली कुल सौर ऊर्जा की गणना के लिए हम सर्वप्रथम इकाई क्षेत्रफल में प्रति सेकन्ड प्राप्त की गई ऊर्जा का निर्धारण करते हैं। इस ऊर्जा को सौर नियतांक कहते हैं। पृथ्वी के लिए सौर नियतांक का मान 1.36×10^3 W m^{-2} है।

सौर नियतांक को पृथ्वी के पृष्ठ क्षेत्र से गुणा करने पर हमें पृथ्वी द्वारा प्रति सेकन्ड प्राप्त की गई ऊर्जा की मात्रा प्राप्त हो जाएगी। गणितीय रूप से

$$Q = 2\pi R_e^2 C$$

जहाँ पर R_e पृथ्वी की त्रिज्या और C सौर नियतांक है,

यहाँ ध्यान दें कि पृथ्वी की सतह का आधा भाग ही लिया गया है क्योंकि एक समय में केवल इतना ही भाग प्रकाशित होता है।

$$Q = 2 \times 3.14 \times (6.4 \times 10^6 \text{ m})^2 \times (1.36 \times 10^3 \text{ W m}^{-2})$$

$$\simeq 3.5 \times 10^{17} \text{ W}$$

$$\simeq 3.5 \times 10^{11} \text{ MW}$$

सौर परिवार के अन्य ग्रहों के लिए सौर नियतांक का मान ज्ञात करने के लिए हम स्टीफन बोल्ट्समान नियम का प्रयोग कर सकते हैं जो कि सूर्य द्वारा 1 सेकन्ड में उत्सर्जित कुल ऊर्जा का मान देता है।

$$\in \; = (4\pi r^2)\, \sigma T^4$$

जहां पर r सूर्य की त्रिज्या और T इसका ताप है।

यदि R ग्रह के कक्ष की त्रिज्या हो तो

$$E = \frac{\in}{4\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sigma T^4 \qquad (12.6)$$

और सूर्य से R′ दूरी पर परिक्रमा करते हुए किसी अन्य ग्रह का सौर नियतांक

$$E' = \left(\frac{r}{R'}\right)^2 \sigma T^4 \qquad (12.7)$$

अत:

$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2 \qquad (12.8)$$

मंगल ग्रह की सूर्य से दूरी पृथ्वी से सूर्य की दूरी की 1.52 गुना है। इसलिये मंगल के लिए सौर नियतांक

$$E' = E \times \left(\frac{1}{1.52}\right)^{2}$$

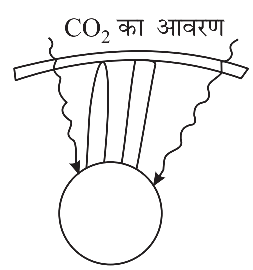
$$= 6 \times 10^{2}\ \mathrm{W\ m^{-2}}$$

2. ग्रीन हाउस प्रभाव

पृथ्वी पर जीवन को फलने–फूलने के लिये उचित मात्रा में सौर विकिरण उपलब्ध होना आवश्यक है। पृथ्वी का वायुमण्डल प्राणियों को एक आरामदेह तापमान प्रदान करने में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। इनमें से एक प्रक्रिया जिसके कारण यह होता है ग्रीन हाउस प्रभाव कहलाती है।

एक ग्रीन हाउस में पौधे, फूल, घास आदि कांच के बने हुए एक ढांचे में परिबद्ध किए जाते हैं। कांच में से होकर लघु तरंगदैर्ध्य विकिरण अन्दर जा सकते है। यह विकिरण पौधों द्वारा अवशोषित कर लिये जाते हैं। तत्पश्चात् यह विकिरण अपेक्षाकृत दीर्घ तरंदैर्ध्य विकिरण ग्रीन हाउस के काँच से बाहर नहीं जा सकते हैं। दीर्घ तरंगदैर्ध्य विकिरण ग्रीन हाउस के कांच से बाहर नहीं जा सकते क्योंकि कांच ऊष्मा के लिए प्रभावी रूप से अपारदर्शी (opaque) है। ये ऊष्मा विकिरण इस प्रकार ग्रीन हाउस में कैद हो जाते हैं और उसे कोष्ण (Warm) बनाए रखते हैं।

इसी प्रकार का एक प्रभाव हमारे वायुमण्डल में होता है। वायुमण्डल में थोड़े से अंश में कार्बन डाई ऑक्साइड होती है जो कि दृश्य प्रकाश के लिये पारदर्शी होती है। सूर्य का प्रकाश वायुमण्डल से गुजरता हुआ पृथ्वी की सतह पर पहुंचता है। पृथ्वी इस प्रकाश का अवशोषण करती है और तत्पश्चात् इसे अवरक्त विकिरण के रूप में उत्सर्जित करती है। लेकिन वायु में विद्यमान कार्बन डाईऑक्साइड अवरक्त विकिरण के लिए अपारदर्शी होती है। CO_2 इन विकिरणों को वायुमण्डल के बाहर नहीं निकलने देती वरन उन्हें वायुमण्डल में ही वापस परावर्तित कर देती है। जिसके फलस्वरूप पृथ्वी के ताप में वृद्धि हो जाती है। इस प्रभाव को ग्रीनहाउस (हरित कक्ष) प्रभाव कहते हैं।



चित्र. 12.8 : ग्रीन हाउस प्रभाव

विकसित एवं विकासशील देशों द्वारा वायुमण्डल में बहुत अधिकमात्रा में कार्बन डाईऑक्साइड का उत्सर्जन किए जाने से ग्रीन हाउस प्रभाव के कारण भूमण्डलीय ताप बढ़ता जा रहा है तथा मानव अस्तित्व के लिए गम्भीर समस्या उपस्थित हो गयी है। हाल ही में संयुक्त राष्ट्र संघ की एक रिपोर्ट में सभी राष्ट्रों से अपने कार्बन डाईऑक्साइड उत्सर्जन को कम करने की मांग की है क्योंकि ग्लेशियर्स (हिमनद) तेजी से सिकुड़ने लगे हैं। निकट भविष्य में इनके कारण कल्पना से परे विनाश हो सकता है जैसे मुख्य नदियों में बाढ़ का आ जाना, समुद्र तल का ऊंचा उठ जाना। हिमनदों के पिघल जाने से पानी का अभाव और भूमि का क्षरण बढ़ जाएगा जिसके कारण अन्न संकट भी उत्पन्न हो जाएगा। इसके अतिरिक्त मौसम का बदलता प्रतिरूप

(पैटर्न) कुछ क्षेत्रों में अकाल तथा सूखा तथा कुछ क्षेत्रों में बाढ़ की स्थिति उत्पन्न कर सकता है।

भारतीय संदर्भ में यह अनुमान लगाया गया है कि इस दिशा में समुचित कदम न उठाए जाने से सन् 2030 तक गंगा के मैदानी भाग में गम्भीर समस्याएं उत्पन्न हो जाएंगी और समुद्री तट के समीपवर्ती भाग जलमग्न हो जाएंगे। आप इस संभाव्य घटना को रोकने के लिए क्या योगदान दे सकते हैं?

12.4 न्यूटन का शीतलन नियम

न्यूटन के शीतलन के नियम के अनुसार ''किसी गरम वस्तु की शीतलन की दर वातावरण की अपेक्षा उसके ताप की अधिकता के अनुक्रमानुपाती होती है बशर्ते कि यह तापान्तर बहुत कम हो। इस नियम का नियमन स्टीफन बोल्ट्समान नियम के अनुसार किया जा सकता है।

माना एक निकाय T ताप पर है और इसके आसपास का ताप T_0 है, किसी गर्म वस्तु द्वारा प्रति इकाई क्षेत्रफल प्रति सेकन्ड ऊर्जा ह्रास

$$E = e\sigma(T^4 - T_0^4)A \qquad (12.9)$$

$$T^4 - T_0^4 = (T^2 - T_0^2)(T^2 + T_0^2) = (T - T_0)(T - T_0)(T^2 + T_0^2). \qquad (12.10)$$

अतः $$E = e\sigma(T - T_0)(T^3 + T^2T_0 + TT_0^2 + T_0^3)A$$

यदि $(T-T_0)$ अत्यल्प है तो T^3, T^2T_0, TT_0^2 और T_0^3 को T_0^3 माना जा सकता है,

अतः $$E = e\sigma(T - T_0)\,4T_0^3\,A$$

$$= k(T - T_0)$$

जहां पर $k = 4e\sigma T_0^3 A$ है, अतः

$$E \alpha\ (T - T_0) \qquad (12.11)$$

यह न्यूटन का शीतलन का नियम है।

पाठगत प्रश्न 12.3

1. पृथ्वी के 40 मीटर चौड़े और 50 मीटर लंबे क्षेत्र द्वारा सूर्य से प्राप्त की जाने वाली शक्ति का परिकलन कीजिए।
2. मानव द्वारा जीवाश्म ईंधनों की तेज खपत से पृथ्वी पर जीवन को क्या खतरे पैदा हो गये है?
3. एक द्रव के शीतलन वक्र का क्या आकार होगा?

आपने क्या सीखा है

- ऊष्मा उच्च ताप वाली वस्तु से निम्न ताप वाली वस्तु की ओर प्रवाहित होती है। ऊष्मा का स्थानान्तरण तीन प्रक्रमों द्वारा होता है चालन, संवहन और विकिरण।
- चालन में एक परमाणु/अणु से दूसरे परमाणु/अणु में ऊष्मा का स्थानांतरण होता है और ये परमाणु/अणु अपनी नियत स्थितियों में कंपन करते रहते हैं।
- संवहन में ऊष्मा का स्थानांतरण अणुओं के स्वयं के स्थानांतरण से होता है। विकिरण में ऊष्मा विद्युत चुम्बकीय तरंगों द्वारा संचरित होती है।
- चालन में स्थानांतरित हुई ऊष्मा की राशि का मान निम्न होता है:

$$Q = \frac{K(\mathrm{T_h} - \mathrm{T_c})\ At}{d}$$

- **वीन का नियम :** ताप T (K) पर किसी वस्तु की विकिरण ऊर्जा के स्पेक्ट्रम का उच्चिष्ठ (maxima) तरंगदैर्ध्य λ_m इस प्रकार होता है कि $\lambda_m \mathrm{T}$ = नियतांक (= 2880 μK)
- **स्टीफन वोल्ट्समान नियम :** T (K) पर विकिरण की दर निम्न समीकरण द्वारा दी जाती है।

$$E = e\sigma A\mathrm{T}^4$$

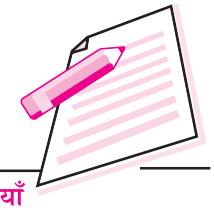
अवशोषक शक्ति निम्न प्रकार से परिभाषित की जाती है

$$\mathbf{a} = \frac{\text{तरंगदैर्ध्य } \lambda \text{ और } \lambda + d\lambda \text{ के बीच कुल अवशोषित ऊर्जा}}{\text{तरंगदैर्ध्य } \lambda \text{ और } \lambda + d\lambda \text{ के बीच कुल आपतित ऊर्जा}}$$

- किसी पृष्ठ की उत्सर्जक क्षमता e_λ किसी विशिष्ट ताप पर प्रति एकांक तरंगदैर्ध्य परास प्रति सेकन्ड प्रति वर्गमीटर क्षेत्रफल से उत्सर्जित होने वाली कुल ऊर्जा के बराबर होती है।
- पृथ्वी के लिए सौर नियतांक का मान $1.36 \times 10^3\ \mathrm{Jm^{-2}\ s^{-1}}$ होता है।
- **न्यूटन का शीतलन नियम :** किसी वस्तु के शीतलन की दर वस्तु के और इसके वातावरण के तापमानों के अंतर के समानुपाती होती है अर्थात् $E \propto (T - T_0)$

पाठान्त प्रश्न

1. किसी थर्मस फ्लास्क में (चित्र 12.9) कांच की दोहरी दीवार वाली बोतल को एक धातु के धारक में बंद किया जाता है। बोतल में द्रव रखा जाता है जिसे हम एक निश्चित ताप पर बनाए रखना चाहते हैं। चित्र को ध्यानपूर्वक देखकर बताएं कि किस प्रकार थर्मस फ्लास्क की संरचना चालन, संवहन और विकिरण द्वारा ऊष्मा की हानि को रोकती है।



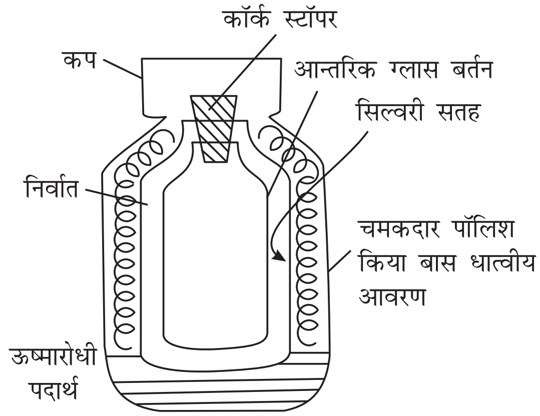


Fig. 12.9: थर्मस फ्लास्क

2. तारे से अधिकतम ऊर्जा उत्सर्जन को प्रदर्शित करने वाली तरंगदैर्ध्य 4000 A° है, तारे के ताप का परिकलन कीजिए ($1A^o = 10^{-8}$ cm).

3. 2 cm त्रिज्या के काले रंग किए गए ठोस तांबे के गोले को निर्वातित अंत:क्षेत्र (enclosure) में रखा गया है जिसकी दीवारों का ताप 1000 ºC पर रखा जाता है गोले को 127 ºC ताप पर बनाए रखने के लिए इसे किस दर से ऊर्जा प्रदान की जानी चाहिए?

4. ''एक अच्छा अवशोषक एक अच्छा उत्सर्जक भी होता है,'' टिप्पणी करें।

5. 50 cm व्यास और 0.5 cm मोटाई की तली का एक तांबे का बर्तन एक बर्नर के ऊपर रखा है जो बर्तन की तली के पृष्ठ को 110 °C पर बनाए रखता है। तली द्वारा बर्तन के भीतर ऊष्मा का नियमित प्रवाह होता है जहाँ पानी वायुमण्डलीय दाब (Atmosphere pressure) पर उबलने लगता है। बर्तन की तली के अंदर के पृष्ठ का ताप 105° C रहता हैं। बताइए एक घंटे में कितने किलोग्राम पानी उबलेगा?

6. 'ऊष्मा चालकता गुणांक' की परिभाषा बताइए। यह गुणांक कौन–कौन से घटकों पर निर्भर करता है?

7. चालन और संवहन द्वारा ऊष्मा स्थानांतरण में क्या अन्तर है?

8. एक समान अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल वाली दो या अधिक छड़ों को यदि श्रेणीबद्ध जोड़ दिया जाय तो सिद्ध कीजिए की इनका तुल्य तापीय प्रतिरोध प्रत्येक छड़ के तापीय प्रतिरोध के योग के बराबर होता है। (टिप्पणी–तापीय प्रतिरोध, ऊष्मा चालकता का व्युत्क्रम होता है)

9. विभिन्न पदार्थों की ऊष्मा चालकता गुणांक का अनुपात 4 : 3 है। एक समान मोटाई की इन पदार्थों की दो छड़ों का एक समान तापीय प्रतिरोध रखने के लिए इन छड़ों की लंबाइयों का अनुपात क्या होगा?

10. सर्दियों में स्वच्छ आकाश की अपेक्षा बादलों से आच्छादित आकाश वाली रात्रि में हम क्यों अपेक्षाकृत गरम अनुभव करते हैं?

11. यदि ताँबे या लोहे के और लकड़ी के टुकड़े एक ही ताप पर हों तो धातु का टुकड़ा छूने पर अपेक्षाकृत गरम क्यों लगता है?

12. चीनी मिट्टी के प्याले की अपेक्षा धातु के बने प्याले से गर्म चाय की चुस्की लेना क्यों अधिक कठिन है?

13. सूती कपड़ों की अपेक्षा ऊनी कपड़े अपेक्षाकृत क्यों अधिक गर्म होते हैं?

14. एक समान मोटाई वाले कपड़े की दो परत वाला कपड़ा इन परतों की दो गुना मोटाई वाले कपड़े की अपेक्षा अधिक गर्मी क्यों देता है?

15. क्या भू-उपग्रह के अंदर पानी संवहन विधि से उबाला जा सकता है?

16. 500 W के जलते विद्युत बल्ब से हम अपना एक हाथ 5 cm ऊपर रखते हैं और दूसरा हाथ बल्ब से 5 cm नीचे रखते हैं, ऊपर वाले हाथ में हमें अपेक्षाकृत अधिक गर्मी क्यों महसूस होती है?

17. एक समान विमाओं और साइज के दो बर्तन विभिन्न पदार्थों के बने हैं। 0ºC ताप की समान मात्रा की बर्फ इनमें भर दी जाती है। यदि बर्फ एक बर्तन में 25 मिनट में और दूसरे बर्तन में 20 मिनट में पूरी तरह पिघल जाती है तो दोनों बर्तनों की धातुओं की ऊष्मा चालकताओं की तुलना कीजिए।

18. 4.0 cm व्यास और 20.0 cm लंबी छड़ की ऊष्मीय प्रतिरोधकता ज्ञात कीजिए। ताँबे की ऊष्मा चालकता $= 4.2 \times 10^2\ \text{W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ है; यदि छड़ के सिरों का तापान्तर $= 50\ ^\circ\text{C}$ हो तो ऊष्मा प्रवाह की दर ज्ञात कीजिए।

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

12.1

1. ठोस पदार्थों में चालन ऊष्मा का प्रमुख प्रकार है। जिसमें ठोस के कण अपने समीप के अणुओं को ऊर्जा स्थानांतरित करते हैं;

   संवहन में तरल के कण स्वयं उच्च ताप से निम्न ताप की ओर चलते हैं।

2. $$K = \frac{Qd}{t\,A(Q_2 - Q_1)}$$

   $$= \frac{\text{J}}{\text{s}}\,\frac{\text{m}}{\text{m}^2\ ^\circ\text{C}}$$

   $$= \text{J s}^{-1}\ \text{m}^{-1}\ ^\circ\text{C}^{-1}$$

3. ऊन के रेशों में फंसी वायु शरीर की गर्मी को बाहर निकलने से रोकती है और इस प्रकार पहनने वाले को गर्म रखती है।

टिप्पणियाँ

4. ऊष्मा चालकता गुणांक आंकिक रूप से प्रति सेकन्ड एक घन के फलक के पृष्ठीय क्षेत्रफल $1\ m^2$ और मोटाई $1m$ से स्थानांतरित होने वाली ऊष्मीय ऊर्जा है जबकि उन दो फलकों के बीच $1°C$ का तापान्तर है।
5. दिन के समय में जमीन जल की अपेक्षा अधिक गर्म हो जाती है। और समुद्र के ऊपर की हवा तट के ऊपर की हवा से अधिक ठंडी होती है। जमीन से गर्म हवा ऊपर की ओर उठती है और एक निम्न दाब का क्षेत्र विकसित हो जाता है। इसके कारण समुद्री नम हवा जमीन की ओर चलने लगती है। क्योंकि जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता रेत की विशिष्ट ऊष्मा धारिता से अधिक है। इसलिये रेत रात्रि में जल्दी ठंडी हो जाती है और जमीन से समुद्र की ओर हवा चलने लगती है।

12.2

1. $\lambda_m = \dfrac{\text{वीन नियतांक}}{\text{तापमान}} = \dfrac{2880\mu K}{300K}$

   $= 9.6\mu$
2. संकेत क्योंकि हल्के रंग ऊष्मा का अवशोषण कम करते हैं।
3. संकेत (a) $\lambda_m T = S$ (b) $t = \sigma T^4$
4. 66.4 W.

12.3

1. सौर नियतांक x क्षेत्रफल

   $= 2.7 \times 10^5$ W
2. हवा में लगातार कार्बन डाईऑक्साइड की मात्रा बढ़ने से ग्रीन हाउस प्रभाव बढ़ेगा जिसके कारण भूमण्डलीय ऊष्मण (global warming) और परिणाम स्वरूप हिमनदों के पिघलने की संभावना है, जिससे कि भूखण्ड में बाढ़ आ जाएगी।
3. चरघातांकी क्षय

पाठान्त प्रश्नों के उत्तर

2. 7210 K

3. 71.6×10^{-11} W

5. 4.7×10^5 kg

9. 3 : 4

17. 4 : 5

18. 2.4×10^{-3} mKW^{-1}; 2.64 W

उच्चतर माध्यमिक पाठ्यक्रम
भौतिकी
विद्यार्थी मूल्यांकन पत्र – 3

अधिकतम अंक : 50 **समय : $1\frac{1}{2}$ घंटा**

निर्देश

- सभी प्रश्नों के उत्तर कागज की पृथक शीट पर दीजिए।
- अपनी उत्तर पुस्तिका पर निम्नलिखित सूचनाएं दीजिए
  - नाम
  - पंजीयन संख्या
  - विषय
  - मूल्यांकन पत्र संख्या
  - पता
- अपने मूल्यांकन पत्र का मूल्यांकन अपने अध्ययन केन्द्र के विषयाध्यापक से करायें ताकि आपको उनसे अपने कार्य के संबंध में धनात्मक प्रतिक्रिया प्राप्त हो सके।

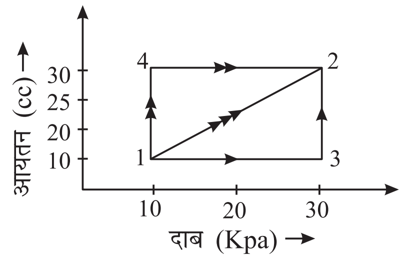
अपना मूल्यांकन पत्र NIOS को न भेजें

1. किस ताप पर अणुओं की गति रुक जाती है? (1)
2. किसी आदर्श गैस की आंतरिक ऊर्जा किस प्रकार (गतिज अथवा स्थितिज) की होती है? (1)
3. कैलॉरी की परिभाषा में ताप परिवर्तन 14.5° C से 15.5° C क्यों निर्दिष्ट किया जाता है? (1)
4. किस तापांक के लिए सेल्सियस एवं फहरेनहाईट पैमाने समान मान दर्शाएंगे? (1)
5. 'आंतरिक ऊर्जा धनात्मक है' इस कथन से क्या संसूचित होता है? (1)
6. ऐसे दो कारण बताई जो सभी व्यवहारिक इंजनों की दक्षता कार्नो इंजन से कम कर देते हैं। (1)
7. उस आरेख का नाम बताईए जो ऊष्मा इंजनों का सिद्धांत समझाने में महत्वपूर्ण भूमिका अदा करता है। (1)
8. ऊष्मा चालकता गुणांक का विमीय सूत्र लिखिए। (1)
9. कार्नो इंजन की दो परिसीमाएं बताईए। (2)
10. प्रत्येक गैस की दो विशिष्ट ऊष्माएं होती है जबकि प्रत्येक द्रव एवं ठोस की विशिष्ट ऊष्मा का केवल एक ही विशिष्ट मान होता है। समझाइए कि ऐसा क्यों है। (2)
11. एक विद्युत रेफ्रिजरेटर निम्न ताप की शीतलक कुंडलियों से गर्म पर्यावरण को ऊष्मा का हस्तांतरण करता है। क्या यह ताप गतिकी के द्वितीय नियम के विपरीत है? अपने उत्तर के समर्थन में तर्क दीजिए। (2)

12. दो छड़ें X एवं Y समान लम्बाई की हैं। प्रत्येक छड़ के सिरों का ताप क्रमशः T_1 और T_2 $(T_1 > T_2)$ है। छड़ों X एवं Y में समान ऊष्मा प्रवाह की दर सुनिश्चित करने वाली शर्तें क्या हैं? (2)

$$\left[\text{संकेत}: \frac{dQ_1}{dt} = \frac{dQ_2}{dt} \Rightarrow \frac{K_1 A_1 \Delta T}{\Delta x} = \frac{K_2 A_2 \Delta T}{\Delta x} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{K_2}{K_1} \right]$$ (2)

13. ऊष्मा गतिकी का प्रथम नियम लिखिए। चित्र में किसी गैस को अवस्था-1 से अवस्था-2 तक ले जाने वाले तीन पथ दर्शाए गए हैं। इन तीनों पथों से गुजरने में गैस द्वारा किए गए कार्य की गणना कीजिए।

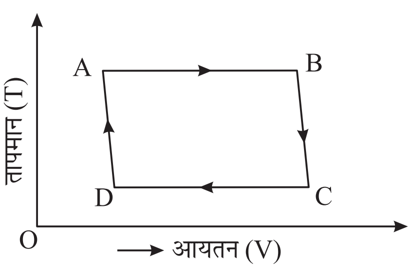


[संकेत : पथ $1 \rightarrow 3 \Rightarrow w_{13} + w_{32} = 0 + p\Delta v = 0.6$ J

पथ $1 \rightarrow 2 \Rightarrow w_{12} = \frac{1}{2}(30-10)\times10^3\times10\times10^{-6} = 0.1$ J

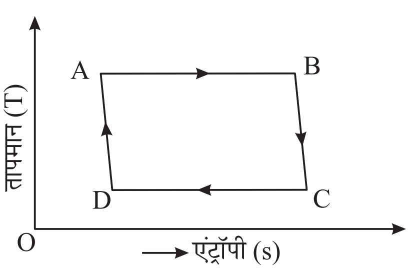
पथ $1 \rightarrow 4 \Rightarrow w_{14} + w_{42} = p\Delta v + 0 = 0.2$ J

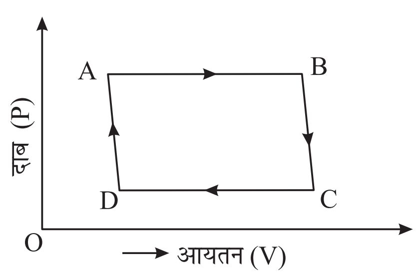
14. किसी प्रक्रम (कार्नो चक्र) का P - V आरेख चित्र में दर्शाया गया है। इसको T-V एवं T-S आरेखों में दशाईए। (4)



(a)

संकेत :





15. समतापी, रूद्धोष्मी, समदाबी, समआयतनिक प्रक्रमों में विभेद कीजिए। (4)

16. ऊष्मा गतिकी के प्रथम कोटि नियम का कथन कीजिए। ऊष्मा गति के प्रथम नियम की सीमाओं की विवेचना कीजिए। (4)

17. ऊष्मा गतिकी के द्वितीय नियम का कथन कीजिए और उसको समझाइए। (4)

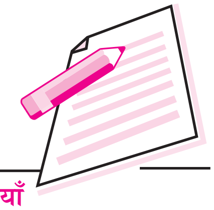
18. निम्नलिखित पदों से आप क्या समझते हैं?

(*i*) किसी ठोस की ऊष्मा चालकता (*ii*) किसी धात्विक छड़ की ताप परिवर्तन अवस्था (*iii*) किसी धात्विक छड की स्थायी ताप अवस्था (*iv*) ऊष्मा चालकता गुणांक (4)

19. कार्नो चक्र का संक्षेप में वर्णन कीजिए। इस चक्र की दक्षता के लिए व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए। (5)

20. ऊष्मा इंजन क्या होता है। इसकी दक्षता के लिए व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए। रेफ्रिजेरेटर का कार्य सिद्धांत समझाइए। इसके निष्पादन गुणांक के लिए व्यंजक लिखिए। किसी रेफ्रिजेरेटर के निष्पादन गुणांक एवं ऊष्मा इंजन की दक्षता में संबंध ज्ञात कीजिए। $2 + 2 + 1 = (5)$

मॉड्यूल - 4
दोलन एवं तरंगे



13

सरल आवर्त गति

आप सरल रेखीय, प्रक्षेप्य व वृत्तीय गतियों के बारे में पढ़ चुके हैं। ये गतियाँ गतिशील वस्तु की गति में अपनाए गए पथ से परिभाषित होती हैं। लेकिन कुछ वस्तुएं इस तरह की गति करती हैं जिनकी विशेष समय अंतराल में पुनरावृत्ति होती है। उदाहरण के लिए, हृदय की धड़कन, घड़ी की सुइयों की गति, एक झूले और एक लोलक की गति, दिक्काल में स्थित एवं आवर्ती पकृति की हैं। इस प्रकार की गति **आवर्ती गति** कहलाती है। यह एक सार्वभौमिक परिघटना है।

इस पाठ में आप आवर्ती गतियों और विशेषत: दोलन गतियों के बारे में अध्ययन करेंगे जिनका हमें दैनिक जीवन में सामना करना पड़ता है। आप सरल आवर्त गति और तत्संबंधी संकल्पनाओं के विषय में अध्ययन करेंगे। अगले अध्याय में हम तरंग परिघटना–तरंगों के प्रकार और उनकी विशेषताओं का अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ को पढ़ने के बाद आप:

- यह दर्शा पाएंगे कि एक दोलनी गति आवश्यक रूप से आवर्ती होती है किन्तु आवर्ती गति निश्चित रूप से दोलनी नहीं होती है;
- सरल आवर्त गति को परिभाषित कर पाएंगे और दिखा सकेंगे कि सरल आवर्त गति एक समान वृत्ताकार गति के वृत्त के किसी व्यास पर प्रक्षेप से प्रदर्शित की जा सकती है;
- आवर्त दोलित्रों के लिये आवर्तकालों के व्यंजकों का निगमन कर सकेगे;
- एक सरल आवर्त्त दोलित्र की स्थितिज ऊर्जा और गतिज ऊर्जा के लिये व्यंजकों का निगमन कर सकेंगे;
- मुक्त, अवमंदित और प्रणोदित दोलनों में भेद कर सकेंगे।

टिप्पणियाँ

13.1 आवर्ती गति

आपने एक दोलक घड़ी को देखा होगा और यह ध्यान दिया होगा कि इसकी सेकन्ड और मिनट वाली सुईयों की नोंकें एक वृत्त में नियत गति से चलती हैं। सेकन्ड वाली सुई घड़ी के डायल पर एक मिनट में अपनी यात्रा पूरी करती है, जबकि मिनट वाली सुई पूरे भ्रमण में एक घंटा लेती है। तथापि, एक पेन्डुलम अपनी माध्य स्थिति के इधर-उधर घूमता है और एक निश्चित समय में अपनी प्रारंभिक अवस्था में आ जाता है। ऐसी गति जो एक निश्चित अंतराल के बाद अपने को दोहराती है **आवर्ती गति** कहलाती है। आवर्त गतियाँ दो प्रकार की होती हैं–(1) **अदोलनी** और (2) **दोलनी**। घड़ी की सूइयों की गति अदोलनी और एक लोलक की गति दोलनी होती है। अत: ये दोनों गतियां आवर्ती हैं। यहाँ पर ध्यान देना आवश्यक है कि एक दोलनी गति निश्चित रूप से आवर्ती होती है लेकिन एक आवर्ती गति अनिवार्य रूप से दोलनी नहीं होती। याद रखें कि गति जो समान समय अंतरालों में अपने को दोहराती है वह **आवर्ती** होती है और यदि किसी माध्य स्थिति के इर्द-गिर्द होती है तो यह **दोलनी** होती है।

हम जानते हैं कि पृथ्वी अपने अक्ष पर लगभग 24 घंटे में अपना घूर्णन पूरा करती है। इसी से दिन रात होते हैं। पृथ्वी सूर्य की परिक्रमा भी करती है तथा 365 दिन में अपनी परिक्रमा पूरी करती है। इस गति के कारण मौसमों का अनुक्रम होता है। उसी प्रकार सभी ग्रह सूर्य के परित: दीर्घवृत्ताकार कक्षाओं में घूमते हैं और प्रत्येक एक नियत कालान्तर में अपना चक्कर पूरा करता हैं ये अदोलनी आवर्ती गति के उदाहरण है।

जीन बेपटिस्ट जोसेफ फोरियर
(1768 – 1830)

फ्राँसीसी गणितज्ञ, एक जटिल दोलन के विश्लेषण को ज्या और कोज्या फलनों की श्रेणी के रूप में अभिव्यक्ति के लिये दी गई फोरियर श्रेणी के लिए विख्यात हैं।

फोरियर ने ऊष्मा चालन की गणितीय विधि का अध्ययन किया। उन्होंने ऊष्मा विसरण के आंशिक अवकल समीकरण को स्थापित किया और त्रिकोणमित्तीय फलनों की अनंत श्रेणी का प्रयोग करते हुए इन्हें हल किया।

फोरियर के पिता पेशे से एक दर्जी थे। ये उनकी दूसरी पत्नी की नंवी संतान थे। ये 10 वर्ष की आयु में ही अनाथ हो गए थे। एक पादरी के रूप में, फिर अध्यापक, एक क्रांतिकारी, एक गणितज्ञ और नेपोलियन बोनापार्ट के सलाहकार के रूप में फोरियर का जीवन बहुआयामी (बहुरंगी) था।

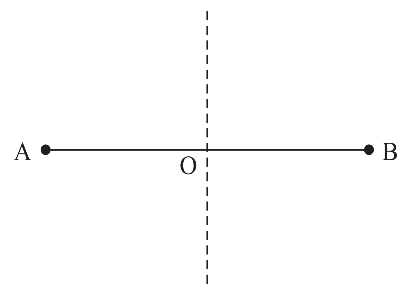
वे लाप्लास, लेगरेन्ज, बायो, पॉयसन, मालुस, डी लेम्बर, अरेगो और कोरनोट के समकालीन थे। चन्द्रमा में फोरियर क्रेटर और इफिल टावर में उनका नाम उनके योगदानों के लिए श्रद्धांजलि है।

13.1.1 विस्थापन, समय के फलन के रूप में

आवर्ती गति

जब कोई वस्तु अपनी गति को किसी निश्चित समय के पश्चात् दोहराती है तो उसकी गति को आवर्त गति कहा जाता है।

मान लीजिये कि किसी निश्चित समय अन्तराल T के पश्चात् किसी वस्तु की स्थिति में O से B, B से O, फिर O से A और अन्ततः A से O तक परिवर्तन होता है।



चित्र 13.1

तब, वस्तु की स्थिति में परिवर्तन अथवा वस्तु के विस्थापन को समय के फलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है:

$$x = af(t + T)$$

जहाँ, a एक नियतांक है तथा T वह समय है जिसके पश्चात् x का मान उसके पूर्व मान के बराबर हो जाता है।

प्रत्येक समय अन्तराल T के लिये:

$x = af(T) = 0, t = 0$ के लिये

$x = af(T + T/4) = a, t = T/4$ होने पर

$x = af\left(T+\frac{T}{2}\right) = 0, t = \frac{T}{2}$ होने पर

$x = af\left(T+\frac{3T}{4}\right) = -a, t = \frac{3T}{4}$ होने पर

$x = af(T + T) = 0, t = T$ होने पर

....

....

इस प्रकार x, t का फलन है और इसकी गति, समय अन्तराल T के पश्चात् दोहराई जाती है। अतः यह गति, आवर्त गति है।

क्रियाकलाप 13.1

मान लीजिए कि एक सरल आवर्तगति करते हुए एक कण की माध्य स्थिति से विस्थापन y को निम्न समीकरण द्वारा निरूपित कर सकते हैं

$$y = a \sin \theta \qquad (13.1)$$

या

$$y = a \cos \theta \qquad (13.2)$$

अपनी गणित की पुस्तक से $\sin\theta$ और $\cos\theta$ के मान $\theta = 0, 30^0, 60^0, 90^0, 120^0, 150^0, 180^0, 240^0, 300^0, 330^0$ तथा 360^0 के लिये ज्ञात कीजिये, $a = 2.5$ cm लेकर और संबंध $y = a\sin\theta$ का उपयोग करके प्रत्येक कोण के लिये y का मान निकालिये। उपयुक्त पैमाना चुनकर y और θ में आरेख खींचिए। इसी प्रकार संबंध $y = a\cos\theta$ का उपयोग करके y और θ में दूसरा आरेख खींचिए। आप यह पाएंगे कि प्रत्येक आरेख $+a$ और $-a$ के बीच दोलन निरूपित करता है। यह दर्शाता है कि एक निश्चित प्रकार की दोलन गति किसी कोण के ज्या अथवा कोज्या युक्त व्यंजक या ऐसे व्यंजकों के संयोग द्वारा निरूपित की जा सकती है।

अब आप निम्न प्रश्नों का उत्तर देते हुए अपनी प्रगति का आकलन करें।

पाठगत प्रश्न 13.1

1. एक आवर्ती गति और दोलनी गति में क्या अंतर है?

2. निम्न में से कौन-सा उदाहरण आवर्ती गति को दर्शाता है?

   (i) बन्दूक से दागी गई गोली, (ii) परमाणु में नाभिक के चारों ओर इलेक्ट्रॉन का घूर्णन, (iii) सड़क पर एकसमान वेग से गतिमान वाहन, (iv) सूर्य के परितः घूमता धूमकेतु, (v) U नली में दोलन करते पारे के स्तंभ की गति।

3. (i) एक दोलनी आवर्ती गति और (ii) एक अदोलनी आवर्ती गति के उदाहरण दें।

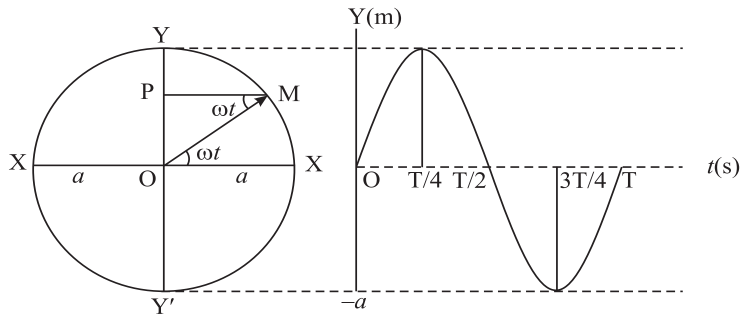
13.2 सरल आवर्त गतिः संदर्भ-वृत्त

एक आवर्ती दोलित्र के दोलनों को किसी कोण की ज्याओं और कोज्याओं से युक्त पदों द्वारा निरूपित किया जा सकता है। यदि एक दोलन करते हुए कण का अपनी माध्य स्थिति से विस्थापन समीकरण $y = A\sin\theta$ या $y = B\cos\theta$ या $y = A\sin\theta + B\cos\theta$ द्वारा निरूपित किया जा सकता है, जहाँ पर A और B नियतांक है, तो कण की गति सरल आवर्ती होती है। सरल आवर्ती गति को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

यदि कोई कण किसी ऐसे बल के प्रभाव में किसी नियत बिन्दु के दोनों ओर गति करता है, जो नियत बिन्दु से कण के विस्थापन x का अनुक्रमानुपाती होता है और बल की दिशा विस्थापन की दिशा के विपरीत होती है उस कण की गति सरल आवर्त गति होती है। हम अपनी चर्चा रेखीय दोलनों तक ही सीमित रखेंगें गणितीय रूप में इसे हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं:

$$F = -kx$$

जहाँ k आनुपातिकता गुणांक है।



चित्र 13.2: P की YOY′ के अनुदिश आवर्त गति

एक सरल आवर्तगति का समीकरण निकालने के लिए, हम एक बिंदु M को एक a त्रिज्या के वृत्त की परिधि में अचर चाल υ से चलता हुआ लेते हैं (चित्र 13.1)। वृत्त का केन्द्र O है। मान लीजिए कि $t = 0$ पर कण बिंदु X पर है और $t = t$ पर M पर है स्थिति सदिश OM जिसे कलादर्शक कहते हैं एक नियत कोणीय वेग $\omega = \frac{v}{a}$ से घूर्णन करता है। (यह निरूपण प्रत्यावर्ती धाराओं के परिपथों के विश्लेषण में भी उपयोग किया जाता है) बिंदु M पर त्वरण $\upsilon^2/a = a\omega^2$ बिंदु O की ओर होता है। समय t पर इस त्वरण का OY दिशा में घटक = $a\omega^2 \sin\omega t$ है। हम YOY′ के लंबवत् रेखा MP खींचते हैं; तब P को एक m द्रव्यमान व $a\omega^2 \sin\omega t$ त्वरण के कण के तुल्य लिया जा सकता है। कण P पर O की दिशा में लगने वाला बल

$$F = ma\omega^2 \sin \omega t$$

लेकिन $\sin \omega t = y/a$

इसलिए $$F = m\omega^2 y \qquad (13.3)$$

विस्थापन O से P की ओर तथा बल P से O की ओर नापा जाता है।

अत: $$F = -m\omega^2 y$$

(ऋणात्मक चिह्न पर ध्यान दें)

चूंकि यह बल O की ओर निर्देशित है और P के O से विस्थापन 'y' के अनुक्रमानुपाती है। अत: कण सरल आवर्तगति करता है।

माना $m\omega^2 = k$, एक नियतांक है। अत: समीकरण (13.3) से

$$F = -k\,y \qquad (13.4)$$

जहाँ पर k एक नियतांक है, जो कि प्रति इकाई विस्थापन के लिए बल है, इसे बल नियतांक कहते हैं।

$$\omega^2 = k / m \qquad (13.5)$$

एक पूरे चक्कर में OM, 2π का कोण T समय में बनाता है अतः

$$\omega = 2\pi/T \qquad (13.6)$$

समी.(13.5) और समी. (13.6) को संयोजित करने पर हमें आवर्तकाल के लिये निम्न समीकरण प्राप्त होता है।

$$T = 2\pi\sqrt{k/m} \qquad (13.7)$$

यह बिन्दु P को O से Y फिर O से होते हुए Y′ और वापस O में आने में लगा समय है। इस समय में यह कण वृत्त का एक पूरा चक्कर लगा लेता है ओर बिंदु (कण) की स्थिति से लम्ब का पाद O के इधर-उधर एक दोलन पूरा कर लेता है जैसा कि चित्र (13.1) में दर्शाया गया है।

13.2.1 सरल आवर्त गति संबंधी मूल पदावली

विस्थापन : आवर्त दोलित्र की वह दूरी होती है, जो दिए गए क्षण पर उसकी माध्य (साम्यावस्था) से होती है।

आवर्तकाल : एक दोलन को पूरा करने में लिया गया समय दोलित्र का आवर्तकाल कहलाता है। इसे T से दर्शाया जाता है।

आयामः किसी दोलित्र का अपनी माध्य स्थिति के किसी ओर अधिकतम विस्थापन आयाम कहलाता है।

आवृत्ति : यह एक सेकन्ड में दोलित्र द्वारा पूर्ण किए गये कंपनों की संख्या है, इसे v द्वारा दर्शाया जाता है। आवृत्ति का SI मात्रक हट्‌र्ज है जिसका संकेत Hz है। चूंकि यह एक सेकन्ड में पूरे किए गए कंपन हैं, अतः एक कंपन में लिया गया समय $1/v$

इसलिए $T = 1/v$ या $v = \left(\dfrac{1}{T}\right)s^{-1}$

चूंकि आवर्ती दोलन $\sin\theta$ या $\cos\theta$ युक्त व्यजकों द्वारा दर्शाए जा सकते हैं, हमें दो और महत्वपूर्ण संकल्पनाओं की आवश्यकता होती है। ये हैं:

कलाकोण ϕ: यह एक कोण है जिसकी किसी क्षण पर ज्या या कोज्या दोलित्र की स्थिति तथा गति की दिशा बतलाता है। इसे रेडियन में व्यक्त करते हैं।

कोणीय आवृत्ति ω: यह कला कोण (phase) परिवर्तन की दर है। इसे रेडियन/सेकन्ड में अभिव्यक्त किया जाता है। चूंकि कलाकोण एक पूरी परिक्रमा में 0 से 2π रेडियन तक बदलता है। अतः कलाकोण परिवर्तन की दर $\omega = 2\pi/T = 2\pi\, v$

उदाहरण 13.1 : 9 किलोग्राम द्रव्यमान की एक ट्रे k बल नियतांक की एक स्प्रिंग पर अवलम्बित है, जैसा कि चित्र 13.3 में दिखाया गया है। ट्रे को धीरे से नीचे की ओर दबाकर छोड़ दिया जाता है तो यह सरल आवर्तगति करने लगती है, जिसका आवर्तकाल 1.0 सेकन्ड होता है।

टिप्पणियाँ

जब ट्रे पर M द्रव्यमान का एक पिण्ड रख दिया जाता है, तो इसका आवर्तकाल 2.0 सेकन्ड तक बढ़ जाता है। पिण्ड का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

हल : निकाय की कोणीय आवृत्ति $\omega = \sqrt{k/m}$, जहाँ m दोलित्र का द्रव्यमान है,

$$4\pi^2/T^2 = \frac{k}{m}$$

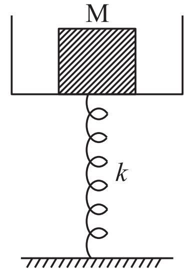


Fig. 13.3

या
$$m = \frac{kT^2}{4\pi^2}$$

जब ट्रे खाली है तो, $m = 9$ kg और T = 1 सेकन्ड

इसलिए
$$9 = \frac{k(1)^2}{4\pi^2}$$

ट्रे पर M द्रव्यमान का पिण्ड रखने पर m = 9 + M और T = 2 सेकन्ड, इसलिए $9 + M = k \times (2)^2/4\pi^2$

इन दो समीकरणों से

$$\frac{(9+M)}{9} = 4$$

अतः M = 27 kg.

उदाहरण 13.2: 1600 न्यूटन/मीटर बल नियतांक वाली स्प्रिंग को क्षैतिज मेज पर आरूढ़ कर दिया जाता है जैसा कि चित्र 13.4 में दर्शाया गया है, एक द्रव्यमान m = 4 kg को स्प्रिंग के मुक्त सिरे से बांधकर क्षैतिज रूप में दांयी ओर 4.0 cm दूरी तक खींचा और फिर छोड़ दिया जाता है। गणना कीजिए (i) आवृत्ति (ii) अधिकतम त्वरण और (iii) द्रव्यमान की अधिकतम चाल।

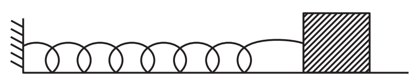


Fig. 13.4

हल :
$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{1600/4}$$
$$= 20 \text{ रेडियन/सेकन्ड}$$

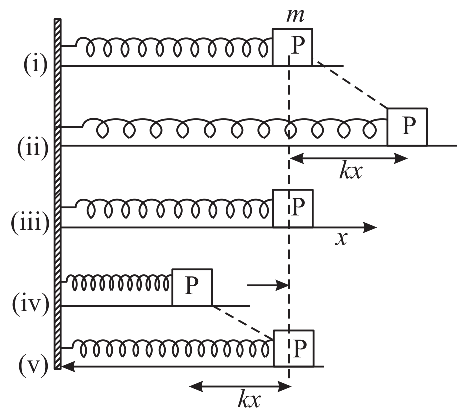
अतः $v = 20/2\pi = 3.18$ Hz. अधिकतम त्वरण $= a\,\omega^2 = 0.04 \times 400 = 16 \text{ m s}^{-2}$, अधिकतम चाल $v_{max} = a\,\omega = 0.04 \times 20 = 0.8 \text{ m s}^{-1}$

13.3 सरल आवर्तगति के उदाहरण

सरल आवर्तगति की अवधारणा के स्पष्टीकरण हेतु बहुत सामान्य उदाहरण नीचे दिए गए हैं।

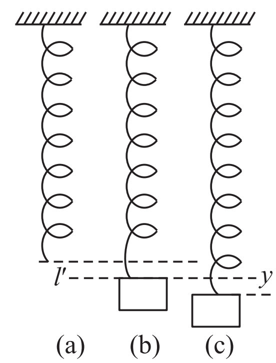
13.3.1 स्प्रिंग-द्रव्यमान निकाय के क्षैतिज दोलन

मान लीजिए एक क्षैतिज प्रत्यास्थ स्प्रिंग जिसका बल नियतांक k है तथा जिसके एक सिरे में m द्रव्यमान का छोटा सा पिण्ड जुड़ा है। स्प्रिंग का दूसरा सिरा दृढ़तापूर्वक दीवार से जुड़ा है (चित्र 13.5)। पिंड के द्रव्यमान की तुलना में स्प्रिंग का द्रव्यमान नगण्य मान लिया गया है।



चित्र 13.5 एक स्प्रिंग से जुड़े हुए द्रव्यमान के दोलन

हम मान लेते हैं कि वायु प्रतिरोध एवं घर्षण से ऊर्जा क्षय नहीं होती। हम क्षैतिज रूप से $+x$ दिशा लेते हैं, प्रारंभ में अर्थात् $t = 0$ पर गुटका स्थिर है, और स्प्रिंग विश्रोत (relaxed) अवस्था में हैं चित्र 13.5 (i)। तब इसे क्षैतिज रूप से एक छोटी दूरी तक खींचा जाता है। यह गुटके पर k x बल आरोपित करता है, बल विस्थापन की विपरीत दिशा में कार्य करता है और गुटके को उसकी साम्य स्थिति की ओर लाना चाहता है। चित्र 13.5 (ii) जब यह गुटका अपनी प्रारंभिक स्थिति में वापस आता है तो चित्र 13.5 (iii) यह v वेग प्राप्त कर लेता है। अतः इसकी गतिज ऊर्जा $K = (1/2)mv^2$ हो जाती है। गति के जड़त्व के कारण गुटका बांयीं ओर अपनी गति बनाए रखता हैं जब तक कि यह चित्र 13.5 (iv) की स्थिति में नहीं पहुंच जाता है। इस स्थिति में गुटका पुनः kx बल का अनुभव करता है, जिसके कारण वह प्रारंभिक स्थिति में आ जाता है [चित्र 13. 5 (v)] और तदुपरांत गुटका इधर-उधर दोलन करता रहता है।



चित्र 13.6: स्प्रिंग के मुक्त सिरे से लटके द्रव्यमान (गुटके) के ऊर्ध्वाधर दोलन

दोलन का आवर्तकाल $2\pi\sqrt{m/k}$ है जहाँ k स्प्रिंग की प्रति इकाई लंबाई परिवर्तन के लिये बल का मान है।

13.3.2 स्प्रिंग-द्रव्यमान निकाय के ऊर्ध्वाधर दोलन

हम k बल नियतांक वाले एक स्प्रिंग को एक दृढ़ आधार से लटकाते हैं (चित्र 13.6 a)। अब हम इसमें एक m द्रव्यमान का गुटका जोड़ते हैं जिसके कारण स्प्रिंग में l लम्बाई वृद्धि होती है (चित्र 13.6 b)। स्पष्ट है कि स्प्रिंग का बल नियतांक $k = mg/l$ है। अब हम गुटके को

एक छोटी दूरी y के बराबर खींचते हैं (चित्र 13.6*c*)। बल ky ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर कार्य करता है। अत: गुटके को छोड़ने पर बल ky इसे ऊपर खींचता है। जब गुटका अपनी आरंभिक स्थिति में लौटता है, तो यह प्राप्त किए गए वेग के कारण ऊपर चलता रहता है और यह साम्य स्थिति से y दूरी ऊपर चला जाता है। इन ऊर्ध्वाधर दोलनों की कोणीय आवृत्ति

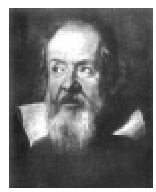
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

अत:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (13.8)$$

संपीडित स्प्रिंग अब गुटके पर प्रत्यानयन बल नीचे की ओर लगाता है। गुटका नीचे की ओर गति करता है और पुन: इसी भांति ऊर्ध्वाधर दोलन करता रहता है।

गैलीलियो गैलीली
(1564-1642)



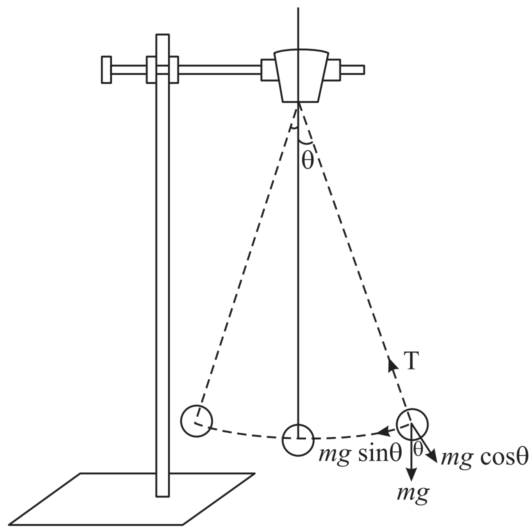
गैलीलियो के पिता विंसेनजिओं गैलीली पीसा (इटली) में एक ऊन के व्यापारी थे। गैलीलियो उन लोगो में से थे जिन्हांने आधुनिक विज्ञान में तर्क और प्रयोगों का समावेश किया। बचपन में उन्हें संगीत, कला और खिलौने बनाने में रूचि थी। किशोर गैलीलियो एक डॉक्टर बनना चाहते थे। दवाओं के बारे में अध्ययन के लिए उन्होंने पीसा के विश्वविद्यालय में प्रवेश लिया। यहाँ पर उन्होंने अपनी प्रथम खोज लोलक की समकालिकता (isochronicity) की। जिसके आधार पर क्रिश्चियन हाइगेन ने पहली पेन्डुलम घड़ी बनाई।

धन के अभाव में गैलीलियो अपनी पढ़ाई पूरी नहीं कर पाए। लेकिन अपने स्वयं के प्रयासों से उन्होंने यांत्रिकी विषय से इतना सीखा और विकसित किया कि ग्रेंड ड्यूक ऑफ टस्कनी ने उन्हें पीसा विश्वविद्यालय में गणित का प्रोफेसर नियुक्त कर दिया।

गैलीलियो ने आकाशीय पिंडों के अध्ययन के लिये दूरदर्शी यंत्र का निर्माण और उपयोग किया। अपने प्रेक्षणों के आधार पर वे संतुष्ट हो गये कि कोपरनिकस का सूर्यकेन्द्रीय ब्रह्माण्ड का सिद्धान्त ठीक था। उन्होंने अपने तर्कों को एक पुस्तक 'ए डायलॉग ऑन दि टू प्रिंसिपल ए सिस्टम आफ दि वर्ल्ड' के रूप में 1632 में प्रकाशित किया। यह तर्क वाक्य मान्यता प्राप्त अरस्तू की भूकेन्द्रीय ब्रह्माण्ड की अवधारणा के विपरीत था। जिसके लिए गैलीलियो को दंडित किया गया और उन्हें इसके लिये क्षमा मांगनी पड़ी। लेकिन 1636 में उन्होंने नयी पुस्तक ''डायलॉग ऑन द न्यू साइंसेज'' प्रकाशित की जिसमें उन्होंने पुन: अरस्तू के गति के नियमों की भ्रामकता दर्शाई।

चूंकि गैलीलियो के समय में परिष्कृत मापन यंत्र उपलब्ध नहीं थे, इसलिए उन्हें अपनी कल्पनाशक्ति (कौशल) का प्रयोग करना पड़ा। उन्होंने विचार प्रयोगों (thought experiments) की भावना को बढ़ावा दिया, जिसे कि वर्तमान में समस्त परिष्कृत युक्तियों के बावजूद भी वैज्ञानिक प्रयोग करते हैं।

13.3.3 सरल लोलक



चित्र 13.7: सरल लोलक

एक सरल लोलक दो कार्क के टुकड़ों के बीच से गुजरते हुए कसे गए सूती धागे से लटकाया गया एक गोलक है (चित्र 13.7)। गोलक को बिंदु द्रव्यमान माना गया है एवं धागा अवितान्य है। लोलक निलंबन बिन्दु के परितः मुक्त दोलन करता है।

जब गोलक को इसकी साम्य स्थिति से थोड़ा सा विस्थापित करके छोड़ दिया जाता है, तो लोलक ऊर्ध्वार्धर तल में अपनी साम्य स्थिति के इधर-उधर कोणीय दोलन करने लगता है। निलंबन बिंदु और गोलक के गुरूत्व केन्द्र के बीच की दूरी को लोलक की लंबाई (l) कहते हैं। लोलक के गोलक की साम्य अवस्था से विस्थापित अवस्था में गोलक पर लगने वाले बल चित्र 13.7 में दर्शाए गए हैं।

(i) गोलक का भार mg ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर कार्य करता है।

(ii) डोरी का तनाव T डोरी के अनुदिश ऊपर की ओर लगता है।

भार mg को घटकों में वियोजित करते हैं: (a) mg cosθ डोरी के अनुदिश परन्तु T की दिशा के विपरीत तथा (b) mg sinθ डोरी के लम्बवत् mg cosθ घटक तनाव T को संतुलित करता है और घटक mg sinθ गोलक में माध्य स्थिति की ओर त्वरण उत्पन्न करता है।

अतः प्रत्यानयन बल mg sin θ है। x के छोटे विस्थापनों के लिये, प्रत्यानयन बल F = mgθ

$= \dfrac{mg\,x'}{l}$ इकाई विस्थापन के लिए बल k = mg/l

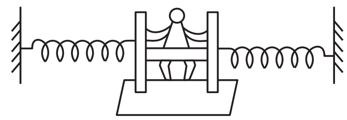
अतः
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/l}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

अथवा
$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

अतः
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (13.9)$$

कमानी (स्प्रिंग) की सहायता से भार मापना

हम किसी निकाय का भार मापने के लिये एक स्प्रिंग तुला का प्रयोग करते हैं। इसका कार्यकारी सिद्धान्त यह है कि भार की एक निश्चित सीमा के अन्तर्गत स्प्रिंग की लंबाई में बराबर भार के लिए बराबर खिंचाव (तनन) होता है अर्थात् भार/तनन = नियत (बल नियतांक)



चित्र 13.8 एक अंतरिक्ष यात्री का द्रव्यमान मापने के लिए कमानीदार तुला

अत: स्प्रिंग की लंबाई भार के साथ रैखिक रूप से बढ़ती है। अत: आप स्प्रिंग के साथ-साथ एक रेखीय पैमाना लगाकर इसे ज्ञात भारों के लिए अशांकित कर सकते हैं। इस प्रकार बनी तुला अज्ञात भारों के मापन में प्रयुक्त होती है।

क्या ऐसी तुला गुरुत्व मुक्त अंतरिक्ष में कार्य करेगी जैसे कि अंतरिक्ष रॉकेट या उपग्रह में? स्पष्टतया नहीं शून्य गुरुत्व विहीन स्थिति में स्प्रिंग में कोई तनाव उत्पन्न नहीं होगा, तब नियमित स्वास्थ्य जांच के लिए अंतरिक्ष यात्रियों का भार मापन कैसे किया जाता है? यह एक कमानीदार तुला के द्वारा किया जाता है जो कि एक भिन्न सिद्धान्त पर आधारित है। अंतरिक्ष यात्री एक विशेष कुर्सी पर बैठता है जिसके दोनों ओर स्प्रिंग जुड़े होते हैं (चित्र 13.8)। कुर्सी के दोलनों का आवर्तकाल अंतरिक्ष यात्री के बिना और अंतरिक्ष यात्री सहित ज्ञात किया जाता है। (समय मापन के लिए इलैक्ट्रॉनिक घड़ी का प्रयोग किया जाता है)

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2 m}{k}$$

जहाँ m कुर्सी सहित अन्तरिक्ष यात्री का द्रव्यमान है।
यदि m_0 कुर्सी का द्रव्यमान है इसे हम इस तरह भी लिख सकते हैं–

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2 m_0}{k}$$

T_1 अंतरिक्ष यात्री सहित कुर्सी का दोलन काल व T_0 अंतरिक्ष यात्री के बिना दोलनों का आवर्तकाल है।

एक को दूसरे से घटाने पर, हम पाते हैं कि–

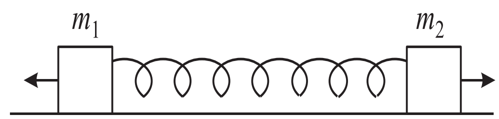
$$T_1^2 - T_0^2 = \frac{4\pi^2}{k}(\mathrm{m} - \mathrm{m}_0)$$

अत: अंतरिक्ष यात्री का द्रव्यमान

$$(m - m_0) = \frac{k}{4\pi^2}(T_1^2 - T_0^2)$$

चूंकि T_0 और k नियत हैं और ज्ञात हैं, अत: T_1 की माप द्रव्यमान में परिवर्तन को दर्शाती है।

उदाहरण 13.3: चित्र 13.9 में एक दोलन तंत्र दर्शाया गया है जिसमें m_1 तथा m_2 द्रव्यमान के दो पिण्ड k बल नियतांक के द्रव्यमानहीन स्प्रिंग से जुड़े हैं। प्रत्येक पिण्ड पर बल F लगाकर पिण्डों को एक दूसरे से दूर की ओर खींचकर छोड़ दिया जाता है। प्रत्येक द्रव्यमान की कोणीय आवृत्ति क्या होगी? पिण्ड एक क्षैतिज घर्षणरहित तल पर है।



चित्र 13.9: स्प्रिंग से संबंधित द्रव्यमानों का दोलनी निकाय

हल: मान लीजिए दूर की ओर खींचने पर पिण्डों के विस्थापन x_1 व x_2 है। स्प्रिंग में उत्पन्न तनन $(x_1 + x_2)$ होगा। इस प्रकार m_1 द्रव्यमान में त्वरण $k(x_1 + x_2)/m_1$ व m_2 में त्वरण $k(x_1 + x_2)/m_2$ है। चूंकि एक ही स्प्रिंग प्रत्येक द्रव्यमान को प्रत्यानयन बल प्रदान कर रही है। अतः निकाय जिसमें दोनों द्रव्यमान और स्प्रिंग हैं, का नेट त्वरण दोनों द्रव्यमानों के त्वरणों के योग के बराबर होगा। अतः निकाय का त्वरण है

$$a = \frac{k(x_1 + x_2)}{\left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)} = \frac{kx}{\mu}$$

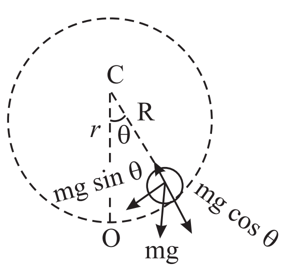
जहाँ $x = x_1 + x_2$ कमानी की लम्बाई में वृद्धि है और μ निकाय का समानीत द्रव्यमान (reduced mass) है,

$$\omega = \sqrt{k/\mu} \qquad (13.10)$$

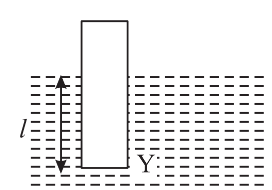
इसी तरह H_2, Cl_2, HCl, आदि द्विपरमाणुक अणुओं के कंपनों का भी विश्लेषण करके समझा जा सकता है।

पाठगत प्रश्न 13.2

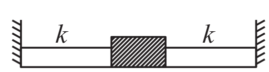
1. किसी r त्रिज्या के छोटे गोलाकार चिकने कटोरे में उसकी तली से कुछ हटकर m द्रव्यमान की एक छोटी गोलाकार गेंद रखी जाती है। गेंद के दोलनों का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए (चित्र 13.10)।



चित्र 13.10



चित्र 13.11



चित्र 13.12

2. m द्रव्यमान का एक बेलन ρ घनत्व के द्रव में ऊर्ध्वाधर तैर रहा है। द्रव के अन्दर बेलन की लंबाई l है। इसके दोलनों का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए (चित्र 13.11)।
3. एक द्रव्यमान m जो दो रबर की पट्टियों से बंधा है (चित्र 31.12) की आवृत्ति ज्ञात करें। प्रत्येक रबर की पट्टी का बल नियतांक k है।

टिप्पणियाँ

13.4 सरल आवर्त दोलित्र की ऊर्जा

जैसा कि आप जानते हैं कि सरल आवर्त गति का एक रूप निम्न है।

$$y = a \sin \omega t \qquad (13.11)$$

जब t बदलकर $t + \Delta t$, हो जाता है तो y बदलकर $y + \Delta y$ हो जाता है। अतः हम लिख सकते हैं:

$$y + \Delta y = a \sin\omega (t + \Delta t) = a \sin (\omega t + \omega\Delta t)$$

$$= a [\sin\omega t \cos \omega\Delta t + \cos\omega t \sin \omega\Delta t]$$

जब $\Delta t \to 0$, $\cos \omega\Delta t \to 1$ and $\sin \omega \Delta t \to \omega \Delta t$. Then

$$y + \Delta y = a \sin \omega t + a\, \omega\Delta t \cos \omega t. \qquad (13.12)$$

(समीकरण 13.11) को समीकरण (13.12) से घटाने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta y = \Delta t\, \omega a \cos \omega t$$

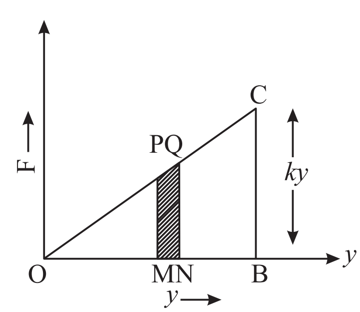
जोड़ने पर $\Delta y/\Delta t = \omega a \cos \omega t$

या $v = \omega a \text{ cost } \omega t \qquad (13.13)$

जहाँ पर $v = \Delta y/\Delta t$, यहाँ t समय पर दोलक का वेग है।

अतः दोलक की t समय पर गतिज ऊर्जा $K = (1/2)\, mv^2 = (1/2)\, \omega^2 a^2 \cos^2 \omega t \qquad (13.14)$

अब हम समय t पर दोलन की स्थितिज ऊर्जा की गणना करते हैं। जब विस्थापन y है, तो प्रत्यानयन बल ky है, जहाँ k बल नियतांक हैं इस उद्देश्य के लिए हम प्रत्यानयन बल और विस्थापन के बीच एक आरेख खींचते हैं। हम चित्र (13.13) की भांति एक सीधी रेखा पाते हैं। सरल रेखा आरेख पर हम दो बिंदुओं P और Q का चयन करते हैं और OY पर PM और QN लंब डालते हैं। चूंकि P और Q बिंदु सन्निकट हैं, अतः समलम्ब चतुर्भुज PQNM को एक आयत माना जा सकता है। आयताकार पट्टी का क्षेत्रफल (ky Δy)है। यह क्षेत्रफल प्रत्यानयन बल ky के विरुद्ध किए गए कार्य के तुल्य है, जब विस्थापन एक छोटी मात्रा



चित्र 13.13: विस्थापन y और प्रत्यानयन बल के बीच आरेख

Δy से बदलता है। ΔOBC का क्षेत्रफल विस्थापन परिवर्तन OB (= y) के तुल्य किया गया कार्य $W = \frac{1}{2}ky^2$ है। यह दोलन की स्थितिज ऊर्जा है। अतः विस्थापन y के संगत दोलन की स्थितिज ऊर्जा

$$U = \frac{1}{2}ky^2$$

लेकिन $\omega^2 = k/m$. अतः $k = m\omega^2$ का मान उपरोक्त व्यंजक में प्रतिस्थापित करने पर

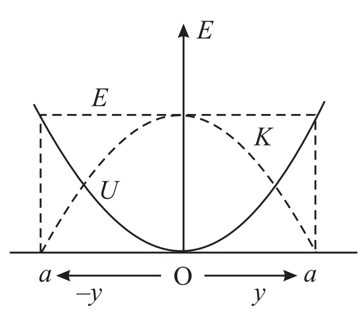
$$U = \frac{1}{2}m\omega^2y^2$$

पुनः $y = a \sin \omega t$, को इस तरह लिख सकते हैं:

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2a^2\sin^2\omega t \qquad (13.15)$$

अतः इसे समीकरण (13.14) के साथ जोड़ने पर

$$\begin{aligned} E &= U + K \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2a^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) \\ &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \end{aligned} \qquad (13.16)$$



चित्र 13.14 : स्थितिज ऊर्जा U और गतिज ऊर्जा E तथा कुल ऊर्जा व साम्य स्थिति से विस्थापन का ग्राफ।

गतिज ऊर्जा K, स्थितिज ऊर्जा U व कुल ऊर्जा E का विस्थापन के साथ आलेख चित्र 13.14 में दर्शाया गया है। ग्राफ से यह स्पष्ट है कि $y = 0$ के लिये $K = E$ और $U = 0$ साम्य स्थिति से विस्थापन की स्थिति में जब y की दूरी बढ़ती है तो गतिज ऊर्जा कम होती है और माध्य स्थिति में स्थितिज ऊर्जा बढ़ती है। माध्य स्थिति में स्थितिज ऊर्जा शून्य और गतिज ऊर्जा अधिकतम होती है। चरम बिन्दुओं पर कुल ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा होती है। लेकिन $K + U = E$ का मान स्थिर है।

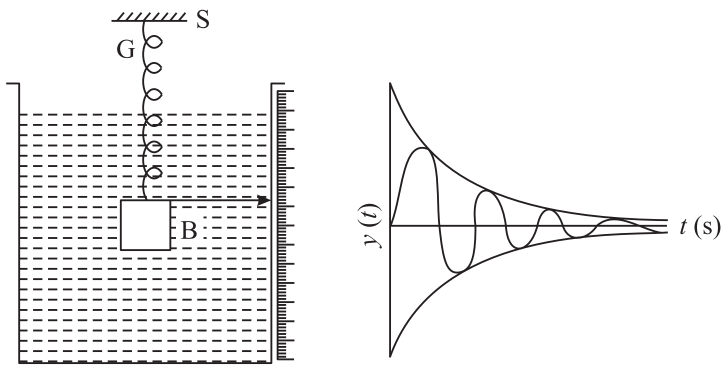
पाठगत प्रश्न 13.3

1. आवर्ती दोलित्र की गतिज ऊर्जा कब अधिकतम होगी उसकी साम्य स्थिति में या अधिकतम विस्थापन की स्थिति में? त्वरण कब अधिकतम होता है?

2. सरल लोलक का आयाम समय के साथ क्यों घटता जाता है? जब उसका आयाम घटता है तो लोलक की ऊर्जा का क्या होता है?

13.5 अवमंदित आवर्त दोलन

प्रत्येक दोलायमान निकाय के चारों ओर का माध्यम सामान्यतया श्यान होता है। जिसके फलस्वरूप प्रत्येक दोलन में इसकी कुछ ऊर्जा ऊष्मा के रूप में क्षय होती है। जैसे-जैसे दोलन की ऊर्जा का ह्रास होता है, वैसे ही दोलनों के आयाम भी कम होते हैं। लोलक के दोलनों का हवा में आयाम क्रमशः कम होता चला जाता है। ऐसे दोलनों को अवमंदित आवर्त दोलन कहते हैं। अवमंदित दोलनों को समझने के लिये हम क्रियाकलाप (13.2) करते हैं।



चित्र 13.15: (a) अवमंदित दोलन (प्रायोगिक विन्यास) (b) ग्राफीय प्रस्तुति

क्रियाकलाप 13.2

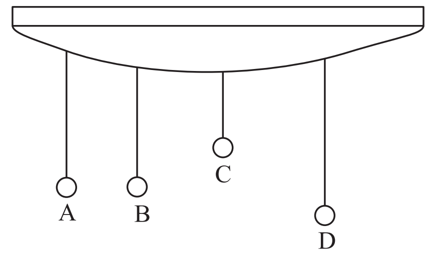
किसी सरल आवर्ती दोलित्र में एक स्प्रिंग C द्वारा धातु का गुटका (B) एक दृढ़ आधार (S) से लटका है (चित्र 13.15)। पिण्ड के नीचे एक लम्बा काँच का बेलन रखें और उसे दो-तिहाई पानी से भरें, ताकि गुटका पानी की सतह से लगभग 6 cm नीचे रहे, ओर लगभग उतना ही बेलन के तल से भी ऊपर रहे। बेलन के किनारे पर ऊर्ध्वाधर एक मिलीमीटर पैमाना चिपकाएं (गुटके में लगे संकेतक के ठीक सामने)। गुटके को कुछ सेन्टीमीटर नीचे खींचकर छोड़ दें। प्रत्येक दोलन के बाद मिलीमीटर स्केल पर संकेतक की उच्चतम स्थिति तथा समय नोट कर लें। तब समय और दोलन के आयाम के बीच ग्राफ खींचें। चित्र 13.15 (b) प्रदर्शित करता है कि आयाम समय के साथ कम होता जाता है। ऐसे दोलन अवमंदित दोलन कहलाते हैं।

13.6 मुक्त और प्रणोदित दोलनः अनुनाद

इन परिघटनाओं के बीच अंतर समझने के लिए हम निम्न क्रियाकलाप करते हैं,

टिप्पणियाँ

क्रियाकलाप 13.3



चित्र 13.16: दोलन और अनुनाद

दोनों ओर से जुड़ी हुई एक दृढ़ क्षैतिज छड़ लें। इसके सिरों को जोड़ते हुए एक ढीला किन्तु मजबूत धागा बांधें और इससे चार लोलक A, B, C, D लटकाएं जैसा कि चित्र (13.16) में दर्शाया गया है। लोलक A और B की लंबाइयाँ बराबर हैं। C की लंबाई कम और D की लंबाई A व B से अधिक है। लोलक B का गोलक भारी है। लोलक B को दोलन कराएें आप यह पाएंगे कि कुछ समय के पश्चात शेष तीनों लोलक भी दोलन करने लग जाते हैं। इसका अर्थ यह हुआ कि यदि कई लोलक युग्मित हों तो वे अपनी ऊर्जा आगे और पीछे हस्तानांतरित करते रहते हैं। इसका तरंग संचरण के लिये बहुत महत्वपूर्ण उपयोग है। आप देखते हैं कि A का आयाम सर्वाधिक होता है। क्यों? प्रत्येक लोलक एक दोलित्र है जिसकी अपनी एक स्वाभाविक आवृत्ति होती है। लोलक B जिसका द्रव्यमान सर्वाधिक है, सभी लोलकों A, C, D को अपने दोलन संचरित कर देता है। जिसके परिणामस्वरूप लोलक C और D अपनी स्वाभाविक आवृत्ति में दोलन न करके B की आवृत्ति से दोलन करने को बाध्य हो जाते हैं, इस घटना को **प्रणोदित दोलन** कहते हैं। इन लोलकों में से किसी भी गोलक को रोककर अपनी इच्छानुसार आवृत्ति से दोलन करने के लिए बाध्य किया जा सकता है। दोनों C तथा D को B की आवृत्ति से दोलन करने के लिए बाध्य किया गया है। लेकन पेन्डुलम A जिस पर B के दोलन आरोपित हैं अपेक्षाकृत अधिक आयाम के दोलन अपनी **स्वाभाविक आवृत्ति** में करता है। इस घटना को अनुनाद कहते हैं।

जब किसी दोलक को उसकी साम्य स्थिति से विस्थापित करके छोड़ दिया जाता है, तो यह अपनी साम्य स्थिति के इधर–उधर दोलन करने लग जाता है जिसकी आवृत्ति कुछ प्राचलों पर निर्भर करती है। आवृत्ति जिससे एक दोलित्र दोलन करता है उसकी **स्वाभाविक आवृत्ति** कहलाती है। जब वस्तु बाह्य आवर्ती गति के प्रभाव में दोलन करता है तो इसके दोलन **प्रणोदित दोलन** कहलाते हैं। **प्रणोदित दोलन** में निकाय अंततोगत्वा बाह्य बल की आवृत्ति से दोलन करने लग जाता है। दोलनकारी निकाय जिस पर दोलन आरोपित किए जाते हैं, **चालित** या **प्रणोदित** और जो दोलनकर्त्ता बल लगाता है, वह **चालक** या **प्रणोदक** कहलाता है। प्रणोदित दोलनों का एक विशेष उदाहरण यह है जबकि चालित और चालक दोनों की स्वाभाविक आवृत्तियाँ समान हों। इसे अनुनाद कहते हैं। अनुनादित दोलनों में चालक व चालित एक दूसरे के आयामों को प्रबल करते हैं और इसलिए उनके आयाम अधिकतम होते हैं।

पाठगत प्रश्न 13.4

1. जब कम्पन (दोलन) करते हुए स्वरित्र की भुजा को मेज पर दबाया जाताहै तो तेज ध्वनि सुनी जाती है, क्या यह घटना अनुनाद प्रदर्शित करती है या प्रणोदित दोलन? अपना उत्तर कारण सहित दीजिए। तेज ध्वनि उत्पन्न होने के क्या कारण है?

2. विशिष्ट संगीत उपकरणों के साथ ध्वनि बाक्स क्यों लगे रहते हैं?

रहस्यमय घटनाएँ और अनुनाद

1940में वांशिगटन, (अमेरिका) टेकोमा नैरोज सस्पेन्शन ब्रिज उद्घाटन के बाद एक आंधी के दौरान छह महीनों में ही ध्वस्त हो गया। झोंके में बहने वाली हवा की आवृत्ति पुल की स्वाभाविक आवृत्ति के बराबर थी। जिसके कारण इस पुल का आयाम बढ़ता चला गया। आयाम बढ़ते-बढ़ते पुल के ढांचे पर इसकी सह्यता-सीमा से अधिक आघात पहुंचने के कारण पुल ध्वस्त हो गया।

झूलने वाले पूल (suspension bridge) के ध्वस्त होने की घटनाएं सैनिकों के कदम से कदम मिलाकर पुल को पार करने (परेड करने) पर भी हैं। इसलिए सैनिकों को पुल पर परेड करते हुए चलनेका आदेश नहीं दिया जाता है।

कारखानों की चिमनियाँ और प्रशीतक मीनारें (cooling towers) भी कभी-कभी हवा के कारण दोलन करती हुई ध्वस्त हो जाती हैं।

2.आपने कुछ गायकों की रहस्यमयी शक्तियों के बारे में सुना होगा। जब वे गाते हैं तो सभागृह की खिड़कियों के शीशे टूट जाते हैं। ये ठीक संगती के उस स्वर में गाते हैं जिसकी आवृत्ति खिड़की के शीशों की स्वाभाविक आवृत्ति से मिलती है।

3.आपको जिज्ञासा होगी कि रेडियो या टेलीविजन में एक ट्यूनर की सहायता से आप एक विशेष स्टेशन कैसे पकड़ लेते हैं? ट्यूनर वास्तव में एक इलैक्ट्रॉनिक दोलित्र है जिसमें आवृत्ति परिवर्तन की व्यवस्था होती है। जब ट्यूनर की आवृत्ति एक विशेष स्टेशन द्वारा उत्सर्जित आवृत्ति से मेल खाती है, तो अनुनाद होता है और एण्टीना उस स्टेशन द्वारा प्रसारित होने वाला कार्यक्रम पकड़ लेता है।

आपने क्या सीखा

- आवर्त गति ऐसी गति है, जिसकी कुछ निश्चित समय अंतरालों के पश्चात पुनरावृत्ति होती है।
- दोलनी गति एक माध्य स्थिति के इर्द-गिर्द होने वाली गति है। सभी दोलनी गतियाँ आवर्ती होती हैं। लेकिन सभी आवर्ती गतियाँ आवश्यक रूप से दोलनी नहीं होती हैं।
- सरल आवर्ती गति एक साम्य स्थिति के इर्द-गिर्द होने वाली गति है जो एक प्रत्यानयन बल के प्रभाव के अन्तर्गत होती है एवं जिसका मान साम्य स्थिति के कण के विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है। इसकी दिशा सदैव माध्यस्थिति की ओर होती है।
- किसी कण को एक दोलन पूरा करने में लगे समय को उसका आवर्तकाल कहते हैं।
- आवृत्ति किसी दोलक द्वारा एक सेकन्ड में पूरे किए गये दोलनों की संख्या होती है।

- कलाकोण वह कोण होता है जिसकी ज्या और कोज्या किसी क्षण पर कण की स्थिति व गति की दिशा प्रदर्शित करती है।

- कोणीय आवृत्ति कलाकोण के परिवर्तन की दर होती है। याद रखें $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ जहाँ ω रेडियन प्रति सेकंड में कोणीय आवृत्ति, ν हट्र्ज (Hz) में आवृत्ति और T सेकन्ड में आवर्तकाल है।

- सरल आवर्त गति का समीकरण है:

$$y = a \sin(\omega t + \phi_0)$$

अथवा

$$y = a \cos(\omega t + \phi_0)$$

जहाँ पर y किसी समय t में माध्य स्थिति से विस्थापन है, ϕ_0 ($t = 0$) पर प्रारंभिक कला कोण।

- जब एक दोलन करने वाला पिण्ड बिना किसी बाह्य दोलनी पिण्ड के प्रभाव के स्वयं के दोलन करता है तो उसके दोलन मुक्त दोलन कहलाते हैं। यदि कोई दोलनी पिण्ड A एक बाह्य पिण्ड B जिसे चालक कहते हैं, के द्वारा चालित है और A को यदि B की आवृत्ति से दोलन करने को बाध्य किया जाता है, तब A के दोलनों को प्रणोदित दोलन कहा जाता है। यदि चालक की आवृत्ति चालित की स्वाभाविक आवृत्ति के बराबर हो, तो इस घटना को अनुनाद कहते हैं।

पाठांत प्रश्न

1. आवर्ती और दोलनी गति में भेद कीजिए।

2. सरल आवर्त गति क्या है?

3. निम्न में से कौन-सा फलन प्रदर्शित करता है: (i) एक सरल आवर्त गति (ii) आवर्ती किन्तु सरल आवर्ती नहीं (iii) अनावर्ती गति। प्रत्येक आवर्ती गति का आवर्तकाल बताइए।

   (1) $\sin \omega t + \cos \omega t$ (2) $1 + \omega^2 + \omega t$

   (3) $3 \cos (\omega t - \frac{\pi}{4})$

4. हुक के नियम का पालन करने वाले एक स्प्रिंग से लटके 0.1 kg द्रव्यमान के दोलनों का आवर्तकाल 1 सेकन्ड है तो उस स्प्रिंग से लटके 0.9 kg द्रव्यमान के दोलनों का आवर्तकाल क्या होगा?

5. कलाकोण क्या है? इसका कोणीय आवृत्ति से क्या संबंध है?

6. जब एक सरल आवर्ती दोलित्र का आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ है तो सरल लोलक का आवर्तकाल गोलक के द्रव्यमान पर निर्भर क्यों नहीं करता है?

7. सरल आवर्त गति करते कण के त्वरण का मान कब अधिकतम होता है? कब प्रत्यानयन बल अधिकतम होता है?

8. दिखाइए कि सरल आवर्त गति एकसमान वृत्ताकार गति के वृत्त के किसी व्यास पर प्रक्षेप होती है। सरल आवर्त गति करने वाले दोलित्र के आवर्तकाल के लिए व्यंजक को उसके द्रव्यमान तथा बल नियतांक के पदों में ज्ञात कीजिए।

9. एक सरल आवर्त दोलित्र की तात्कालिक गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा तथा सम्पूर्ण ऊर्जा के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए।

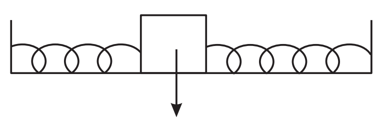
10. आलेख द्वारा दर्शाइए कि किसी सरल आवर्त दोलित्र की स्थितिज ऊर्जा U, गतिज ऊर्जा K व सम्पूर्ण ऊर्जा E उसकी माध्य स्थिति से विस्थापन के साथ किस प्रकार बदलती है?

11. किसी कण के लिए किसी क्षण किसी स्थिर बिन्दु से विस्थापन समीकरण $x = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ से दिया जाता है। क्या कण की गति सरल आवर्त गति है? यदि उत्तर नहीं में हैं, तो समझाइए कि ऐसा क्यों है? यदि उत्तर हाँ में है तो दोलन के आयाम और कलाकोण की गणना कीजिए।

12. एक सरल लोलक के दोलनों का आयाम 0.04 मीटर तथा आवर्तकाल 10 सेकन्ड है। इसके अधिकतम वेग की गणना कीजिए।

13. कल्पना कीजिए कि एक गेंद को पृथ्वी के केन्द्र से उसके आर-पार बनाए गए घर्षण रहित सुरंग में डाल दिया जाता है। पृथ्वी की त्रिज्या और गुरुत्वजनित त्वरण के पदों में गेंद के दोलनों के आवर्तकाल की गणना कीजिए।

14. चित्र 13.17 में एक $m = 2$ kg द्रव्यमान का पिण्ड दो कमानियों से जुड़ा हुआ दिखाया गया है जिनमें से प्रत्येक स्प्रिंग का बल नियतांक $k = 400$ न्यूटन/मीटर है। पिण्ड को साम्य स्थिति से 0.05 मीटर विस्थापित करके छोड़ दिया जाता है। गणना कीजिए (a) पिण्ड की कोणीय आवृत्ति (b) इसकी अधिकतम चाल, (c) इसका अधिकतम त्वरण और विरामावस्था में इसके विरूद्ध क्षय हुई कुल ऊर्जा कितनी होगी?



चित्र13.17

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

13.1

1. एक गति जो एक निश्चित समय के अन्तराल के बाद दोहराई जाती है, एक आवर्ती गति कहलाती है। इसी प्रकार की गति यदि किसी निश्चित बिंदु के इर्द-गिर्द होती है तो वह दोलनी गति कहलाती है। एक आवर्तगति दोलनी गति हो भी सकती है और नहीं भी हो सकती है, लेकिन दोलनी गति आवर्ती होती है।

2. (ii), (iv), (v);

3. (i) किसी लोलक का किसी साम्य बिंदु के इर्द–गिर्द की गति।

   (ii) अपने कक्ष में किसी ग्रह की गति।

13.2

1. जब गेद को साम्य स्थिति से x विस्थापित किया जाता है, तो उस पर प्रत्यानयन बल = $mg \sin\theta = mg\,\theta = mg\,x/r$. $\therefore\ \omega = \sqrt{g/r}$.

2. y दूरी नीचे दबाने पर बेलन पर ऊपर की ओर उत्प्लावक बल $y\alpha\sigma g$ लगता है। अत:

   $\omega^2 = \dfrac{\alpha\sigma g}{m}$ α बेलन की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल और $m = \alpha L\rho$। उत्पलावन के नियम के अनुसार $\alpha h\rho g = \alpha lrg$

   $\Rightarrow \qquad h\rho = \sigma\, l$

   m गुटके का द्रव्यमान अत: $\omega^2 = g/l$ or $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

3. $\omega^2 = k/m$ अत: $v = 1/2\pi\sqrt{k/m}$ स्मरण रहे कि जब द्रव्यमान विस्थापित होता है, तो केवल एक ही बिंदु पर प्रत्यानयन बल लगता है।

13.3

1. गतिज ऊर्जा माध्य स्थिति या साम्य स्थिति में अधिकतम होती है। त्वरण अधिकतम होताहै, जब विस्थापन अधिकतम होता है।

2. जब लोलक दोलन करता है तो यह वायु के श्यान प्रतिरोध एवं अवलंबन के घर्षण की, जिस पर यह लटकाया जाता है, के विरुद्ध कार्य करता है। यह कार्य ऊष्मा के रूप में क्षय होता है इसके परिणामस्वरूप लोलक का आयाम घटता है।

13.4

1. जब एक दोलित्र जिसको चालक कहते हैं, अपने दोलन का बल दूसरे दोलनी निकाय पर लगाता है,तो द्वितीय निकाय प्रथम निकाय की आवृत्ति से दोलन करने के लिये बाध्य होता है, इस परिघटना को प्रणोदित दोलन कहते हैं। प्रणोदित दोलनों की विशिष्ट दशा में जिसमें चालक की आवृत्ति चालित निकाय की आवृत्ति के बराबर हो, उस परिघटना को अनुनाद कहते हैं।

2. मेज की ऊपरी सतह अपनी स्वाभाविक आवृत्ति की अपेक्षा स्वरित्र की आवृत्ति से दोलन करने को बाध्य होती है। इसलिये यह प्रेक्षण प्रणोदित दोलन दर्शाता है। चूंकि एक बड़ा तल दोलन करता है,अत: ध्वनि की तीव्रता बढ़ जाती है।

3. ध्वनि बोर्ड या बॉक्स किसी यंत्र द्वारा उत्पन्न स्वर की आवृत्ति से दोलन करने के लिए बाध्य होता है, चूंकि एक बड़ा क्षेत्र दोलन करता है, इसलिए उत्पन्न स्वर की तीव्रता बढ़ जाती है। और इसकी अवधि घट जाती है।

पाठान्त प्रश्नों के उत्तर

4. 3 s

11. $A = \sqrt{a^2 + b^2}, \theta = \tan^{-1} \frac{a}{b}$

12. $\frac{2}{\pi} \times 10^{-3} \, \text{m s}^{-1}$

14. (a) 14.14 s^{-1} (b) 0.6 m s^{-1} (c) 0.3 m s^{-2} (d) 0.5 J

14

तरंग परिघटनाएं

आपने ध्यान दिया होगा कि जब किसी तालाब के शान्त पानी में एक पत्थर गिराया जाता है तो उसके पानी पर टकराने के स्थान से संकेन्द्रीय वलय प्रकट होने लगते हैं और पानी की सतह पर फैल जाते हैं। इन वलयों में पानी एकान्तर रुप से ऊँचा व नीचा होता रहता है। यदि पानी की सतह पर एक स्ट्रॉ का टुकड़ा डाल दें तो आप देखेंगे कि वह अपने स्थान पर ही ऊपर नीचे होता रहता है। यहाँ पानी के कण अपने-अपने स्थान पर ऊपर-नीचे गति कर रहे हैं, फिर भी 'कुछ' है जो आगे बढ़ता जाता है। इस को हम ***तरंग*** कहते हैं। तरंगें कई प्रकार की होती हैं प्रगामी और अप्रगामी; यांत्रिक तथा विद्युत' चुम्बकीय। तरंगों का वर्गीकरण अनुर्दर्ध्य तथा अनुप्रस्थ तरंगो के रुप में भी किया जा सकता है, जो इस पर निर्भर करता है कि तरंग के गमन की दिशा तथा माध्यम के कणों की गति की दिशा (यांत्रिक तरंगों) या विद्युत व चुम्बकीय सदिशों की गति की दिशा (विद्युत-चुम्बकीय तरंगें में) में परस्पर क्या संबंध है। तरंगे हमारे अस्तित्व से घनिष्ट रूप से जुड़ी हैं।

वायु में ध्वनि-तरंगों के गमन के कारण हमारे लिये सुनना सम्भव होता है। प्रकाश की तरंगों के कारण (जो निर्वात से भी गमन कर सकती हैं) हम वस्तुओं को देख पाते हें और प्रकाश की चाल से विभिन्न सिग्नलों को ले जाने वाली रेडियो तरंगे विभिन्न प्रकार के संप्रेषणों द्वारा हमें हमारे प्रिय जनों से जोड़ती हैं। वास्तव में तरंग परिघटना सर्वप्रयोजन है।

वाद्ययन्त्रों, रेडियो, टी.वी. की कार्यप्रणाली को समझने के लिए यह आवश्यक है कि हम तरंग परिघटनाओं को समझें। क्या आप तरंगों के बिना जीवन के स्वरुप की कल्पना कर सकते हैं? इस पाठ में आप तरंगों के मूल गुण तथा तरंग परिघटनाओं का अध्ययन करेंगे।

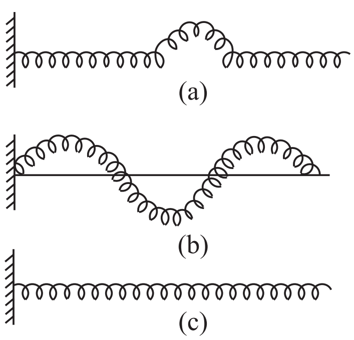
उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के पश्चात् आप:

- अनुदैर्घ्य व अनुप्रस्थ तरंगों के संचरण की व्याख्या कर सकेंगे और $v = \nu\lambda$ संबंध को स्थापित कर सकेंगे;

- किसी गैस में अनुदैर्घ्य तरंगों के वेग के लिये न्यूटन का सूत्र लिख सकेंगे और इसमें लाप्लास के संशोधन की व्याख्या कर सकेंगे;
- अनुदैर्घ्य तरंगों का वेग किन कारकों पर निर्भर करता है, इसकी विवेचना कर सकेंगे;
- तनित डोरियों में अनुप्रस्थ तरंगों के बनने की व्याख्या कर सकेंगे;
- किसी सरल आवर्त तरंग के लिये समीकरण स्थापित कर सकेंगे;
- अध्यारोपण के सिद्धांत के आधार पर, विस्पन्दों, व्यतिकरण तथा तरंगों के कला परिवर्तन, की व्याख्या कर सकेंगे;
- आर्गन पाइप व तनित डोरियों में अप्रगामी तरंगों के बनने की व्याख्या कर सकेंगे तथा इनके अधिस्वरों की विवेचना कर सकेंगे;
- डाप्लर प्रभाव की विवेचना कर सकेंगे तथा इस का उपयोग यांत्रिक व प्रकाशीय निकायों के लिये कर सकेंगे;
- विद्युत चुम्बकीय तरंगों के गुणों को समझा सकेंगे; तथा
- विद्युत-चुम्बकीय स्पैक्ट्रम के विभिन्न भागों के तरंग दैर्घ्यों के परास और उनके उपयोग बता सकेंगे।

14.1 तरंग-संचरण



चित्र. 14.1 : स्लिंकी में तरंग गति
(a) स्लिंकी में स्पंद
(b) अनुप्रस्थ तरंग
(c) अनुदैर्ध्य तरंग

स्ट्रॉ के टुकड़े की गति से आप यह समझ सकते हैं कि तरंगें ऊर्जा की वाहक हैं; ये द्रव्य का वहन नहीं करतीं। इस का एक सुस्पष्ट प्रदर्शन ज्वार-भाटे की तरंग में देखा जाता है। क्या आप को गहरे सागर के भीतर भूकंप से उत्पन्न सुनामी तरंगों के कारण हुए विनाश की याद है? इन तरंगों ने इन्डोनेशिया, थाइलैंड, श्रीलंका व भारत पर प्रहार किया था। इसमें 20 m ऊँची तरंगें उत्पन्न हुई थीं और बहुत सी जाने गई थीं।

किसी माध्यम में तरंगे किस प्रकार गति करती हैं, इसे समझने के लिये आइए एक क्रिया कलाप करें।

क्रियाकलाप 14.1

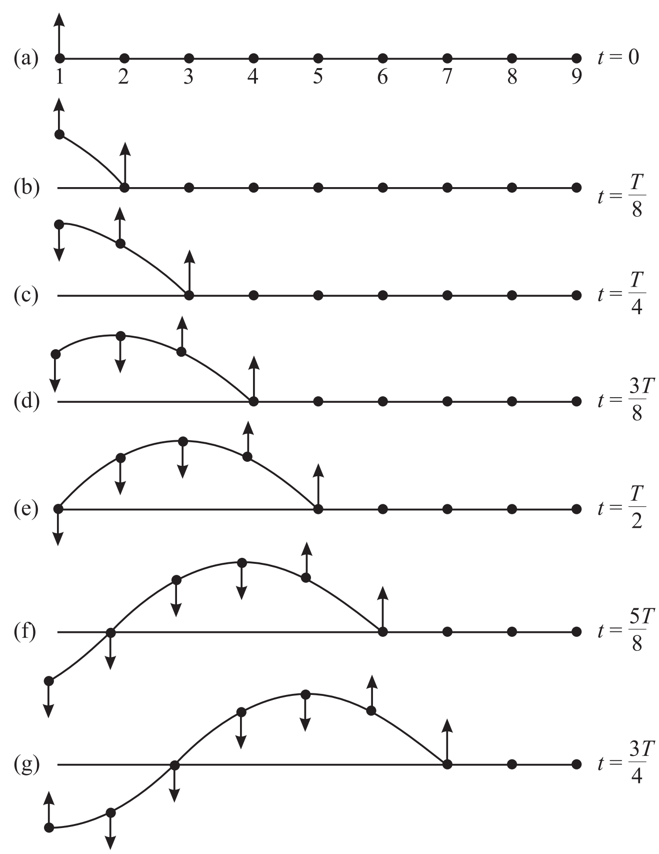
एक स्लिंकी (लम्बी स्प्रिंग की कुंडली) लीजिए और इसे किसी चिकने मेज या फर्श पर रखिए। स्लिंकी के एक सिरे को दृढ़ता से जड़ दीजिए और दूसरे सिरे को खुला (मुक्त) छोड़ दीजिए ताकि इस सिरे को हिलाया जा सके। इस खुले (या मुक्त) सिरे को अपने हाथ में पकड़ कर

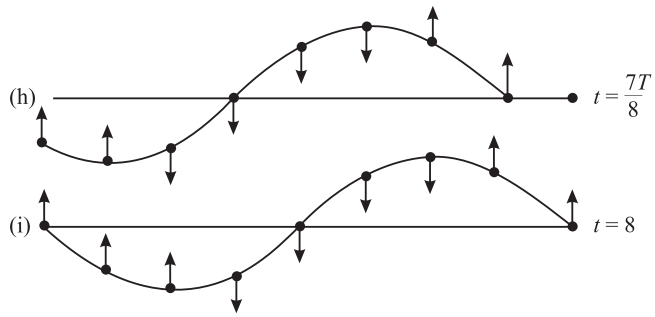
दाईं ओर को झटका दीजिए [चित्र 14.1(a)]। आप देखेंगे कि स्लिंकी में एक स्पन्द बन जाता है जो स्थिर सिरे की ओर किसी निश्चित चाल से गति करता है। यह *स्पंद* एक अल्पकालिक तरंग है। स्लिंकी के मुक्त सिरे को दायें-बाये हिलाते रहिए। आप स्पंदों को लगातार स्थिर सिरे की ओर चलते हुए देखेंगे। यह स्प्रिंग से होकर चलती हुई ***अनुप्रस्थ तरंग*** है। [चित्र. 14.1 (b)]।

एक अन्य प्रकार की तरंग भी आप किसी स्लिंकी में उत्पन्न कर सकते हैं। इसके लिये स्लिंकी के स्प्रिंग को खींचकर फर्श या मेज पर सीधा रखिए और इसके खुले सिरे को हाथ से स्प्रिंग की लम्बाई के अनुदिश स्थिर सिरे की ओर शीघ्रता से धक्का दीजिए। सम्पीडन का एक स्पंद स्प्रिंग से होकर जाता है। अपने हाथ से स्प्रिंग के मुक्त सिरे को एक समान गति से आगे-पीछे चलाते रहने पर आप सम्पीडनों और विरलनों को एकान्तर रुप से स्प्रिंग के अनुदिश जाते हुए देख सकते हैं। इन्हें ***अनुदैर्घ्य*** तरंग कहते हैं [चित्र 4.1(C)]।

14.1.1 अनुप्रस्थ तरंगों का संचरण

चित्र 14.2 को देखिए। यह तरंग-संचरण के लिए एक यांत्रिक मॉडल है। इसमें समान दूरियों पर स्थित समान द्रव्यमान की गोलकार गोलियों की एक कतार है जो परस्पर एक समान स्प्रिंगों द्वारा जुड़ी हुई हैं। मान लीजिए किसी प्रकार बाईं ओर से नम्बर-1 गोली, T आवर्तकाल से, गोलियों की कतार के लम्बवत् सरल आवर्त गति करती है। विराम के जड़त्व के कारण सभी गोलियाँ एक साथ दोलन नहीं करेंगी। एक गोली के बाद दूसरी गोली फिर उससे अगली एक-एक कर गतिमान होती हैं। मान लीजिए एक गोली से दूसरी





चित्र. 14.2 : जब किसी डोरी में अनुप्रस्थ तरंग उत्पन्न होती है तो T/8 अंतराल पर इसके कणों का तात्कालिक प्रोफाइल ऊपर दर्शाए अनुसार होता है।

अगली गोली तक विक्षोभ के पहुँचने में $T/8$ s समय लगता है। अर्थात् $T/8$ s के अन्तराल में विक्षोभ कण संख्या 1 से कण संख्या 2 तक पहुँच जाता है। इसी प्रकार अगले $T/8$ s अन्तराल में विक्षोभ कण संख्या 2 से कण संख्या 3 तक पहुँच जाता है और यह इसी प्रकार आगे चलता रहता है। चित्र 14.2 के भाग (a) से (i) $T/8$ s के समय अन्तराल पर कणों की तात्कालिक स्थिति दिखाई गई है। (चित्रों में तीर के निशान यह प्रकट करते हैं कि विभिन्न कण उस समय किस दिशा में गति करने वाले हैं।) आप पाएंगे कि

(i) $t = 0$ समय पर, सभी कण अपनी-अपनी मूल स्थिति में हैं।

(ii) $t = T$ समय पर पहला, पाँचवां तथा नौवां कण अपनी-अपनी मूल स्थिति में हैं। पहला तथा नौवां कण ऊपर की ओर गति करने को हैं तथा पाँचवां कण नीचे की ओर गति करने को है। तीसरा व सातवां कण अधिकतम विस्थापन की स्थिति पर है किन्तु वे क्षैतिज अक्ष की विपरीत दिशा में हैं। चित्र 14.1 (a) में अंकित कणों की तात्कालिक स्थितियों को जोड़ने वाला आवरण चित्र 14.2 (i) के समान होगा और यह एक *अनुप्रस्थ तरंग* को निरुपित करता है। तीसरे व सातवें कणों की स्थितियाँ क्रमश: गर्त तथा श्रृंग को निरूपित करती हैं।

यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि यद्यपि डोरी में तरंग तो इसकी लम्बाई के अनुदिश गति करती है पर उसके सभी कण अपनी-अपनी साम्य-स्थिति पर, समान आवर्तकाल (T) तथा आयाम (A) से, ऊपर-नीचे दोलन करते रहते हैं। डोरी के स्थिर सिरे पर पहुँचने तक तरंग *प्रगामी* रहती है।

किसी तरंग गति में समान कला में कम्पन करने वाले दो निकटतम कणों के बीच की दूरी को तरंगदैर्ध्य कहा जाता है। इसे ग्रीक अक्षर λ (लैम्बडा) से निरुपित करते हैं।

स्पष्ट है कि किसी तरंग द्वारा λ दूरी तय करने में T समय लगता है (देखिये चित्र 14.2)। अत: तरंग का वेग,

$$\upsilon = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \frac{\lambda}{T} \qquad (14.1)$$

किन्तु, 1/T= v (न्यू), तरंग की आवृत्ति। अतः

$$\upsilon = v\lambda \qquad (14.2)$$

यदि दो ऐसे क्रमागत कण जो गति की समान स्थिति में हैं, एक दूसरे से λ दूरी पर हों तो उनके बीच कलान्तर 2π होता है। अतः एकांक दूरी पर कला परिवर्तन,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (14.3)$$

हम k को *संचरण नियतांक* कहते हैं। याद कीजिए कि ω (ओमेगा) प्रति एकांक समय में कला परिवर्तन को निर्दिष्ट करता है, किन्तु T समय में कला परिवर्तन 2π होता है। अतः

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi v \qquad (14.4)$$

समीकरण (14.3) को समीकरण (14.4) से भाग करने पर, हमें तरंग वेग के लिए व्यंजक प्राप्त हो जाता है:

$$\upsilon = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi v}{2\pi/\lambda}$$

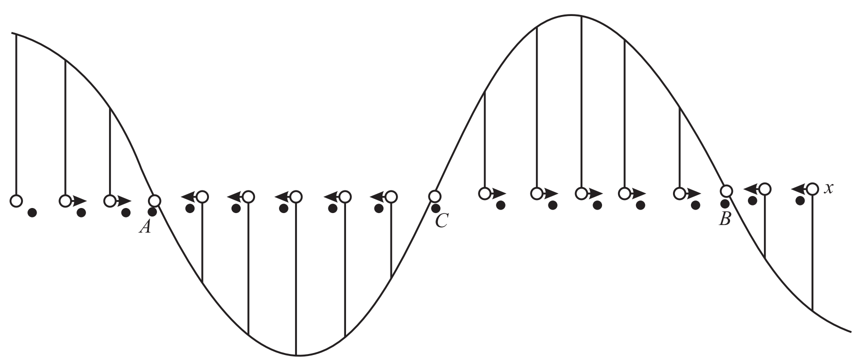
अथवा,

$$\upsilon = v\lambda \qquad (14.5)$$

आइए अब हम स्पष्ट करें कि अनुदैर्ध्य तरंगों का संचरण किस प्रकार होता है।

14.1.2 अनुदैर्ध्य तरंग का संचरण

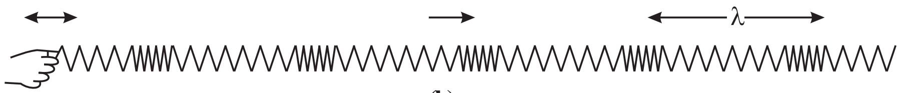
किसी अनुदैर्ध्य तरंग में माध्यम के कणों का विस्थापन तरंग-संचरण की दिशा के अनुदिश होता है। चित्र 14.3 में खोखले गोले किसी माध्यम के आपस में समान दूरियों पर स्थित कणों की मूल स्थितियों को



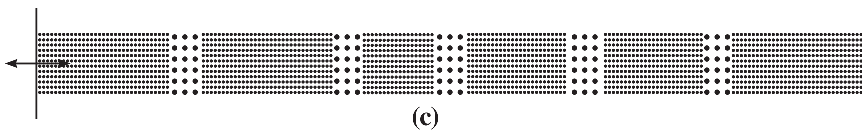
चित्र. 14.3 : अनुदैर्ध्य तरंग का ग्राफीय निरुपण

निरुपित करते हैं। चित्र में किसी निश्चित समय पर अनके अनुदैर्ध्य विस्थापन को (अपेक्षाकृत आवर्धित कर) तीरों से दिखाया गया है। आप देखेंगे कि न तो इन तीरों की लम्बाई समान है और न वे समान दिशा में हैं। यह ठोस गोलों की स्थिति से स्पष्ट है जो तीरों के नोकों के अनुरुप कणों की तात्कालिक स्थिति दिखाते हैं। दाई ओर के विस्थापनों को ग्राफ में धनात्मक y-अक्ष पर तथा बाई ओर के विस्थापनों को ग्राफ में धनात्मक y-अक्ष पर दिखाया गया है।

दाई ओर के प्रत्येक तीर के लिये हम एक रेखा अनुपातानुसार ऊपर की ओर खींचते हैं। इसी प्रकार बाई ओर के प्रत्येक तीर के लिये अनुपातानुसार एक रेखा नीचे को खींचते हैं। इन रेखाओं के सिरों को मिलाते हुए निष्कोण वक्र खींचने पर हमें जो ग्राफ प्राप्त होता है वह अनुप्रस्थ तरंग के विस्थापन-समय वक्र के समान ही होता है।



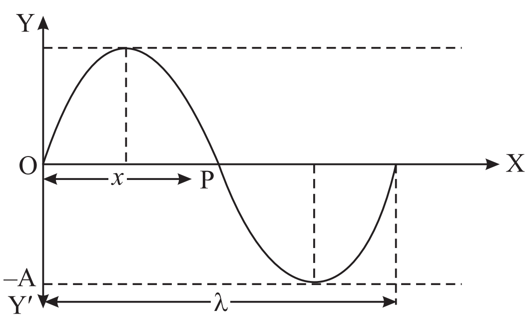
(b)



(c)

चित्र. 14.4 : किसी स्प्रिंग में अनुदैर्ध्य तरंग ध्वनि तरंगों के समरुप होती हैं।

14.1.3 सरल आवर्त तरंग का एकविमीय समीकरण



चित्र. 14.5 : x-दिशा में गमन करती एक सरल आवर्त तरंग

एक सरल आवर्त तरंग पर विचार करें जो OX के अनुदिश गमन कर रही है (चित्र. 14.5)। मान लीजिए कि यह तरंग अनुप्रस्थ है और माध्यम के कणों के कम्पन YOY′ के अनुदिश हैं। $t = 0$ समय पर विस्थापन को हम निम्नलिखित समीकरण से प्रकट करते हैं–

$$y = a \sin \omega t \tag{14.6}$$

तब उस समय P बिन्दु पर कम्पनों की कला y से ϕ कोण पीछे है। तब

$$y = a \sin (\omega t - \phi) \tag{14.7}$$

माना OP = x। क्योंकि प्रति एकांक दूरी कला परिवर्तन k है, हम लिख सकते हैं, $\phi = kx$। अतः समीकरण (14.7) को इस प्रकार लिखा जा सकता है–

$$y(x, t) = a \sin (\omega t - kx) \tag{14.8}$$

क्योंकि $\omega = 2\pi/t$ और $k = 2\pi/\lambda$, समीकरण (14.8) को इस प्रकार भी लिख सकते हैं

$$y\,(x, t) = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \tag{14.9}$$

तरंग वेग ($\upsilon = \lambda/T$) के संदर्भ में, इस समीकरण को निम्न प्रकार भी व्यक्त किया जा सकता है

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\upsilon t - x) \qquad (14.10)$$

समीकरण (14.8) को व्युत्पन्न करते हुए हमने O बिन्दु पर तरंग की प्रारंभिक कला को 0 (शून्य) लिया था। यदि O पर प्रारंभिक कला कोण ϕ_0 हो तो, तरंग का समीकरण होगा।

$$y\,(x,t) = a \sin [(\omega t - kx) + \phi_0] \qquad (14.11)$$

किसी तरंग के दो बिन्दुओं के बीच कलान्तर

आइए दो सरल आवर्त्ती तरंगों पर विचार करें जो OX अक्ष के अनुदिश गमन कर रही हैं और निम्नलिखित समीकरणों द्वारा निरूपित हैं

$$y = a \sin (\omega t - kx) \qquad (14.8)$$

एवं

$$y = a \sin [\omega t - k\,(x + \Delta x)] \qquad (14.12)$$

इनके बीच कलान्तर है

$$\Delta\phi = k\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}.\Delta x = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) \qquad (14.13)$$

जहाँ Δx तरंग पर स्थित इन दो बिन्दुओं के बीच पथान्तर है। यहाँ ऋणात्मक चिह्न यह संसूचित करता है कि जो कण अधिक दूरी पर है वह समान कला को बाद में प्राप्त करेगा।

एक ही स्थिति पर समय अन्तराल Δt में कलान्तर

हम एक ही स्थिति में किसी तरंग की कला पर Δt समय के अन्तराल पर विचार करते हैं, किसी क्षण t_1 पर कला

ϕ_1 का मान होगा

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{T} t_1 - \frac{2\pi}{\lambda} x$$

और क्षण t_2 पर, कला

$$\phi_2 = \frac{2\pi}{T} t_2 - \frac{2\pi}{\pi} x.$$

तब समय अन्तराल $(t_2 - t_1)$ पर कलान्तर,

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{T}(t_2 - t_1)$$

$$= 2\pi\nu\,(t_2 - t_1) \qquad [14.13(a)]$$

$$= 2\pi\nu\,(\Delta t) \qquad [14.13(b)]$$

उदाहरण 14.1 : एक प्रगामी आवर्त तरंग का समीकरण $y = 10^{-4} \sin (100\pi t - 0.1\pi x)$ है, तो गणना कीजिए, इसकी (i) आवृत्ति, (ii) तरंगदैर्घ्य तथा (iii) चाल, यदि x और y मीटर में हैं।

हल: किसी प्रगामी तरंग के तरंग के समीकरण

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

से तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है, (i) $2\pi v = 100\,\pi \Rightarrow v = 50$ Hz

(ii) $\frac{2\pi}{\lambda} = 0.1\,\pi \Rightarrow \lambda = 20$ m

(iii) $\upsilon = v\lambda = 1000\ ms^{-1}$

14.1.4 अनुप्रस्थ और अनुदैर्घ्य तरंगें

अब हम अनुप्रस्थ और अनुदैर्घ्य तरंगों पर विचार करते हैं और उनके बीच अन्तरों का संक्षेप में वर्णन करते हैं।

अनुप्रस्थ तरंगें	अनुदैर्घ्य तरंगें
(i) माध्यम के कणों का विस्थापन तरंग के संचरण की दिशा के लम्बवत् होता है।	(i) कणों का विस्थापन तरंग के संचरण की दिशा में ही होता है।
(ii) यह श्रृंग व गर्त के रूप में माध्यम में संचरित होते हुए दिखाई पड़ती है।	(ii) इसमें संपीडन व विरलन एकान्तर रुप से आगे गति करते हुए दृष्टिगत होते हैं।
(iii) ये केवल ठोसों में या द्रवों की सतहों के ऊपर ही प्रवाहित हो सकती है।	(iii) ये ठोस, द्रव तथा गैस, सभी से प्रवाहित हो सकती है।
(iv) अनुप्रस्थ तरंगों में विस्थापन समय वक्र तरंग का वास्तविक चित्र प्रस्तुत करता है।	(iv) अनुदैर्घ्य तरंगों में विस्थापन-समय वक्र, केवल किसी निश्चित समय में, विभिन्न बिंदुओं पर माध्यम के कणों की स्थिति को निरुपित करता है।

अनुदैर्घ्य व अनुप्रस्थ तरंगों के संचरण के लिये किसी माध्यम के आवश्यक गुणधर्म

(i) माध्यम के कणों का कुछ द्रव्यमान अवश्य होना चाहिए, (ii) माध्यम में प्रत्यास्थता अवश्य होनी चाहिए, अनुदैर्घ्य तरंगों के संचरण के लिए माध्यम में आयतन प्रत्यास्थता आवश्यक है, किन्तु, अनुप्रस्थ तरंगों के लिये दृढ़ता (या अपरुपण) गुणांक की आवश्यकता होती है। जबकि प्रकाश तरंगों या अन्य विद्युत-चुम्बकीय तरंगों को जो अनुप्रस्थ होती हैं, संचरण के लिए किसी द्रव्यात्मक माध्यम की आवश्यकता नहीं होती।

पाठगत प्रश्न 14.1

1. अनुदैर्घ्य व अनुप्रस्थ तरंगों में क्या-क्या अन्तर हैं?
2. कलान्तर तथा पथान्तर में सम्बंध लिखिए।

3. दो सरल आवर्त तरंगों को निम्न लिखित दो समीकरणों से निरुपित किया जाता है;

$y_1 = a \sin(\omega t - kx)$ और $y_2 = a \sin[(\omega t - kx) + \phi]$ इन दो तरंगों के बीच कलान्तर क्या है?

14.2 किसी प्रत्यास्थ माध्यम में अनुदैर्घ्य तथा अनुप्रस्थ तरंगों का वेग

किसी गैस में ध्वनि के वेग के लिए सूत्र प्राप्त करते समय, न्यूटन ने यह मान लिया था कि किसी गैस से होकर ध्वनि के संचरण में, संपीडन और विरलन, समतापी स्थितियों में बनते हैं। अर्थात् आयतन तथा दाब में परिवर्तन स्थिर ताप पर होते हैं। इन परिस्थितियों में, न्यूटन के अनुसार, किसी गैस में ध्वनि का वेग,

$$\upsilon = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \text{ होता है।} \tag{14.15}$$

वायु के मानक ताप व दाब पर, $P = 1.01 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$ तथा (वायु का घनत्व) $\rho = 1.29 \text{ kg m}^{-3}$ होता है।

ρ व P के इन मानों को समीकरण (14.15) में रखने पर हमें υ का मान प्राप्त होता है–

$$\upsilon = \sqrt{1.01 \times 10^5 / 1.29} = 280 \text{ m s}^{-1}$$

जब बादलों के संघट्ट (टकराने) से तड़ित व गर्जन उत्पन्न होते हैं तो हमें गर्जन की ध्वनि तड़ित देखने के बाद में सुनाई देती है। इस का कारण यह है कि प्रकाश का वेग वायु में ध्वनि के वेग से बहुत अधिक होता है। तड़ित के दिखाई देने तथा गर्जन की ध्वनि सुनाई देने के बीच के समय अन्तराल को नाप कर वायु में ध्वनि का वेग ज्ञात किया जा सकता हैं। अधिक उन्नत तकनीक के उपयोग से 0°C पर वायु में ध्वनि का वेग 333 ms^{-1} पाया गया है। इस प्रकार न्यूटन द्वारा प्रस्तावित सूत्र से प्राप्त ध्वनि के वेग में प्रतिशत त्रुटि $= \dfrac{333 - 280}{333} \times 100\% = 16\%$ है। यह त्रुटि इतनी अधिक है कि यह प्रायोगिक त्रुटि नहीं हो सकती। स्पष्ट है कि न्यूटन की इस धारणा में कि वायु से होकर ध्वनि के संचरण में संपीडन तथा विरलन समतापीय होते हैं, कुछ गलती है।

14.2.1 लाप्लास का संशोधन

लाप्लास ने सुझाया कि वायु में ध्वनि के संचरण की अवधि में वायु की परतों में होने वाले दाब के परिवर्तन रुद्धोष्म होते हैं। इसके निम्नलिखित कारण हैं,

(i) वायु ऊष्मा-कुचालक है। और

(ii) ये संपीडन तथा विरलन इतनी जल्दी-जल्दी होते हैं कि न तो संपीडन से उत्पन्न ऊष्मा बाहर जा सकती है और न ही विरलन में अन्दर आ सकती है।

रुद्धोष्म परिस्थितियों में–

$$E = \gamma P,$$

जहाँ $$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

अत: $$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad (14.16)$$

वायु के लिए, $\gamma = 1.4$. अत: मानक दाब व ताप (STP) पर वायु में ध्वनि की चाल

$$\upsilon = \sqrt{1.4 \times 1.01 \times 10^5 / 1.29}$$

$$= 333 \text{ m s}^{-1}$$

यह मान प्रयोगों द्वारा प्राप्त मान के बहुत निकट है।

14.2.2 किसी गैस में ध्वनि के वेग को प्रभावित करने वाले कारक

(i) ताप का प्रभाव

लाप्लास के सूत्र से

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

क्योंकि घनत्व ρ = एकांक आयतन का द्रव्यमान $= \frac{M}{V}$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma PV}{M}}$$

समीकरण $PV = nRT$ का उपयोग करने पर, जहाँ n गैस के m द्रव्यमान में गोलों की संख्या है,

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\frac{M}{n}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\gamma RT}{m}} \qquad (14.17\text{ a})$$

जहाँ m गैस का ग्राम अणुक द्रव्यमान है। यह परिणाम प्रदर्शित करता है कि

$$\upsilon \propto \sqrt{T}$$

$$\Rightarrow \qquad \upsilon = \upsilon o\left(1 + \frac{t}{2 \times 273}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\simeq 333 + \frac{333}{546} t$$

$$\simeq 333 + 0.61t \qquad (14.17\text{b})$$

ध्यान दीजिए कि अल्पताप–परिवर्तनों के लिए, ध्वनि का वेग प्रति $1°0$ ताप वृद्धि पर 0.61 ms^{-1} बढ़ जाता है।

(*ii*) दाब का प्रभाव

यदि हम किसी गैस पर दाब P बढ़ा दें तो वह संपीडित हो जाती है, किन्तु उसका घनत्व ρ भी दाब P के अनुपात में बढ़ जाता है अर्थात् P/ρ का मान स्थिर रहता है। इसका तात्पर्य यह है कि किसी गैस में ध्वनि के वेग पर दाब का प्रभाव नहीं होता।

(*iii*) घनत्व का प्रभाव–

यदि हम समान दाब व ताप की परिस्थितियों में दो भिन्न-भिन्न गैसों पर विचार करें तो,

$$v \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

यदि हम ऑक्सीजन तथा हाइड्रोजन में ध्वनि के वेगों की तुलना करें तो, हमें प्राप्त होता है,

$$\frac{v_{\text{ऑक्सीजन}}}{v_{\text{हाइड्रोजन}}} = \sqrt{\frac{\rho_{\text{हाइड्रोजन}}}{\rho_{\text{ऑक्सीजन}}}} = \sqrt{\frac{M_{\text{हाइड्रोजन}}}{M_{\text{ऑक्सीजन}}}} = \sqrt{\frac{2}{32}} = \frac{1}{4}$$

यह प्रदर्शित करता है कि ताप तथा दाब की समान अवस्थाओं में हाइड्रोजन में ध्वनि का वेग आक्सीजन में ध्वनि के वेग का चार गुना होता है। क्या यह परिणाम द्रवों और ठोसों के लिए भी तर्कसम्मत है? इस प्रश्न के उत्तर का आप अगले उप-अनुच्छेद में पता लगाएंगे।

(*iv*) वायु में ध्वनि के वेग पर आर्द्रता का प्रभाव

जब वायु में आर्द्रता बढ़ती है (ताप व दाब की स्थितियों को नियत रखते हुए) तो उसका घनत्व (ρ) कम हो जाता है अतः वायु में ध्वनि का वेग बढ़ जाता है।

उदाहरण 14.2 : किस ताप पर वायु में ध्वनि का वेग S.T.P. पर उसके मान का दो गुना हो जायेगा?

हल : हम जानते हैं कि, $\frac{v}{v_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}} \Rightarrow 2 = \sqrt{\frac{T}{273}}$

दोनों ओर की राशियों का वर्ग करने पर

$$\therefore \quad 4 = \frac{T}{273} \quad \Rightarrow \quad T = 273 \times 4 = 1092K$$

14.2.3 तानित डोरियों में तरंगों का वेग

किसी तानित डोरी में अनुप्रस्थ तरंग का वेग

$$v = \sqrt{\frac{F}{m}} \qquad (14.18\ a)$$

जहाँ F डोरी में तनाव तथा m तार की एकांक लम्बाई का द्रव्यमान है। किसी प्रत्यास्थ माध्यम में अनुदैर्ध्य तरंगों का वेग

$$v = \sqrt{E/\rho} \qquad (14.18b)$$

जहाँ E प्रत्यास्थता है। यहाँ यह इंगित किया जा सकता है कि ठोसों में प्रत्यास्थता (E) का मान गैसों तथा द्रवों से अधिक होने के कारण ठोसों में अनुदैर्ध्य तरंगों का वेग द्रवों तथा गैसों में वेग की तुलना में अधिक होता है। यथार्थ $\upsilon_g < \upsilon_\ell < \upsilon_s$.

पाठगत प्रश्न 14.2

1. ध्वनि के वेग के लिए सूत्र प्राप्त (व्युत्पन्न) करने के लिए न्यूटन ने क्या कल्पना की थी?
2. न्यूटन के सूत्र में क्या गलती थी?
3. यह दर्शाइए कि प्रति 1^0C ताप बढ़ने पर वायु में ध्वनि का वेग 0.61 m s^{-1} बढ़ जाता है।
4. उस ताप की गणना कीजिए जिस पर ध्वनि का वायु में वेग 7^0C पर ध्वनि के वेग का (3/2) गुना हो जाता है।
5. किसी तानित डोरी में तरंग वेग के लिए सूत्र लिखिए।
6. यदि m प्रति एकांक लम्बाई द्रव्यमान की तानित डोरी में उत्पन्न तरंग की तरंग दैर्ध्य λ हो और उसकी आवृत्ति n हो तो, n, λ, F व m संबंध में लिखिए, यदि $\lambda = 2\ell$, हो तो n, l, F व m में क्या संबंध होगा?

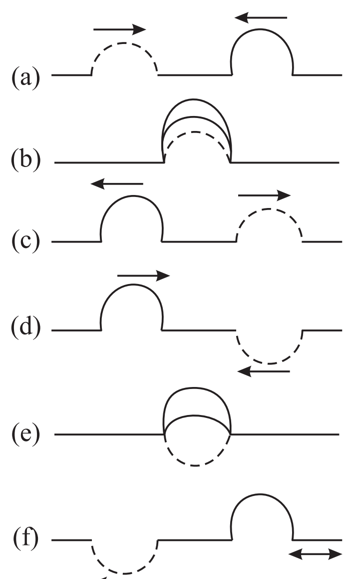
14.3 तरंगो का अध्यारोण

मान लीजिए किसी स्लिंकी में दो तरंग स्पंद विपरीत दिशाओं में गमन कर रहे हैं। क्या होगा जब ये दोनों स्पंद मिलते हैं? क्या ये दोनों एक दूसरे का प्रभाव समाप्त कर देंगे? इन प्रश्नों का उत्तर पाने के लिए आइए हम एक क्रिया कलाप करें।

क्रियाकलाप 14.2

किसी तानित स्लिंकी में भिन्न-भिन्न आयाम के दो तरंग श्रृंग उत्पन्न कीजिए जैसा कि चित्र 14.6 में दिखाया गया है। ये श्रृंग एक दूसरे की विपरीत दिशा में गति कर रहे हैं। ये दोनों स्लिंकी के बीच में कहीं पर मिलते हैं और एक दूसरे पर अतिव्याप्त हो जाते हैं [चित्र. 14.6(b)] फिर अलग-अलग हो जाते हैं। इसके पश्चात वे फिर उसी दिशा में चलने लगते हैं जिनमें वे मिलने से पहले चल रहे थे और उनका आकार भी नहीं बदलता [चित्र. 14.6(c)].

अब जैसा चित्र [14.6(d)] में दिखाया गया है स्लिंकी में एक श्रृंग व एक गर्त उत्पन्न कीजिए। ये मिलते हैं एक दूसरे पर अतिव्याप्त होते हैं और अलग होकर पूर्ववत् ये दोनों विपरीत



चित्र. 14.6 :तरंगों के अध्यारोण्ण के सिद्धांत का निदर्शन

दिशाओं में चलते हैं और दोनों का आकार भी वही रहता है जो पहले था। इस प्रयोग को फिर से दोहराइए और ध्यान से देखिए कि दो स्पंदो के अतिव्यापन (या मिलने) के समय क्या होता है, चित्र 14.6(d) तथा [चित्र. 14.6(e)]। आप देखेंगे कि जब दो शृंगों का अतिव्यापन होता है तो परिणामी शृंग का आयाम बढ़ जाता है, और जब शृंग व गर्त का अतिव्यापन होता है तो परिणाम में एक शृंग बनता है, (क्योंकि प्रारंभ में शृंग का आयाम गर्त से अधिक था) किंतु उसका आयाम पहले शृंग के आयाम से कम होता है। इस परिणाम को हम संक्षेप में इस प्रकार लिख सकते हैं– दो स्पंदों के अतिव्यापन बिंदु पर परिणामी विस्थापन उनके अपने अपने विस्थापनों के सदिश योग के बराबर होता है। इसे ***अध्यारोपण का सिद्धांत कहते*** हैं।

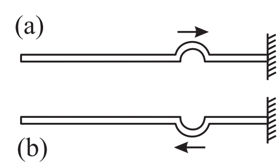
इस क्रियाकलाप से न केवल अध्यारोपण के सिद्धांत का प्रदर्शन होता है वरन् यह भी स्पष्ट होता है कि दो या अधिक तरंगे किसी स्थान से होकर एक दूसरे से स्वतंत्र रूप से संचरित हो सकती हैं। प्रत्येक तरंग इस प्रकार गति करती है जैसे कि अन्य तरंगें हैं ही नहीं। तरंगों के इस महत्वपूर्ण गुण के कारण ही हम अपनी रूचि के अनुसार किसी रेडियो स्टेशन को सुन सकते हैं यद्यपि उसी समय आकाश में कई रेडियो स्टेशनों से प्रसारित तरंगे विद्यमान होती हैं। इस सिद्धांत का उपयोग हम तरंगों के व्यतिकरण, और विस्पंदों तथा अप्रग्रामी तरंगों के बनने की व्याख्या के लिए करते हैं।

14.3.1 तरंगों का परावर्तन और संचरण

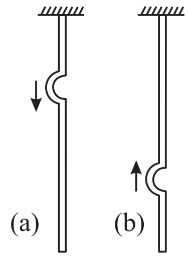
हम यहाँ केवल डोरियों और कमानियों में उत्पन्न होने वाली यांत्रिक तरंगों पर ही विचार करेंगे। जब किसी अनुप्रस्थ तरंग का शृंग किसी डोरी के स्थिर सिरे की ओर संचरण करता है तो क्या होता है और ऐसा क्यों होता है, इसको समझने के लिए हम एक क्रियाकलाप करते हैं?

क्रियाकलाप 14.3

किसी स्लिंकी के एक सिरे को स्थिर कर दीजिए जैसा कि चित्र 14.7 में दिखाया गया है। स्लिंकी को क्षैतिज रखते हुए उसके मुक्त सिरे को झटका देकर उसमें एक अनुप्रस्थ स्पंद उत्पन्न कीजिए [चित्र 14.7 (a)]। यह स्पंद a डोरी के स्थिर सिरे की ओर गति करता है। आप देखेंगे कि यह स्पंद स्थिर सिरे से टकरा कर गर्त के रूप में विपरीत दिशा में गति करने लगता है। क्या आप इसका कारण जानते हैं? जब स्पंद स्थिर सिरे से टकराता है तो यह उस आधार पर जिससे स्लिंकी का सिरा बंधा है, एक बल लगाता है, उस बल की समान तथा विपरीत प्रतिक्रिया के कारण न केवल तरंग स्पंद की गति की दिशा वरन् उसके विस्थापन की दिशा भी उल्टी (या विपरीत) हो जाती है (चित्र 14.7 b)। आधार को स्लिंकी से अधिक भारी होने के कारण सघन माध्यम माना जा सकता है। अतः हम कह सकते हैं कि जब तरंग परावर्तन किसी सघन माध्यम से होता है तो, तरंग में π, कलान्तर हो जाता है अर्थात इसकी कला विपरीत (या उल्टी) हो जाती है।



चित्र. 14.7 : सघन माध्यम से परावर्तन (कला उत्क्रमण)

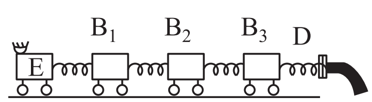


चित्र.14.8(a) : मुक्त सिरे की ओर नीचे को गति करता स्पंद (b) मुक्त सिरे से परावर्तन के पश्चात् इसके विस्थापन की दिशा अपरिवर्तित रहती है।

आइए अब हम देखें कि किसी विरल माध्यम से परावर्तन पर क्या होता है। इसके लिए हम एक दूसरा क्रियाकलाप करते है।

क्रियाकलाप 14.4

एक रबर की नलिका को किसी दृढ़ आधार से लटका दीजिए। इसमें एक तरंग स्पंद उत्पन्न कीजिए जो नलिका में नीचे की ओर गति करे। खुले (या मुक्त) सिरे से परावर्तन के पश्चात्, तरंग स्पंद ऊपर की ओर गति करता है किन्तु इसके विस्थापन की दिशा में कोई परिवर्तन नहीं होता अर्थात श्रृंग, श्रृंग के रूप में ही वापस लौटता है, क्यों? तरंग स्पंद नलिका के खुले सिरे पर पहुँचता है तो वह विरल माध्यम से परिवर्तित होता है। (याद रखिये कि वायु रबर से विरल है)। अतः तरंग स्पंद के विस्थापन में कोई परिवर्तन नहीं होता। इस प्रकार विरल माध्यम से परावर्तन होने पर, कला में परिवर्तन नहीं होता।



चित्र. 14.9 : किसी सघन माध्यम से अनुदैर्ध्य तरंगें बगैर स्वरुप परिवर्तन किन्तु चिह्न में परिवर्तन के साथ परावर्तित होती हैं।

आप अब प्रश्न कर सकते हैं कि क्या अनुदैर्ध्य तरंगों का व्यवहार भी ऐसा ही होता है? चित्र 14.9 देखिए जिसमें बोगियों की एक कतार दिखाई गई है। अब मान लिखिए इंजन E कुछ दाई ओर गति करता है। इंजन पहली बोगी B_1 को दाहिनी ओर धकेलता है। यह स्प्रिंग फिर अपनी प्रारंभिक स्थिति में जाने का प्रयत्न करता है। जब यह दबा हुआ स्प्रिंग फैलता है, तो पहली व दूसरी बोगी के बीच का स्प्रिंग दब जाता है। अब दूसरा दबा हुआ स्प्रिंग फैलता है, वह थोड़ा सा तीसरी बोगी की ओर गति करता है। इसी प्रकार संपीडन अंतिम स्प्रिंग तक, जो स्थिर स्टैंड D के संपर्क में है, पहुँचता है। जब स्थिर स्टैंड D तथा अंतिम बोगी के बीच का स्प्रिंग फैलता है, केवल अंतिम बोगी ही बाई ओर को गति करती है। यह प्रक्रम संपीडन के इंजन तथा पहली बोगी के बीच पहुँचने तक चलता रहता है। इस प्रकार संपीडन उसी रूप में अर्थात् सम्पीडन के रूप में ही वापस आ जाता है। किन्तु अब सभी बोगियाँ बाई ओर गति करती हैं। इस यांत्रिक मॉडल में स्प्रिंग और बोगियाँ एक माध्यम का काम करती हैं। बोगियाँ माध्यम के कणों के सदृश्य हैं और उनके बीच के स्प्रिंग प्रत्यास्थता बल को प्रदर्शित करते हैं।

इस प्रकार सघन माध्यम से परावर्तन में, अनुदैर्ध्य तरंगों का स्वरूप तो वही रहता है किंतु चिह्न (दिशा) में परिवर्तन हो जाता है। जबकि विरल माध्यम से परावर्तन में, अनुदैर्ध्य तरंगों के चिह्न (दिशा) में कोई परिवर्तन नहीं होता, किंतु उनके स्वरूप में परिवर्तन हो जाता है। स्वरूप परिवर्तन

से यह तात्पर्य है कि परावर्तन के पश्चात संपीडन, विरलन के रूप में और विरलन संपीडन के रूप में ही वापस लौटते हैं।

पाठागत प्रश्न 14.3

1. जब विपरीत दिशाओं में चलती हुई दो तरंगें आपस में मिलती हैं तो क्या परिणाम होता है?
2. समान द्रव्यमान की व समान वेग से एक ही सरल रेखा के अनुदिश चलती हुई दो गोलियाँ आपस में टकराती हैं तो क्या होता है?
3. एक डोरी में एक से तरंग स्पंद विपरीत दिशा में गमन कर रहे हैं। क्या होता है जब (i) तरंगे एक ही कला में हैं? (ii) तरंगे विपरीत कला में हैं?
4. जब किसी अनुप्रस्थ तरंग का स्पंद किसी डोरी में चलते हुए उसके स्थिर सिरे पर पहुंचता है तो क्या होता है?
5. किसी डोरी में चलते हुए कोई तरंग स्पंद जब डोरी से मुक्त सिरे पर पहुँचता है तो क्या होता है?
6. क्या होता जब संपीडन की एक तरंग (i) विरल माध्यम से परावर्तित होती है? तथा (ii) सघन माध्यम से परावर्तित होती है?

14.4 एक ही दिशा में चलती हुई तरंगों का अध्यारोपण

एक ही दिशा में गमन करती हुई दो तरंगो का अध्यारोपण तरंगों की कला तथा आवृत्ति के अनुसार दो पृथक-पृथक परिघटनाओं को जन्म देता है: ये हैं (i) व्यतिकरण एवं (ii) विस्पंद। आइए, अब हम इन परिघटनाओं पर विचार करें।

14.4.1 तरंगो का व्यतिकरण

आइए, अब हम तरंगों के अध्यारोपण से प्राप्त व्यतिकरण पैटर्न में अधिकतम व न्यूनतम तीव्रताओं के अनुपात का परिकलन करते हैं। x- अक्ष के अनुदिश समान वेग $\upsilon = \omega/k$ वेग से गमन करती हुई दो सरल आवर्त तरंगों पर विचार कीजिए, जिनके आयाम क्रमश: a_1 और a_2 हैं और जिनकी कोणीय आवृत्ति ω है। किंतु दोनों तरंगों में एक स्थिर कलान्तर ϕ. है। इन तरंगों के समीकरण हैं,

$$y_1 = a_1 \sin(\omega t - kx)$$

और
$$y_2 = a_2 \sin[(\omega t - kx) + \phi]$$

जहाँ $\omega = 2\pi/T$ कोणीय आवृत्ति तथा $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ तरंग संख्या है।

क्योंकि दोनों तरंगें एक ही वेग, एक ही दिशा में एक ही रेखा के अनुदिश गमन कर रही हैं, इनमें अतिव्यापन (overlapping) होता है। अध्यारोपण के सिद्धांत से, किसी बिन्दु पर इन दोनों तरंगों के कारण परिणामी विस्थापन y होगा

$$y = y_1 + y_2 = a_1 \sin(\omega t - kx) + a_2 \sin[(\omega t - kx) + \phi]$$

यदि $(\omega t - kx) = \theta$, तो

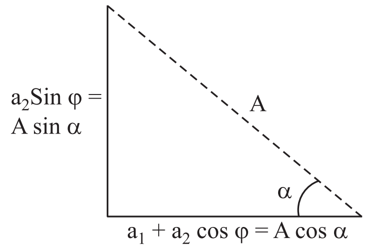
$$y = a_1 \sin\theta + a_2 \sin(\theta + \phi)$$
$$= a_1 \sin\theta + a_2 \sin\theta \cos\phi + a_2 \sin\phi \cos\theta$$

यदि $a_2 \sin\phi = A \sin\alpha$

और $a_1 + a_2 \cos\phi = A \cos\alpha$

तब

$$y = A \cos\alpha \sin\theta + A \sin\alpha \cos\theta$$
$$= A \sin(\theta + \alpha)$$



चित्र. 14.10 : परिणामी आयाम की गणना करना

θ का मान रखने पर

$$y = A \sin[(\omega t - kx) + \alpha]$$

इस प्रकार परिणामी तरंग की कोणीय आवृत्ति ω तथा आयाम A है, जहाँ

$$A^2 = (a_1 + a_2 \cos\phi)^2 + (a_2 \sin\phi)^2$$
$$= a_1^2 + a_2^2 \cos^2\phi + 2a_1 a_2 \cos\phi + a_2^2 \sin^2\phi$$

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1 a_2 \cos\phi \qquad (14.18)$$

समीकरण (14.18), में ϕ दो अध्यारोपित तरंगों के बीच कलान्तर है। यदि दो तरंग के बीच पथान्तर p, ϕ, के संगत कलान्तर हो तब,

$\phi = \dfrac{2\pi p}{\lambda}$, जहाँ $\dfrac{2\pi}{\lambda}$ प्रति एकांक दूरी कला परिवर्तन है।

जब पथान्तर $\dfrac{\lambda}{2}$ का सम गुणांक हो, *i.e.*, $p = 2m\dfrac{\lambda}{2}$, कलान्तर $\phi = (2\pi/\lambda) \times (2m\,\lambda/2) = 2m\pi$.

चूंकि $\cos 2\pi = +1$, अतः समीकरण (14.18) से हमें प्राप्त होता है,

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 = (a_1 + a_2)^2$$

अर्थात्, यदि एक ही दिशा में गमन करती दो संरेखी तरंगे एक ही कला में हों तो उनके अध्यारोपण से प्राप्त परिणामी तरंग का आयाम उनके पृथक-पृथक आयामों के योग के बराबर होता है। क्योंकि किसी स्थिति विशेष पर, तरंग की तीव्रता, उसके आयाम के वर्ग के समानुपाती होती है, अतः

$$I_{max} \;\alpha\; (a_1 + a_2)^2$$

जब $p = (2m + 1)\,\lambda/2$, then $\phi = (2m + 1)\,\pi$ तथा $\cos\phi = -1$. तब समीकरण (14.18) से हमें प्राप्त होता हैं,

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 = (a_1 - a_2)^2$$

जो यह प्रदर्शित करता है कि यदि एक ही दिशा में गमन करती दो संरेखी तरंगों के बीच पथान्तर π का विषम गुणांक हो तो, उनके अध्यारोपण से उत्पन्न परिणामी तरंग का आयाम उनके पृथक-पृथक आयामों के अंतर के बराबर होता है,

तब $I_{min} \;\alpha\; (a_1 - a_2)^2$

इस प्रकार $$\frac{I_{max}}{I_{mim}} = \frac{(a_1 + a_2)^2}{(a_1 - a_2)^2} \qquad (14.19)$$

यदि $a_1 = a_2$, तो परिणामी तरंग की न्यूनतम तीव्रता शून्य होती है। ये परिणाम प्रदर्शित करते हैं कि व्यतिकरण तत्वत: तरंगों के अध्यारोपण के कारण दिक्स्थान में ऊर्जा का पुन: वितरण है।

14.4.2 विस्पंद

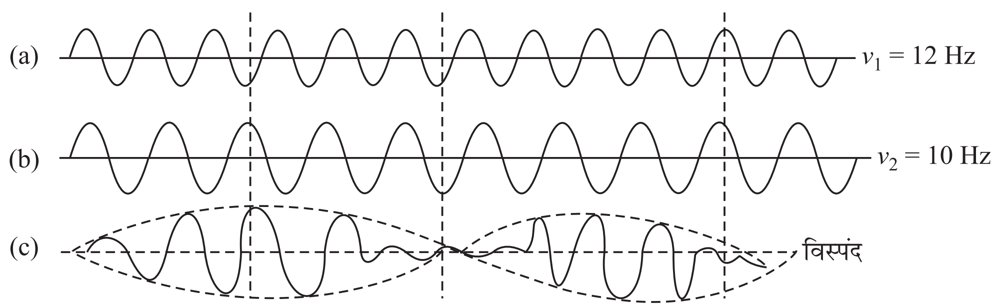
हमने देखा है कि एक ही आवृत्ति की व एक ही दिशा में गमन करने वाली तरंगों के अध्यारोपण से व्यतिकरण होता है। अब हम अनुसंधान करें कि दो लगभग समान आवृत्तियों की तरंगों के अध्यारोपण का परिणाम क्या होगा। पहले हम एक क्रिया कलाप करें।

क्रियाकलाप 14.5

दो स्वरित्र द्विभुज (ट्यूनिंग फॉर्क) A और B लीजिए जिनमें दोनों की आवृत्ति 512 Hz. है। B की एक भुजा पर थोडा सा मोम लगाकर उसे थोड़ा भारी बना लीजिए। अब एक रबर पैड पर टकराकर दोनों को एक साथ कम्पित कराइए। दोनों के हैन्डिलों को एक मेज की सतह पर दबा कर रखिये और उत्पन्न ध्वनि को ध्यान से सुनिए। आप पाएंगे कि ध्वनि की तीव्रता एकान्तर रूप से महत्तम तथा न्यूनतम होती रहती है। ध्वनि की तीव्रता के इस एकान्तर उतार चढ़ाव को *विस्पंद* कहते हैं। ध्वनि की तीव्रता के एक उच्चतम व एक न्यूनतम एकान्तरण को एक विस्पंद कहते हैं। B स्वरित्र द्विभुज की उसी भुजा पर थोड़ा सा मोम और लगाने पर आप पायेंगे कि विस्पंदों की संख्या बढ़ जाती है। B की भुजा पर और अधिक मोम लगाने पर हो सकता है कि विस्पंद न सुनाई दें। कारण यह है कि यदि दो भिन्न-भिन्न ध्वनियां हमारे कान पर 1/10 सेकंड से कम अंतराल पर पड़ें तो वह उनके बीच अंतर नहीं कर पाता अर्थात उन दो ध्वनियों को पृथक रूप से नहीं सुन पाता है। अब हम विस्पंदों के उत्पन्न होने की व्याख्या करेंगे।

(a) विस्पदों का उत्पादन : कल्पना कीजिए कि आप के पास दो स्वरित्र द्विभुज A और B हैं जिनकी आवृत्तियां क्रमश: N और $N + n$ हैं और n का मान 10 से कम है। एक सेकंड में A, N कम्पन करता है, किन्तु B एक सेंकड में A से n कम्पन अधिक कर लेता है, अत: द्विभुज B द्विभुज A की तुलना में (1/n) सेकंड में एक कम्पन तथा $\left(\frac{1}{2n}\right)$ सेकंड में आधा कम्पन अधिक कर लेता है। मान लीजिए $t = o$, अर्थात प्रारम्भ में, दोनों स्वरित्र द्विभुज एक ही कला में कम्पन कर रहे थे। तब (1/2n) सेकंड के पश्चात B, A की तुलना में (आधा) कम्पन अधिक कर लेगा, अत: $\frac{1}{2n}s$ के बाद वह (B) विपरीत कला में कम्पन करेगा। यदि A संपीडन की तरंग प्रेषित करता है तो B विरलन की तरंग प्रेक्षक को प्रेषित करेगा और प्रेक्षक को उसके कान द्वारा प्राप्त ध्वनि की तीव्रता शून्य होगी। (1/n)s, के बाद B, A से एक कम्पन अधिक कर

लेगा। अत: अब यदि A संपीडन की तरंग प्रेषित करता है तो B भी संपीडन की तरंग माध्यम (वायु) में प्रेक्षक को प्रेषित करेगा, और प्रेक्षक द्वारा प्राप्त ध्वनि की तीव्रता अधिकतम होगी। इसी प्रकार (3/2n)सेंकड के बाद दोनों स्वरित्र द्विभुज फिर से विपरीत कला में कम्पन करेंगे। अत: ध्वनि की तीव्रता फिर से न्यूनतम हो जाएगी। यह प्रक्रम इसी प्रकार चलता रहेगा। प्रेक्षक(1/n)सेंकड में एक विस्पंद सुनेगा, अर्थात n विस्पंद एक सेंकड में सुनेगा। इस प्रकार एक सेंकड में सुने गए विस्पंदों की संख्या दो स्वरित्र द्विभुजों की आवृत्ति में अंतर के बराबर होती है। यदि एक सेंकड में 10 से अधिक विस्पंद उत्पन्न हों तो ये पृथक-पृथक नहीं सुनाई देते। विस्पंद आवृत्ति n तथा विस्पंद काल $1/n$ होता है।



चित्र.14.11 : (a)12 Hz आवृत्ति का विस्थापन-समय ग्राफ (b) 10 Hz आवृत्ति का विस्थापन समय ग्राफ इन दो तरंगों के अध्यारोपण से दो विस्पंद प्रति सेकंड उत्पन्न होते हैं।

(b) ग्राफ विधि : एक 12 cm लम्बी सरल रेखा खींचकर इसको 1 cm लम्बे 12 बराबर भागों में विभाजित कीजिए। इस सरल रेखा पर 1 cm लम्बी तथा 1.5 cm ऊंची 12 तरंगे बनाइये। यह 12 Hz.आवृत्ति की एक तरंग को निरूपित करती है। दूसरी सरल रेखा (b) पर 1.2 cm लम्बी तथा 1.5 cm ऊँची 10 तरंगें बनाइये। यह 10Hz. आवृत्ति की तरंग को निरूपित करती है। चित्र 14.11(c) परिणामी तरंग को निरूपित करता है। चित्र 14.11 में वास्तविक तरंगों को नहीं वरन् विस्थापन समय ग्राफ दिखाया गया है। इस प्रकार परिणामी तीव्रता एकान्तर रूप से उच्चतम व निम्नतम होती रहती है। एक सेंकड में उत्पन्न विस्पंदों की संख्या Δv. है। अत: विस्पंद आवृत्ति दो अध्यारोपित तरंगों की आवृत्ति के अंतर के बराबर है।

उदाहरण 14.3 : एक अज्ञात आवृत्ति का स्वरित्र द्विभुज 500 Hz आवृत्ति के दूसरे स्वरित्र द्विभुज के साथ प्रति सेंकड 5 विस्पंद उत्पन्न करता है। स्वरित्र द्विभुज की अज्ञात आवृत्ति ज्ञात कीजिए।

हल : $v' = v \pm n = 500 \pm 5$

$\Rightarrow$ अज्ञात आवृत्ति 495 Hz or 505 Hz होगी।

उदाहरण 14.4 : किसी व्यतिकरण पैटर्न में अधिकतम व न्यूनतम तीव्रताओं का अनुपात 9 है। अध्यारोपण करती तरंगों का आयाम अनुपात क्या है?

हल : $\frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}^{\,2} \qquad 9 \qquad \frac{1+r}{1-r}^{\,2}$, जहाँ $r = \frac{a_2}{a_1}$.

टिप्पणियाँ

अत:

$$\frac{1+r}{1-r} = 3$$

इस समीकरण को सरलतापूर्वक हल किया जा सकता है तब $r = \frac{1}{2}$, अर्थात् एक तरंग का आयाम दूसरे से दो गुना है।

पाठागत प्रश्न 14.4

1. यदि व्यतिकरण उत्पन्न करती दो तरंगों का तीव्रता अनुपात 1:16 है तो I_{max}/I_{min} का अनुपात ज्ञात कीजिए?

2. दो ध्वनि-स्रोतों से निकलती हुई क्रमश: v तथा $v + 4$ आवृत्ति की तरंगें अध्यारोपित होती हैं? आप क्या अवलोकन करेंगे?

3. आवृत्ति v तथा $v + \Delta v$ की दो तरंगों के अध्यारोपण से उत्पन्न विस्पंदों की आवृत्ति क्या होगी?

4. दो स्वरित्र द्विभुज A और B प्रति सेंकड 5 विस्पंद उत्पन्न करते हैं, A की एक भुजा पर थोड़ा सा मोम लगाने पर भी इनसे प्रति सेंकड 5 विस्पंद उत्पन्न होते हैं। यदि B की आवृत्ति 512 Hz हो तो A की आवृत्ति उस पर मोम लगाने से पहले कितनी थी? अपने उत्तर के लिए कारण लिखिए।

14.5 विपरीत दिशाओं में गमन करती समान आवृत्ति की तरंगों का अध्यारोपण

अभी तक हमने एक ही दिशा में गमन करती हुई संरेखी तरंगों के अध्यारोपण पर विचार किया है। इस प्रकार की तरंगों में शृंग और गर्त अथवा संपीडन और विरलन किसी माध्यम में आगे गमन करते रहते है। इनका वेग माध्यम के गुणों पर निर्भर करता है। किसी माध्यम में एक ही तरंग दैर्ध्य तथा आवृत्ति की एक ही सरल रेखा के अनुदिश एक ही चाल से विपरीत दिशाओं में गमन करती हुई दो तरंगों के अध्यारोपण से अप्रगामी तरंगे उत्पन्न होती हैं। इन तरंगों में शृंग तथा गर्त अथवा संपीडन एवं विरलन किसी प्रेक्षक के सापेक्ष अचल रहते हैं।

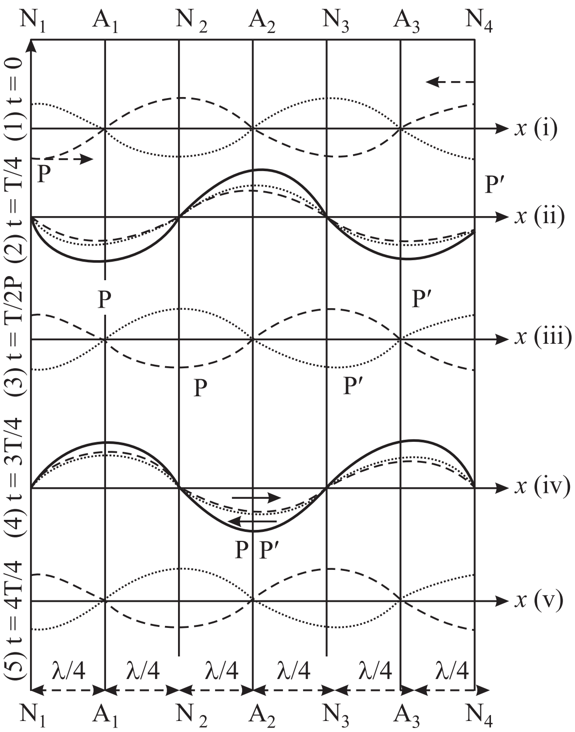
14.5.1 अप्रगामी अचर तरंगों का बनना

अप्रगामी तरंगे किस प्रकार बनती है, यह समझने के लिए चित्र 14.12 को देखिये, जिसमें हमने प्रत्येक T/4 सेकंड अर्थात कम्पनों के आवर्तकाल के 1/4 भाग के पश्चात आपतित, परावर्तित तथा परिणामी तरंगों की स्थितियों को दिखाया है।

(i) प्रारंभ में $t = 0$, समय पर [चित्र. 14.12(i)], बिन्दुओं द्वारा दिखायी गई आपतित तरंग और डैशों द्वारा दिखाई गई परावर्तित तरंग विपरीत कला में हैं, अत: सभी बिन्दुओं पर विस्थापन शून्य है। माध्यम के सभी कण अपनी-अपनी मूल अवस्थाओं में हैं।

(ii) $t = T/4$ समय पर [चित्र. 14.12(ii)], आपतित तरंग दाईं ओर को $\lambda/4$, आगे बढ़ गई है, जैसा कि बिन्दु P के विस्थापन से दिखाया गया है। परावर्तित तरंग बाईं ओर $\lambda/4$ आगे बढ़ गई है। परिणामी तरंग के रूप को मोटे सतत् वक्र से दिखाया गया है। यह देखा जा सकता है कि प्रत्येक बिन्दु पर परिणामी विस्थापन अधिकतम है। यहाँ प्रत्येक बिन्दु पर कण–वेग शून्य है और विकृति अधिकतम है।

(iii) $t = T/2$ समय पर [चित्र. 14.12 (iii)],आपतित तरंग दाईं ओर $\lambda/2$ आगे बढ़ गई है, जैसा बिन्दु P के विस्थापन से दिखाया गया है। परावर्तित तरंग बाईं ओर को $\lambda/2$ आगे बढ़ गई है, जिसे बिन्दु P′. को विस्थापन से दिखाया गया है। प्रत्येक बिन्दु पर इन विस्थापनों के विपरीत दिशा में होने से परिणामी विस्थापन शून्य है जिसे एक मोटी लाइन से दिखाया गया है।



चित्र. 14.12: एक ही तरंग दैर्ध्य, आयाम आवृत्ति की एक ही सरल रेखा के अनुदिश विपरीत दिशाओं में गमन करती दो तरंगों के अध्यारोपण से अप्रगामी तरंगों का बनना।

(iv) $t = 3T/4$s पर [चित्र. 14.12(iv)], दोनों तरंगे फिर से एक ही कला में हैं। परिणामी विस्थापन अधिकतम है। कण–वेग शून्य है किन्तु विकृति का मान अधिकतम संभाव्य मान के बराबर है।

(v) $t = 4T/4$s पर [चित्र. 14.12(v)], आपतित व परावर्तित तरंगे प्रत्येक बिन्दु पर विपरीत कला में है। इन तरंगों का परिणामी एक सरल रेखा है (जिसे मोटी सतत लाइन से दिखाया गया है)। विकृति $\Delta y/\Delta x$ प्रत्येक बिन्दु पर शून्य है।

ध्यान दीजिये कि

- बिन्दुओं N_1, N_2, N_3 और N_4, पर आयाम शून्य है किन्तु विकृति अधिकतम है। ऐसे बिन्दुओं को ***निस्पंद*** कहते हैं।
- बिन्दुओं A_1, A_2 और A_3, पर आयाम है अधिकतम है किन्तु विकृति न्यूनतम है। ऐसे बिन्दुओं को ***प्रस्पंद*** कहते हैं।
- दो क्रमागत निस्पंदों तथा प्रस्पंदों के बीच की दूरी $\lambda/2$ है।
- किसी निस्पंद व उससे अगले प्रस्पंद के बीच की दूरी $\lambda/4$ है।

टिप्पणियाँ

- अप्रगामी तरंगों का दोलन काल उन दोनों तरंगों के आवर्तकाल के बराबर है जिनके अध्यारोपण से यह अप्रगामी तरंग बनी है।
- ऊर्जा/एकान्तर रूप से किसी बिन्दु के परित: आगे पीछे तरंगायित होती रहती है। किन्तु किसी बिन्दु से होकर औसत ऊर्जा प्रवाह शून्य होता है।

दो सर्वसम, संरेखी और समान चाल से विपरीत दिशाओं में गमन करती हुई तरंगों के अध्यारोपण से अप्रगामी तरंगों बन जाती है। इनकों अप्रगामी तरंगें इसलिए कहा जाता है, क्योंकि इनमें तरंग स्वरूप आगे गति नहीं करता किन्तु एकान्तर रूप से संकुचित व विस्तृत होता रहता है। ऊर्जा केवल आगे-पीछे तरंगयित होती रहती है और औसत रूप से किसी बिन्दु से होकर नेट ऊर्जा प्रवाह नहीं होता।

14.5.2 अप्रगामी तरंग का समीकरण

किसी माध्यम में $\upsilon = \omega/k$ वेग से गमन करती हुई एक सरल आवर्त तरंग का समीकरण है,

$$y_1 = -a \sin(\omega t - kx)$$

किसी सघन माध्यम से परावर्तन के पश्चात यदि यह तरंग उसी सरल रेखा में X–अंक्ष के अनुदिश, उल्टी दिशा में π कलान्तर से गमन करे तो उसका समीकरण होगा,

$$y_2 = a \sin(\omega t - kx)$$

इन दोनों के अध्यारोपण से किसी समय किसी बिन्दु का विस्थापन होगा

$$y = y_1 + y_2$$

$$= a \sin(\omega t - kx) - a \sin(\omega t - kx)$$

त्रिकोणोमिति के सम्बंध $\sin A - \sin B = 2 \,\text{Sin}\,(A - B)/2, \cos(A + B)/2$, का उपयोग करने पर, उपरोक्त व्यंजक को सरल करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$y = -2a \sin kx \cos \omega t \qquad (14.20)$$

यदि $-2a \sin kx = A$. मान लें तो,

$$y = A \cos \omega t$$

समीकरण (14.20) कोणीय आवृत्ति ω और आयाम $2a \sin kx$ की एक परिणामी तरंग को निरूपित करता है। इस परिणामी तरंग का आयाम दिक्स्थान में ω कोणीय आवृत्ति से दोलन करता है, जो प्रतिमीटर पथान्तर पर कला में होने वाला परिवर्तन है। उन बिन्दुओं पर जहाँ $kx = m\pi = m\lambda/2$, $\sin kx = \sin m\pi = 0$. अत: $A = 0$,

ये बिन्दु जहां आयाम शून्य है, निस्पंद कहलाते हैं। इन बिन्दुओं पर विकृति $\Delta y/\Delta x$ का मान अधिकतम होता है। स्पष्टत: ऐसे दो निकटतम बिन्दुओं के बीच की दूरी $\lambda/2$ है।

उन बिन्दुओं पर जहां $= (2m + 1)\,\pi/2$ or $x = (2m + 1)\,\lambda/2 \times \lambda/2\pi = (2m + 1)\,\lambda/4$

$\text{Sin}\, kx = \sin(2m + 1)\,\pi/2 = \pm 1.$

यहां A का मान अधिकतम होता है। इन बिन्दुओं पर विकृति $\Delta y/\Delta x$ शून्य है। ये बिन्दु जहां पर A (आयाम) अधिकतम किन्तु विकृति शून्य होती है। प्रस्पंद कहलाते हैं।

यहाँ यह विचारणीय है कि निस्पंदों पर, कणों का वेग शून्य होता है जबकि प्रस्पदों पर कणों का वेग $\Delta y/\Delta t$ अधिकतम होता है। अत: इससे यह परिणाम निकलता है कि किसी बिन्दु से होकर औसत ऊर्जा प्रवाह शून्य होता है। ऊर्जा केवल इधर-उधर तरंगायित होती रहती है। इसी कारण इन तरंगों को अप्रगामी या अचर तरंगें कहते हैं।

14.5.3 प्रगामी और अप्रगामी तरंगों में अंतर

आइये अब हम प्रगामी तथा अप्रगामी तरंगों में अंतरों का संक्षेप में वर्णन करें।

प्रगामी तरंगें	अप्रगामी तरंगें
1. माध्यम की कुछ अवस्थाएं जैसे शृंग और गर्त या संपीडन तथा विरलन, किसी निश्चित चाल से गमन करती हुई दिखाई पड़ती हैं। यह चाल माध्यम के घनत्व और प्रत्यास्थाता (या तनाव) पर निर्भर करती हैं।	माध्यम के दो निश्चित बिन्दुओं, जिन को निस्पंद कहते हैं, के बीच के खण्ड संकुचित व विस्तृत होते हुए दिखाई पड़ते हैं। माध्यम का प्रत्येक कण माध्य स्थिति के दोनों ओर लोलक की तरह कम्पन करता है।
2. सभी कणों के कम्पन का आयाम समान होता है।	निस्पंदों पर आयाम शून्य तथा प्रस्पंदों पर अधिकतम होता है।
3. एक के बाद एक, सभी कण अपनी मूल स्थिति से अधिकतम वेग से गुजरते हैं।	निस्पंदों पर कण-वेग शून्य तथा प्रस्पदों पर अधिकतम होता है।
4. एक कण से दूसरे को निश्चित वेग से ऊर्जा का स्थानान्तरण होता रहता है।	किसी खण्ड में ऊर्जा का संकुचन व विस्तारन होता रहता है। किन्तु किसी बिन्दु से होकर ऊर्जा का प्रवाह नहीं होता
5. प्रगामी तरंगों में एक के बाद एक, सभी कण अपनी अधिकतम चाल प्राप्त करते हैं।	अप्रगामी तरंगों में भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर अधिकतम वेग भी भिन्न होता है। यह निस्पंदों पर शून्य, किन्तु प्रस्पंदों पर अधिकतम होता है। सभी कण अपना-अपना अधिकतम वेग एक साथ प्राप्त करते हैं।
6. प्रगामी तरंगों में माध्यम के सभी क्षेत्रों पर एक समान विकृति होती है।	अप्रगामी तरंगों में विकृति निस्पंदों पर अधिकतम तथा प्रस्पंदों पर शून्य होती है।
7. माध्यम में ऐसा कोई भी बिन्दु नहीं होता जहाँ पर घनत्व में परिवर्तन नहीं होता।	प्रस्पंदों पर घनत्व में परिवर्तन नहीं होता, किन्तु, निस्पंदों पर अधिकतम घनत्व परिवर्तन होता है।

पाठगत प्रश्न 14.5

1. क्या अप्रगामी तरंगों में किसी बिन्दु से होकर ऊर्जा प्रवाह होता है? अपने उत्तर के लिए कारण लिखिए।

2. दो लगातार निस्पंदों के तथा एक निस्पंद व निकटस्थ प्रस्पंद के बीच की दूरी कितनी होती है।
3. स्पष्ट कीजिए– दाब निस्पंद, विस्थापन स्पंद है और दाब प्रस्पंद, विस्थापन निस्पंद है।
4. वायु में 170 Hz आवृत्ति की अप्रगामी तरंगें बनी हैं। यदि वायु में तरंग वेग 340 ms^{-1}, हो तो (i) दो निकटस्थ निस्पंदों (ii) दो निकटस्थ प्रंस्पंदों तथा (iii) निकटस्थ निस्पंद व प्रस्पंद, के बीच की न्यूनतम दूरी क्या होगी?

14.6 सुस्वर ध्वनि के अभिलक्षण

सुस्वर ध्वनि के अभिलक्षण हमें दो सुस्वर ध्वनियों के बीच भेद करने में सहायता करते हैं। ये अभिलक्षण हैं– तारत्व, प्रबलता और गुणता (या स्वरूप)। अब हम इनका संक्षेप में वर्णन करेंगे।

14.6.1 तारत्व (Pitch)

तारत्व संगीतिक स्वरों का वह अभिलक्षण है जिसमें हम स्वरों का 'उच्च स्वर' या 'निम्न स्वर' में वर्गीकरण कर सकते हैं। यह एक व्यक्तिपरक (subjective) राशि है जो किसी यंत्रसे नहीं नापी जा सकती है। यह स्वर की आवृत्ति पर निर्भर करता है, कर्ण-भेदी, तीक्ष्ण या तीव्र ध्वनि को उच्च तारत्व की ध्वनि कहा जाता है। किन्तु मंद, भारी या सपाट स्वर को निम्न तारत्व की ध्वनि कहते हैं। शेर की दहाड़ उच्च प्रबलता की किन्तु निम्न तारत्व की ध्वनि है। दूसरी ओर मच्छरों की भिनभिनाहट की ध्वनि यद्यपि कम तीव्रता की है, किन्तु उसका उच्च तारत्व है।

14.6.2 प्रबलता

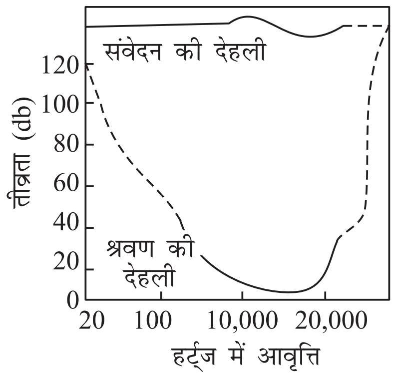
ध्वनि की प्रबलता किसी श्रोता के कान द्वारा प्राप्त ध्वनि की तीव्रता का व्यक्तिपरक (subjective) प्रभाव है, तरंगों की तीव्रता को तरंग द्वारा एकांक क्षेत्र के किसी पृष्ठ के पार एवं उस के लम्बवत्, एकांक समय में वाहित औसत ऊर्जा से मापा जाता है। हमारे कान ध्वनि के बहुत बड़े परास के लिए सुग्राही हैं। अत: ध्वनि प्रबलता के लिये अंकीय स्केल की अपेक्षा लघुगणकीय मापक्रम (स्केल) अधिक सुविधाजनक है।

श्रवण की देहली और ध्वनि की तीव्रता

किसी तरंग के तीव्रता स्तर β को निम्न समीकरण से परिभाषित किया जाता है,

$$\beta = 10 \log I/I_0 \qquad (14.21)$$

जहाँ I_0 स्वेच्छिक रूप से चुनी गई एक संदर्भ तीव्रता है, I_0 का मान 10^{-12} Wm^{-2} लिया गया है। तीव्रता का यह मान उस सबसे मंद ध्वनि के अनुरूप है जिसे हम सुन सकते हैं। तीव्रता स्तर को डेसीबेल (db) से मापा जाता है।यदि किसी तरंग की तीव्रता I_0 या 10^{-12} Wm^{-2} हो तो इसका तीव्रता स्तर $I_0 = 0$ db होता है। श्रवण की सीमा के भीतर मानव के कान की सुग्रहता ध्वनि की आवृत्ति पर निर्भर करती है। किसी आवृत्ति पर



चित्र 14.13 श्रवण की देहली और अनुभव की देहली के बीच का श्रवण क्षेत्र

टिप्पणियाँ

'श्रवण की देहली' उस आवृत्ति पर ध्वनि की वह निम्नतम तीव्रता है जिसका संसूचन किया जा सकता है अर्थात् जिसे सुना जा सकता है।

अनुभव की गई प्रबलता का मापदंड सोन (sone) है। एक सोन वह प्रबलता है जो 1kHz आवृत्ति एवं 40db तीव्रता की ध्वनि एक सामान्य श्रवण शक्ति के व्यक्ति के दोनों कानों पर पड़ने पर वह अनुभव करता है।

चित्र 14.13 में उन आवृत्तियों एवं तीव्रताओं को निरूपित किया गया है जिनके लिए कान सुग्राही होता है। यह चित्र वास्तव में आवृत्ति (हर्ट्ज में) एवं तीव्रता (डेसीबेल में) के बीच ग्राफ है। यह उत्तम श्रवण के लिए श्रवण क्षेत्र का ग्राफ है। इस वक्र के संबंध में निम्नलिखित तथ्यों पर ध्यान दीजिए।

- वक्र का निचला भाग प्रदर्शित करता है कि कान 2000Hz से 3000Hz की आवृत्तियों के लिये सर्वाधिक सुग्राही होते हैं, जहाँ 'श्रवण की देहली' लगभग 5db है। सामान्यत: श्रवण की देहली शून्य db होती है।
- वक्र के ऊपरी भाग के संगत तीव्रताओं से ऊपर की तीव्रताओं पर संवदेन श्रवण से असुविधा और पीड़ा तक में बदल जाता है। वक्र का यह भाग संवेदन की देहली है।
- प्रबलता, तीव्रता के साथ बढ़ती है, किन्तु दोनों के बीच कोई स्पष्ट संबंध नहीं है।
- यह आवश्यक नहीं है कि एक ही तीव्रता किन्तु पृथक आवृत्ति के दो शुद्ध स्वर समान प्रबलता उत्पन्न करें।
- सभी आवृत्तियों के लिए ऊपरी वक्र की ऊंचाई 120 db पर नियत है।

ध्वनि तरंगों की तीव्रता निम्नलिखित कारकों पर निर्भर करती हैं:

- **कम्पन का आयाम:** $I \alpha a^2$, जहाँ a तरंग का आयाम है।
- **श्रोता एवं स्रोत के बीच की दूरी:** $I \alpha \frac{1}{r^2}$, जहाँ r दोनों के बीच की दूरी है (स्रोत बिन्दु रूप हो तो)
- तीव्रता आवृत्ति के वर्ग के समानुपाती होती है ($I \alpha v^2$)
- तीव्रता माध्यम के घनत्व के समानुपाती होती है ($I \alpha \rho$)

14.6.3 गुणता

यह ध्वनि तरंगों का वह अभिलक्षण है, जिसके कारण हम पृथक-पृथक वाद्य यंत्रों के स्वरों को पहचान सकते हैं भले ही वह समान तारत्व व प्रबलता के क्यों न हों। स्वरित्र द्विभुज के

अतिरिक्त अन्य कोई भी यंत्र, शुद्ध स्वर (अर्थात् एक ही विशेष आवृत्ति का स्वर) उत्पन्न नहीं करता। जब कोई यंत्र n आवृत्ति का स्वर उत्पन्न करता है तो, इस स्वर के साथ-साथ अन्य उच्च आवृत्तियों $2n, 3n\ 4n$ .... के स्वर भी उस यंत्र से उत्पन्न हो सकते हैं। इन स्वरों के पृथक-पृथक् आयाम और कला संबंध होते हैं। इन उत्पन्न तरंगों का परिणामी तरंग स्वरूप उत्सर्जित स्वर की गुणता को निर्धारित करता है। प्रबलता और तारत्व के समान गुणता भी एक व्यक्तिपरक राशि है, यह परिणामी तरंग-स्वरूप पर निर्भर करती है।

14.6.4 ऑर्गन पाइप

यह सरलतम रूप का वायु यंत्र है। लकड़ी अथवा धातु का पाइप जो सुस्वर ध्वनि उत्पन्न करता है, ऑर्गन पाइप कहलाता है। बांसुरी, ऑर्गन पाइप का एक उदाहरण है। यदि इसके दोनों सिरे खुले हों तो इसे खुला पाइप कहते हैं। यदि इसका एक सिरा बन्द हो तो इसे **बन्द पाइप** कहते हैं। यदि हम किसी ऑर्गन पाइप को धीरे से फूंकते हैं, तो इससे लगभग शुद्ध स्वर निकलता है। इस शुद्ध स्व्र को **मूल स्वरक** कहते है। किन्तु यदि हम ऑर्गन पाइप को जोर से फूंकें, तो हमें कई अन्य स्वर भी सुनाई देंगे जिनकी आवृत्तियाँ मूल स्वर की आवृत्ति की पूर्णांकी गुणक होती हैं। आप किसी नल से बाल्टी में गिरते हुए पानी द्वारा उत्पन्न विभिन्न ध्वनियों को पहचान सकते हैं। *मूल स्वरक* की इन पूर्णांकी गुणक आवृत्तियों को **अधिस्वरक** (overtone) कहते हैं।

ध्यान में रखिये कि

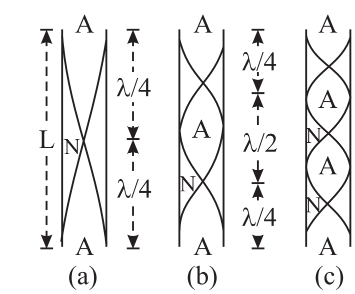
- किसी ऑर्गन पाइप के बन्द सिरे पर वायु के कणों का विस्थापन नहीं हो सकता है, अत: बन्द सिरे पर निस्पंद ही बनना निश्चित है।
- ऑर्गन पाइप का खुला सिरा बाहरी वायुमंडल के सम्पर्क में है अत: वहाँ घनत्व का परिवर्तन अवश्य ही शून्य होगा। अत: खुले सिरे पर अवश्य ही प्रस्पंद बनेगा।

(a) खुला ऑर्गन पाइप : वायु स्तंभ के कम्पनों की सरलतम विधा (mode) को चित्र 14. 14 (a) में दिखाया गया है। इसे मूल स्वरक कहते हैं। इसमें दोनों सिरों पर प्रस्पंद है और उनके बीच में एक निस्पंद हैं। क्योंकि एक प्रस्पंद से उसके निकटतम निस्पंद के बीच की दूरी $\lambda/4$ होती है अत: यदि पाइप की लम्बाई l हो तो

$l = (\lambda/4) + (\lambda/4) = \lambda/2$ or $\lambda = 2l$.

अत: उत्पन्न स्वर की आवृत्ति

$$n_1 = \upsilon/\lambda = \upsilon/2l$$



चित्र 14.14: खुले ऑर्गन पाइप के सन्नादी। वक्र अनुदैर्ध्य अप्रगामी तरंगों को प्रकट करते हैं।

वायुस्तम्भ के कम्पनों की अगली विधा को चित्र 14.14 (b) में दिखाया गया है। इस विधा में एक प्रस्पंद तथा एक निस्पंद और उत्पन्न हो गए हैं। इस दशा में

$$\lambda = (\lambda/4) + (\lambda/4) + (\lambda/4) + (\lambda/4) = l$$

इसमें उत्पन्न स्वर की आवृत्ति

$$n_2 = \upsilon/\lambda = \upsilon/l = 2\upsilon/2l$$

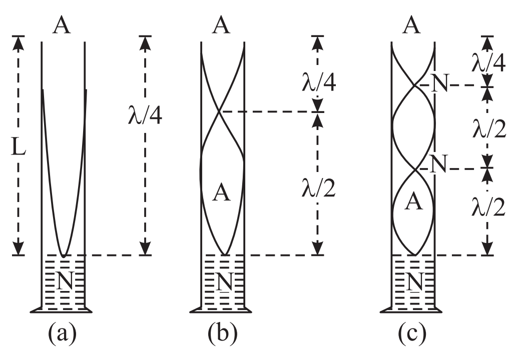
$$n_2 = 2\upsilon/2l$$

अर्थात् $n_2 = 2n_1$

इस प्रकार उत्पन्न स्वर को **द्वितीय संनादी** या **प्रथम अधिस्वरक** कहते हैं। द्वितीय अधिस्वरक प्राप्त करने के लिए आपको पाइप को और जोर से फूंकना होगा अब इसमें एक और निस्पंद तथा एक और प्रस्पंद उत्पन्न होंगें [(चित्र 14.14 (c)]। अतः इस स्थिति में,

$$l = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

$$\lambda = \frac{2l}{3}$$



चित्र 14.15: बन्द ऑर्गन पाइप के संनादी। चित्र में वक्र अनुदैर्ध्य अप्रगामी तरंगों के तरंग रूप को निरूपित करते हैं।

अतः उत्पन्न स्वर की आवृत्ति

$$n_3 = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{3\upsilon}{2l} = 3n_1$$

इस प्रकार उत्पन्न स्वर को तृतीय संनादी या द्वितीय अधिस्वरक कहते हैं।

(b) बन्द ऑर्गन पाइप : किसी बन्द ऑर्गन पाइप में वायु स्तंभ के कम्पन की सरलतम विधि चित्र 14.5 (a) में दिखाई गई है, इसमें पाइप के खुले सिरे पर एक प्रस्पंद और बन्द सिरे पर एक निस्पंद है। उत्पन्न तरंग की तरंगदैर्ध्य के लिये यह संबंध है।

$$l = \lambda/4 \text{ or } \lambda = 4l$$

अतः उत्सर्जित स्वर की आवृत्ति,

$$n_1 = \upsilon/\lambda = \upsilon/41$$

टिप्पणियाँ

इस प्रकार उत्पन्न स्वर को मूल स्वरक कहते हैं। पाइप को ओर जोर से फूंकने से एक और निस्पंद व एक और प्रस्पंद बन जायेंगे [चित्र 14.5(b)]। उत्पन्न स्वर की तरंगदैर्ध्य के लिए,

$$l = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{3\lambda}{4} \quad \text{or } \lambda = \frac{4l}{3}$$

इस स्वर की आवृत्ति,

$$n_3 = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{3\upsilon}{4l} = 3n_1$$

इस स्वर को मूल स्वरक का **प्रथम अधिस्वरक** या **तृतीय संनादी कहते हैं।**

$$l = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{5\lambda}{4} \quad \text{or } \lambda = \frac{4l}{5}$$

पाइप को और अधिक जोर से फूंकने पर एक और प्रस्पंद तथा और निस्पंद बन जायेगा [चित्र 14.5 (c)] उत्पन्न स्वर की तरंगदैर्ध्य के लिये

$$n_3 = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{5\upsilon}{4l} = 5n_1$$

इस प्रकार उत्पन्न स्वर को **द्वितीय अधिस्वरक** या पाँचवां संनादी कहते हैं।

खुले व बन्द पाइपों द्वारा उत्सर्जित स्वरों की तुलना से आप पाएंगे कि खुले पाइप में कहीं अधिक अधिस्वरक होते हैं। बन्द पाइपों में सम संख्यक (even numbered) संनादी नहीं होते।

उदाहरण 14.1 बराबर लंबाई के दो पाइप, एक बन्द व दूसरा खुला, दिए गए हैं, उनके मूल स्वरकों की आवृत्तियों का अनुपात क्या होगा?

हल : $\dfrac{\text{खुले पाइप की आवृत्ति}}{\text{बन्द पाइप की आवृत्ति}} = \dfrac{\upsilon / 2\ell}{\upsilon / 4\ell} = 2$

अतः, खुले पाइप द्वारा उत्पन्न मूल स्वरक की आवृत्ति $= 2\times$ बन्द पाइप द्वारा उत्पन्न मूल स्वरक की आवृत्ति

पाठागत प्रश्न 14.6

1. तारत्व व आवृत्ति में क्या संबंध है?
2. सुस्वर ध्वनि का वह कौन सा अभिलक्षण है जिससे हम दो भिन्न-भिन्न वाद्य यंत्रों द्वारा उत्पन्न दो स्वरों को पहचान लेते हैं भले ही उनकी आवृत्ति व तीव्रता बराबर क्यों न हों?
3. ध्वनि के उस अभिलक्षण का नाम लिखिए जो आपको अपने मित्र की आवाज, पहचानने में सहायता करता है।

4. खुले तथा बन्द ऑर्गन पाइप में किसमें अधिक अधिस्वरक होते हैं?
5. समान लम्बाई के (i) खुले पाइप (ii) बन्द पाइप, द्वारा उत्पन्न स्वरों की आवृत्तियों में क्या अनुपात होता है?
6. खुले पाइप के मूल स्वरक की आवृत्ति पर ताप का क्या प्रभाव होगा?

ध्वनि प्रदूषण

जब ध्वनि की अनुभूति श्रवण से असुविधा तक पहुंच जाती है (अर्थात् जब किसी ध्वनि को सुनने से हमें असुविधा होने लगे) तो वह ध्वनि प्रदूषण कहलाता है, और यदि यह एक लम्बे समय तक चलता रहे तो उससे कुछ विशेष मानव अंगों पर हानिकारक प्रभाव पड़ता है। शोर (या रव) औद्योगीकरण का एक उपोत्पाद और विज्ञान द्वारा मनुष्य को प्रदत्त आधुनिक सुख-सुविधाओं का दुरुपयोग है। यहाँ हम शोर (रव) के विभिन्न स्त्रोतों और मनुष्य द्वारा अनुभव किये गये उनके प्रभावों का सार प्रस्तुत कर रहे हैं।

सारिणी 14.1: रव (शोर) के स्त्रोत और उनके प्रभाव

स्त्रोत	तीव्रता स्तर db में	मनुष्य द्वारा अनुभव किये गए प्रभाव
श्रवण की देहली	$0\,(=10^{-12}\,Wm^{-2})$	बस सुनने लायक
पत्तियों की सरसराहट	10	नीरव
औसत फुसफुसाहट	20	नीरव (शान्त)
रेडियो (हल्का चलाने पर)	40	नीरव (शान्त)
शान्त मोटर वाहन	50	मन्द कोहलाहलपूर्ण
सामान्य बातचीत	65	मन्द कोलाहलपूर्ण
व्यस्त सड़क पर यातायात	70 to 80	कोलाहलपूर्ण
मोटर बाइक और भारी वाहन	90	बहुत कोलाहलपूर्ण
जेंट इंजन लगभग 35m दूर	105	असुविधाजनक
तड़ित	$120\,(=1\,Wm^{-2})$	असुविधाजनक
उड़ते समय जेट वायुयान	150	कष्टकर ध्वनि

(a) ध्वनि प्रदूषण के प्रभाव

1. इससे श्रवणशक्ति को क्षति पहुंचती है। 86db या अधिक तीव्रता की ध्वनि के लम्बे समय तक कान में पड़ने से कान के भीतरी भाग को बहुत क्षति हो सकती है।
2. इससे हृदय की धड़कन बढ़ जाती है और आँखों की पुतली फैल जाती है।
3. इससे भावात्मक अंशांति, चिन्ता व घबराहट उत्पन्न होती है।

टिप्पणियाँ

4. इससे तीव्र सिरदर्द हो जाता है जिससे उल्टियाँ हो सकती है।

(b) ध्वनि प्रदूषण कम करने की विधियाँ

1. पुराने उद्योगों को हटाकर, नये उद्योगों को मनुष्यों के निवास स्थानों से दूर लगाना।
2. मशीनों की अधिक अच्छी देखभाल करना तथा उनके गतिशील भागों को नियमित रूप से स्नेहक (lubrication) व तेल देना।
3. इंजन तथा मशीनों के अधिक अच्छे डिजाइन।
4. लाउडस्पीकारों तथा एम्लीफायरों पर रोक।
5. धार्मिक, राजनीतिक और वैवाहिक जलूसों में पटाखे, बैंड तथा लाउडस्पीकरों के उपयोग को नियंत्रित करना।
6. ध्वनि के मार्ग रोकने के लिये पेड़ लगाना।
7. ध्वनि के मार्ग को रोकने के लिये ध्वनि अवशोषक पदार्थों का उपयोग।
8. दस्तानों व रूई के प्लगों का उपयोग।

प्रघाती तरंगे

यदि कोई ध्वनि तरंग स्रोत ध्वनि तरंगों के वेग से अधिक वेग से गति कर रहा तो प्रघाती तरंगे उत्पन्न होती हैं। इसका एक सुविदित उदाहरण है जब किसी श्रोता के ठीक ऊपर कोई ध्वनि की चाल से तेज चलने वाला वायुयान गुज़रता है तो उसे विस्फोटक ध्वनि सुनाई देती है। यह सुविदित है कि ध्वनि से अधिक तीव्र गति से चलने वाला पिंड स्वंय ध्वनि स्रोत होता है।

14.7 विद्युत चुम्बकीय तरंगें

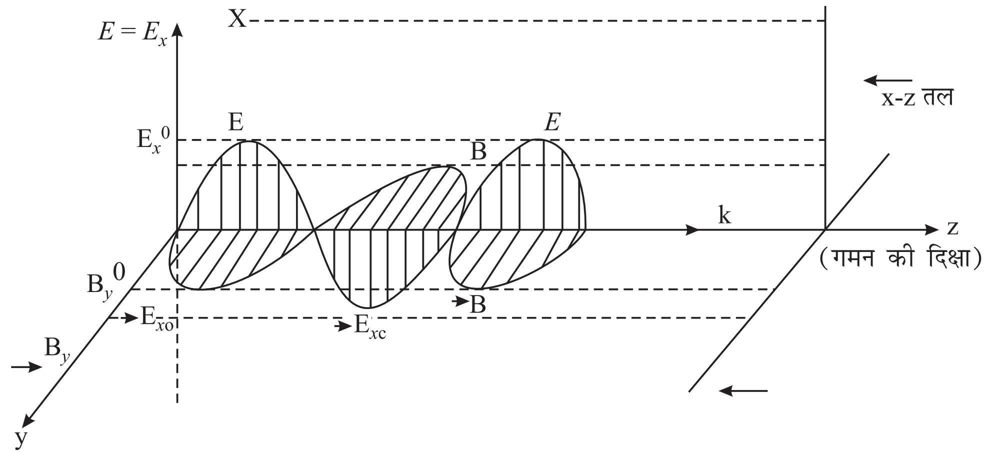
आप जानते हैं कि प्रकाश एक विद्युत चुम्बकीय तरंग है। इसकी तरंगदैर्ध्य 4000 A^{o} से 7500A^{o} तक होती है। विद्युत चुम्बकीय तरंगों का एक संक्षिप्त विवरण नीचे दिया गया है।

14.7.1 विद्युत चुम्बकीय तरंगों के गुण

विद्युत चुम्बकीय तरंगों के निम्नलिखित गुणों को सावधानी पूर्वक नोट कीजिए

(*i*) ये तरंगे अनुप्रस्थ होती हैं,

(*ii*) इनमें विद्युत क्षेत्र (E) और चुम्बकीय क्षेत्र (B), एक दूसरे के तथा तरंगों के प्रसारण की दिशा (k) के लम्बवत् दोलन करते हैं। साथ ही $\mathbf{E} = c\mathbf{B}$. [देखिये चित्र 14.16]।



चित्र 14.16 : विद्युत चुम्बकीय तरंगों में विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र

(iii) ये तरंगें निर्वात से होकर गमन कर सकती हैं जहाँ इनका वेग $= \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8$ $\text{ms}^{-1} = c$ (प्रकाश का वेग) होता है। यदि किसी माध्यम की चुम्बकशीलता $\mu \,(= \mu_0 . \mu_r)$ और विद्युतशीलता $\varepsilon \,(= \varepsilon_0 \,.\, \varepsilon_r)$ हो तो वेग हो जायेगा–

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\,\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} < c$$

(iv) इन तरंगों का व्यवहार व प्रकृति उनकी आवृत्ति (या तरंगदैर्ध्य) पर निर्भर करती है। मैक्सवेल के सिद्धान्त के अनुसार विद्युत चुम्बकीय तरंगों की संभावित तरंगदैर्ध्य पर कोई प्रतिबंध नहीं है। अत: 6×10^{-13} m तरंगदैर्ध्य से लेकर और अधिक तरंगदैर्ध्य की तरंगे सफलतापूर्वक उत्पन्न की गई हैं। बहुत अधिक तरंगदैर्ध्य की विद्युत चुम्बकीय तरंगों की, जो रेडियो तरंगों के संगत हैं, कोई सीमा नहीं है। दीर्घ से लेकर लघु तरंगदैर्ध्य तक की विद्युत चुम्बकीय तरंगों के पूरे परिसर से विद्युत चुम्बकीय स्पैक्ट्रम बनता है।

जेम्स क्लार्क मैक्सवेल
(1831 – 1879)

स्काटलैंड निवासी गणितज्ञ और भौतिक विज्ञानी मैक्सवेल विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र संबंधी अपने सिद्धान्तों के लिये प्रसिद्ध हैं।विद्युत चुम्बकीय सिद्धान्तों के अपने समीकरणों द्वारा उन्होंने दर्शाया कि ये निर्विवाद रूप से विद्युत चुम्बकीय तरंगों के अस्तित्व का संकेत देते हैं, जो प्रकाश के वेग से चलती हैं; और इस प्रकार प्रकाश व विद्युत चुम्बकत्व में परस्पर संबंध है।

क्लासियस के साथ उन्होंने गैसों के गत्यात्मक सिद्धान्त को विकसित किया। उन्होंनें ऊष्मा के सांख्यिकीय सिद्धांत को विकसित किया। वे अनेक विषयों में रूचि रखने वाले व्यक्ति थें उन्होंने ऊर्जा के सम विभाजन प्रमेय को व्युत्पन्न किया। यह प्रदर्शित किया कि श्यानता ताप के समानुपाती होती है। उन्होंने शनि ग्रह के वलयों की व्याख्या करने का प्रयत्न किया।

14.7.2 विद्युत चुम्बकीय स्पेक्ट्रम

मैक्सवेल ने विद्युत चुम्बकीय तरंगो के अस्तित्व का विचार दिया जबकि हर्ट्ज, जगदीश चन्द्र बोस, मार्कोनी व अन्य वैज्ञानिकों ने प्रयोगात्मक रूप से, भिन्न–भिन्न तरंग दैर्ध्य की ऐसी तरंगों को सफलतापूर्वक उत्पन्न किया। तथापि सभी विधियों में विद्युत चुम्बकीय तरंगों का स्रोत त्वरित आवेश है। इन तरंगों का वर्गीकरण उनके उत्पन्न करने की विधियों के अनुसार किया जाता है और तदनुसार उनका नाम रखा जाता है। विभिन्न वर्ग की इन तरंगों द्वारा स्प्रैक्ट्रम के कुछ भागों का अतिव्यापन (Overlapping) भी देखा जाता है। यह प्रकट करता है कि अतिव्यापित क्षेत्र में विद्युत चुम्बकीय तरंगे भिन्न–भिन्न विधियों से उत्पन्न की जा सकती हैं। यह याद रखना महत्वपूर्ण है कि विद्युत चुम्बकीय तरंगों के गुण उनकी आवृत्तियों या तरंगदैर्ध्यों पर निर्भर करते हैं न कि उनके उत्पादन की विधियों पर। विद्युत चुम्बकीय तरंगों का एक उपयुक्त वर्गीकरण विद्युत चुम्बकीय स्प्रेक्ट्रम कहलाता है।

विद्युत चुम्बकीय तरंगों के किसी वर्ग और उसके अगले वर्ग के बीच कोई स्पष्ट विभाजक बिन्दु नहीं है। इसके विभिन्न वर्ग निम्नलिखित है:

(i) **निम्न आवृत्ति विकिरण** $\left\{\begin{matrix} v = 60\text{Hz to } 50\text{Hz} \\ \lambda = 5\times10^{6}\, m \text{ to } 6\times10^{6}\, m \end{matrix}\right\}$: प्रत्यावर्ती धारा (a.c.) परिपथों से उत्पादित इन विकिरणों का वर्गीकरण, शक्ति आवृत्तियों या शक्ति तरंगों या विद्युत शक्ति उपयोगिता युक्त विद्युत चुम्बकीय तरंगों के रूप में किया जाता है। इन तरंगों की आवृत्ति निम्नतम होती है।

(ii) **रेडियो तरंगे**– $\left\{\begin{matrix} \lambda = 0.3\text{m to } 10^{6}\text{ m} \\ v = 10^{9}\text{ Hz to } 300\text{Hz} \end{matrix}\right\}$: रेडियों तरंगें तब उत्पन्न होतीं हैं जब आवेशों को चालक तारों से होकर त्वरित किया जाता है। ये L.C. दोलित्रों जैसी इलैक्ट्रॉनिक युक्तियों में उत्पन्न होती हैं। इनका रेडियो व टेलीविजन प्रसारण में बहुत उपयोग होता है।

(iii) **सूक्ष्म तरंगे** $\left\{\begin{matrix} \lambda = 10^{-3}\text{ m to } 0.3\text{m} \\ v = 10^{11}\text{ Hz to } 10^{9}\text{ Hz} \end{matrix}\right\}$: इनका उत्पादन विशेष निर्वात् नलिकाओं में दोलायमान धाराओं द्वारा होता है। अपनी सूक्ष्य तरंग दैर्ध्य के कारण ये वायुयानों के संचालन में प्रयुक्त रडारों, टीवी प्रसारण और पदार्थ के आण्विक तथा परमाणुवीय गुणों का अध्ययन करने के लिए बहुत उपयुक्त हैं। सूक्ष्म तरंग चूल्हों में इन तरंगों का उपयोग उष्मा तरंगों के रूप में किया जाता है। यह सुझाव दिया गया है कि सौर (ऊर्जा) संग्राहकों द्वारा अंतरक्षि से पृथ्वी को सूक्ष्म तरंगे विकीर्ण कर सौर ऊर्जा का दोहन किया जा सकता है।

(iv) **अवरक्त किरणें** $\left\{\begin{matrix} \lambda = 7\times10^{-7}\text{ m to } 10^{-3}\text{ m} \\ v = 4.3\times10^{14}\text{ Hz to } 3\times10^{11}\text{ Hz} \end{matrix}\right\}$: अवरक्त किरणों का उष्मता लहरें भी कहा जाता है। ये अधिकांश पदार्थों द्वारा तुरंत अवशोषित हो जाती हैं। जो वस्तु इन तरंगों का अवशोषण करती हैं, उनका ताप बढ़ जाता है। अवरक्त विकिरणों के कई व्यवहारिक और वैज्ञानिक उपयोग हैं, जैसे शारीरिक चिकित्सा, अवरक्त फोटोग्राफी इत्यादि। इन तरंगों को ताप वैद्युत पुंज (थर्मोपाइल) से संसूचित किया जा सकता है।

(v) **दृश्य प्रकाश** $\begin{Bmatrix} \lambda = 4\times10^{-7}\,\text{m to } 7\times10^{-7}\,\text{m} \\ v = 7.5\times10^{14}\,\text{Hz to } 4.3\times10^{14}\,\text{Hz} \end{Bmatrix}$: यह वह विद्युत चुम्बकीय (e.m.) तरंगें हैं जिन्हें हमारी आँख संसूचित कर सकती है या जिनके लिए मानव की आँख का रेटीना (दृष्टिपटल) संवेदनशील है। यह सम्पूर्ण विद्युत चुम्बकीय स्पेक्ट्रम का एक छोटा सा भाग है। ये परमाणुओं और अणुओं में इलेक्ट्रॉनों के पुनर्विन्यास से उत्पन्न होती हैं, जब कोई इलेक्ट्रॉन किसी परमाणु के बाहरी कक्ष से कम ऊर्जा के भीतरी कक्ष में गिरता है तो अतिरिक्त ऊर्जा दृश्य विकिरणों के रूप में विकिरित हो जाती है। दृश्य प्रकाश की विभिन्न तरंग दैर्ध्यों का रंगों में वर्गीकरण किया गया है। यह रंग बैगनी $(\lambda = 4\times10^{-7}\text{m})$ से लाल $(\lambda = 7\times10^{-7})$. तक हैं। मानव नेत्र पीले रंग के प्रकाश $(\lambda = 5\times10^{-7}\text{m})$.लिए सर्वाधिक सुग्राही है। प्रकाश हमारे चारों ओर के विश्व से सम्पर्क के लिए मूलाधार है।

(vi) **पराबैंगनी** $\begin{Bmatrix} \lambda = 3\times10^{-9}\,\text{m to } 4\times10^{-7}\,\text{m} \\ v = 10^{-17}\,\text{Hz to } 7.5\times10^{14}\,\text{Hz} \end{Bmatrix}$: सूर्य पराबैंगनी विकिरणों का महत्वपूर्ण स्रोत है, जो धूप-ताम्रता का मुख्य कारण है। सूर्य से आने वाले पराबैंगनी प्रकाश का अधिकांश भाग ऊपरी वायुमंडल अर्थात समतापमंडल द्वारा जहां ओजोन गैस होती है, अवशोषित कर लिया जाता है। यह ओजोन परत तब अवशोषित ऊर्जा को ऊष्मा-विकिरणों के रूप में उत्सर्जित करती है, इस प्रकार ओजोन द्वारा प्राण घातक (प्राणियों के लिए हानिकार) विकिरण, लाभदायक ऊष्मा विकिरणों में परिवर्तित कर दिए जाते हैं जिससे वायुमण्डल गर्म रहता है। इन परा बैंगनी किरणों का उपयोग पीने के पानी में कीटाणु को नष्ट करने, आपरेशन कक्षों को रोगाणुरहित करने और दस्तावेजों की जालसाजी की जांच करने के लिए किया जाता है।

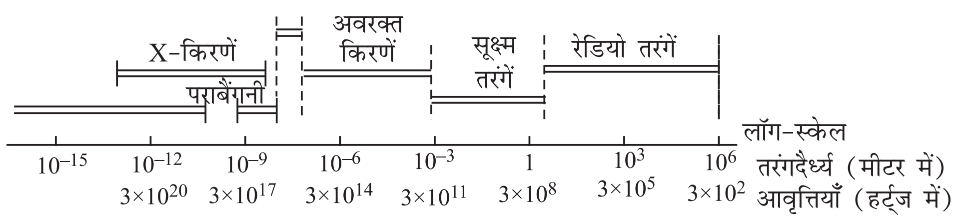
(vii) **एक्स-किरणें** $\begin{Bmatrix} \lambda = 4\times10^{-13}\,\text{m to } 4\times10^{-8}\,\text{m} \\ v = 7.5\times10^{20}\,\text{Hz to } 7.5\times10^{15}\,\text{Hz} \end{Bmatrix}$: एक्स-किरणें तब उत्पन्न होती हैं जब टंगस्टन जैसी किसी उच्चगलनांक की धातु के लक्ष्य पर उच्च ऊर्जा के इलेक्ट्रानों की बौछार की जाती है। एक्स किरणों का महत्वपूर्ण उपयोग चिकित्सीय निदान और कुछ प्रकार के कैंसरों के इलाज में किया जाता है। क्योंकि एक्स-किरणें जीवित ऊतकों को नष्ट करती हैं अतः सावधानी रखनी चाहिए कि अधिक समय तक एक्स किरणें सम्पर्क में न आएं। एक्स किरणों का उपयोग क्रिस्ट्रलों की संरचना के अध्ययन में भी होता है। एक्स-किरणों का संसूचन (पहचान) फोटोग्राफिक प्लेटों से होता है।

(viii) **गामा किरणें** $\begin{Bmatrix} \lambda = 6\times10^{-17}\,\text{m to } 10^{-10}\,\text{m} \\ v = 5\times10^{24}\,\text{Hz to } 3\times10^{18}\,\text{Hz} \end{Bmatrix}$: ये किरणें कोबल्ट (60) और सीजियम (137) जैसे रेडियो ऐक्टिव (विघटनामिक) नाभिकों से उत्सर्जित होती हैं। ये नाभिकीय रिऐक्टरों में कुछ नाभिकीय अभिक्रियों के दौरान भी निकलती हैं। गामा किरणों की भेदन क्षमता बहुत अधिक होती हैं। जीवित ऊतकों द्वारा अवशोषित होने पर ये उन्हें गंभीर क्षति

टिप्पणियाँ

पहुँचाती हैं। गामा किरणों के घातक प्रभाव से बचने के लिए लेड धातु की मोटी चादरों का उपयोग किया जाता है। विद्युत चुम्बकीय तरंगों की ऊर्जा (E) उनकी आवृत्ति के समानुपाती ($E = h\nu$) तथा तरंग दैर्ध्य की व्युत्क्रमानुपाती $\left(E = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}\right)$ होती है। अतः गामा किरणों में सर्वाधिक ऊर्जा और भेदन क्षमता होती हैं जबकि शक्ति आवृत्तियों और ए.एम (आयाम मॉडुलित) रेडियो तरंगसबसे दुर्बल विकिरण हैं। गामा किरणों का उपयोग धातु की ढली हुई वस्तुओं में त्रुटियों जानने के लिए किया जाता है। गामा किरणों का संसूचन गाइगर नली या प्रस्फुरण गणित्र के द्वारा किया जाता है।

स्पैक्ट्रम में भिन्न-भिन्न प्रकार के विकिरणों का लाक्षणिक व्यवहार, माध्यम के अनुसार, भिन्न-भिन्न होता है, उदाहरण के लिए हमारा सम्पूर्ण शरीर दृष्य विकिरणों के लिए अपारदर्शी है, हमारे ऊतक एक्स किरणों के लिए पारदर्शी हैं। इसी प्रकार पृथ्वी के वायुमण्डल का व्यवहार भी भिन्न-भिन्न प्रकार के विकिरणों के लिए भिन्न होता है।



चित्र. 14.17 : विद्युत चुम्बकीय स्प्रेक्ट्रम

पाठगत प्रश्न 14.7

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

   (i) .... विशेष निर्वात नलिकाओं में दोलित धाराओं से उत्पन्न होती हैं।.

   (ii) मानव नेत्र .... रंग के लिए सर्वाधिक संवेदनशील है।

   (iii) .... पराबैगनी विकिरणों का महत्वपूर्ण स्रोत है।

   (iv) .... का उपयोग चिकित्सा में निदान के लिए एक साधन के रूप में होता है।

   (v) अवरक्त विकिरणों का संसूचन .... से होता है।

2. किन विकिरणो में अधिक ऊर्जा होती है?

   (i) पराबैगनी या अवरक्त ....

   (ii) एक्स-किरणें या गामा किरणें ....

3. वायुयानों के संचालन-रडार में किन तरंगों का उपयोग होता है?

4. कौन सी गैस सूर्य से आने वाले परा बैगनी विकिरणों को पृथ्वी की सतह तक पहुँचने से रोकती है?
5. किसी विद्युत चुम्बकीय (e.m.) क्षेत्र में विद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्र आपस में किस प्रकार अभिविन्यस्त होते हैं?

14.8 डॉप्लर प्रभाव

रेलवे प्लेटफॉर्म पर किसी आने वाली ट्रेन (रेलगाड़ी) की प्रतीक्षा करते हुए आपने अवलोकन किया होगा कि हमारी ओर आते हुए इंजन की सीटी के तारत्व, और हमसे दूर जाते हुए इंजन की सीटी के तारत्व, में अन्तर होता है। आप नोट करेंगे कि जब इंजन हमारी ओर आता है तो तारत्व अधिक होता है और जब वह हमसे दूर जाता है तो तारत्व कम होता है। इसी प्रकार पहाड़ो में चढ़ाई पर चढ़ती बस के हार्न का तारत्व भी लगातार बदलता रहता है। ध्वनि के स्रोत तथा श्रोता की सापेक्ष गति के कारण आवृत्ति में आभासी परिवर्तन डॉप्लर प्रभाव कहलाता है।

क्रिस्चियन डॉप्लर

(1803 – 1853)

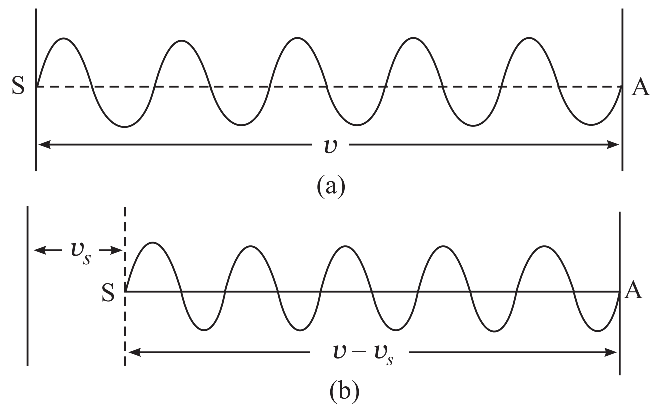
आस्ट्रिया निवासी भौतिक विज्ञानी और गणितज्ञ सी.जे. डॉप्लर का जन्म नवम्बर 29,1803 में एक राज के घर में हुआ था। दुबले पतले डॉप्लर को अपने पारिवारिक व्यावसाय के लिए अधिक योग्य नहीं माना जाता था। अत: साल्जबर्ग लाइकोसिन में गणित के प्रोफेसर की सिफारिश पर उन्हें वियेना पॉलिटैक्निक भेज दिया गया जहां से उन्होंने 1825 ई. में स्नातक परीक्षा पास की। डॉप्लर को जीवन पर्यंत संघर्ष करना पड़ा। उन्होंने 18 महीने एक रुई कातने की फैक्ट्री में मुनीम (या लेखाकार) का काम करना पड़ा। 1836 में जब उन्हें एक टेक्निकल माध्यमिक विद्यालय में स्थायी नियुक्ति मिली तब ही वे अपने विवाह के बारे में सोच पाए। एक बार विद्यार्थियों के लिए गणित का कठिन प्रश्न पत्र बनाने के लिए उन्हें डाँट भी पड़ी थी। किन्तु अनेक बाधाओं को हटाते हुए वे अंत में वियेना विश्वविद्यालय के नये भौतिकी संस्थान का निदेशक बनने में सफल हुए।

डॉप्लर प्रभाव की खोज ने उन्हें रातों रात प्रसिद्ध बना दिया, क्योंकि इसके ध्वनि विज्ञान और प्रकाश विज्ञान पर दूरगामी प्रभाव हुए। विज्ञान व प्रौद्योगिकी में, रडार, सोनार, प्रसारी विश्व की धारणा आदि ऐसे कई विकासों के लिए हम डॉप्लर प्रभाव के आभारी हैं। मार्च 17, 1853 में इटली के नगर वेनिस में उनकी मृत्यु हो गई।

कल्पना कीजिए कि माध्यम (वायु) के सापेक्ष ध्वनि का वेग υ ध्वनि स्रोत का वेग υ_s और श्रोता का वेग υ_o है। यहाँ यह नोट करना महत्वपूर्ण है कि गतिशील स्रोत से उत्पन्न तरंगे ध्वनि की चाल पर कोई प्रभाव नहीं डालतीं। चाल υ माध्यम का गुण है। स्रोत से निकलने के पश्चात तरंगें उस स्रोत को भूल जाती हैं। मान लीजिए कि ध्वनि का स्रोत, श्रोता और ध्वनि की तरंगे

बाईं से दाईं ओर को गमन करती हैं। पहले हम स्रोत की गति के प्रभाव पर विचार करें कोई स्वर जो किसी समय ध्वनि के स्रोत को छोड़ता है, एक सेंकड के बाद A पर पहुँचता है, इस प्रकार $SA = \upsilon$. इतने समय में स्रोत υ_s. दूरी तय कर लेता है। अतः स्रोत से एक सेंकड में निकली कुल n तरंगें x स्थान $= \upsilon - \upsilon_s$. में समा जाती हैं। इस प्रकार तरंग की तरंग दैर्ध्य कम होकर λ हो जाती है।

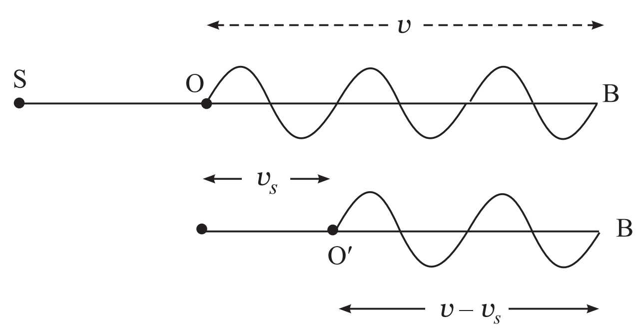
$$\lambda' = \frac{\upsilon - \upsilon_s}{n} \qquad \text{...(14.22)}$$



चित्र. 14.18 :स्रोत के गति करने पर तरंगों का संकुलन

अब हम श्रोता की गति के प्रभाव पर विचार करते हैं। एक विशेष तरंग जो किसी विशेष समय पर श्रोता (O) पर पहुँती है, एक सेकंड के बाद B पर पहुँच जायेगी। इस प्रकार $OB = \upsilon$. किंतु, इस बीच श्रोता O से O′ तक पहुँच गया है। अतः एक सेकंड में श्रोता से होकर केवल उतनी ही तरंगे जाती हैं जो स्थान $O'B$ में अवस्थित हैं। अतः श्रोता से होकर एक सेकंड में जाने वाली तरंगों की संख्या

$$n' = (\upsilon - \upsilon_0)/\lambda'$$



चित्र. 14.19 : गतिमान श्रोता द्वारा प्राप्त तरंगें

समीकरण (14.22) से λ' का मान रखने पर

$$n' = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{\upsilon - \upsilon_s} n \qquad (14.24)$$

जहाँ n' प्रेक्षित आवृत्ति है जब स्रोत व श्रोता दोनों गति में हैं और स्रोत, श्रोता की ओर गमन कर रहा है।

समीकरण 14.24 का उपयोग करते समय, ध्वनि का वेग स्रोत से श्रोता की दिशा में धनात्मक लिया जाता है। इसी प्रकार, υ_0 और υ_s को धनात्मक लिया जाता है यदि वे υ की दिशा में हों और ऋणात्मक लिया जाता है। यदि वे इसके विपरीत दिशा में हों।

डॉप्लर प्रभाव की उपयोगिता इस तथ्य से है कि यह प्रकाश व ध्वनि, दोनों तरंगों के लिए लागू होता है। विशेषत: इससे प्रसारी विश्व की धारणा को बल मिला है। निम्नलिखित उदाहरण से आपको डॉप्लर प्रभाव के इस अनुप्रयोग को समझने में सहायता मिलेगी।

उदाहरण 14.6 : किसी तारे से निकलने वाले प्रकाश का विश्लेषण करने पर किसी स्पेक्ट्रमी रेखा में स्पेक्ट्रम के लाल सिरे की ओर विस्थापन पाया जाता है। यदि यह विस्थापन जिसे रेड शिफ्ट कहते हैं 0.032 प्रतिशत हो तो तारे के पीछे हटने क वेग की गणना कीजिए।

हल : इसमें तरंगों का स्रोत तारा है। प्रेक्षक पृथ्वी पर विराम अवस्था में है। हम देख चुके हैं कि

$$\lambda' = \frac{\upsilon - \upsilon_s}{n}$$

किन्तु $n = \upsilon/\lambda$ अत:, λ'
$$= \frac{\upsilon - \upsilon_s}{\upsilon/\lambda}$$

$$= \lambda \frac{(\upsilon - \upsilon_s)}{\upsilon}$$

$$= \lambda \quad 1 - \frac{\upsilon_s}{\upsilon}$$

या

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = -\frac{\upsilon_s}{\upsilon}$$

या
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\upsilon_s}{\upsilon}$$

दिया है अत: हमें दिया गया है: $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0.032/100.$ और $\upsilon = c = 3 \times 10^8$ m s^{-1}, we get

$$\upsilon_s = \upsilon\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -(3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \times 0.032/100) = -9.6 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

ऋणात्मक चिन्ह प्रकट करता है कि तारा हमसे दूर जा रहा है। इससे खगोल भौतिकी विज्ञानियों ने यह परिणाम निकाला है कि विश्व का प्रसार हो रहा है।

पाठगत प्रश्न 14.8

1. किसी पनडुब्बी में लगा सोनार 40 kHz आवृत्ति पर काम करता है। शत्रु देश की एक पनडुब्बी इसकी ओर 100 ms^{-1}. की चाल से आ रही है। सोनार द्वारा परावर्तित ध्वनि की आवृत्ति ज्ञात कीजिए। पानी में ध्वनि का वेग 1450 m s^{-1}.लीजिए।

2. 200 Hz आवृत्ति की सीटी बाजाता हुआ एक इंजन 16 ms^{-1} के वेग से एक पहाड़ी की ओर गति कर रहा है, जिससे एक सुस्पष्ट प्रतिध्वनि सुनाई देती है। इंजन के ड्राइवर (चालक) द्वारा सुनी गई प्रतिध्वनि की आवृत्ति की गणना कीजिए। वायु में ध्वनि का वेग 340 m s^{-1} है।

प्रकाश की चाल-स्थिरता

अरस्तु का विश्वास था कि प्रकाश अनंत वेग से गमन करता है। सितम्बर 1876 में हालैंड के एक खगोलज्ञ रोमर ने पैरिस विज्ञान अकादमी की एक सभा में सूचित किया कि बृहस्पति के भीतरी उपग्रह इओ के ग्रहण कालों में विसंगति प्रकाश के परिमित वेग के कारण हो सकती है। फिजू, फोको, माइकल्सन आदि वैज्ञानिकों ने वायु में प्रकाश का वेग और अधिक परिशुद्ता से ज्ञात करने के लिए प्रयोग किए।

अलबर्ट आइन्स्टाइन ने 1905 में सापेक्षता क विशेष सिद्धांत पर जो लेख लिखे उनके तर्क दो अभिग्रहीतों पर आधारित थे। उनमें से एक यह था कि निर्वात में प्रकाश की चाल नियत है और इस पर प्रकाश की तरंग दैर्घ्य, स्रोत अथवा प्रेक्षक के वेग का कोई प्रभाव नहीं होता। 1983 में प्रकाश के वेग को एक सार्वत्रिक नियंताक घोषित किया गया और इसका मान 299792458 m s^{-1}.माना गया।

तथापि आस्ट्रेलिया के वैज्ञानिक बैरी सटरफील्ड और ट्रिवन नोरवाह ने पिछले 300 वर्षा में प्रकाश के निर्वात में वेग पर किए गए 16 प्रयोगों के आंकड़ों का अध्ययन किया। उनके अनुसार प्रकाश की निर्वात में चाल समय के साथ घटती जा रही है। यदि उनकी परिकल्पना की प्रयोगों द्वारा पुष्टि हो जाती है और यह लम्बे समय तक बनी रहती है, तो इससे संसार के बारे में हमारे विचारों में पूर्ण परिवर्तन हो जाएगा। जिन मुख्य क्षेत्रों में वृहत् परिवर्तन होंगे वह हैं- मैक्सवेल के नियम , परमाणु की संरचना, रेडियो एक्टिव क्षय, गुरुत्व, दिक्काल समय और द्रव्यमान की धारणाएं आदि।

आपने क्या सीखा

- तरंग गति में ऐसे दो निकटतम बिन्दुओं के बीच की दूरी को तरंग दैर्ध्य कहते हैं जो एक ही कला में हों।
- उस सरल आवर्त तरंग का समीकरण जो धनात्मक x–अक्ष के अनुदिश गमन करती है, $y = a \sin (\upsilon t - kx)$ है।
- प्रति एकांक क्षेत्रफल के लम्बवत् एक सेकंड में उत्सर्जित ऊर्जा को तीव्रता कहते हैं।
- यदि माध्यम के कणों के कम्पन तरंग के संचरण की दिशा के लम्बवत् हों तो तरंग को अनुप्रस्थ तरंग कहते हैं, किंतु यदि ये कम्पन संचरण की दिशा के अनुदिश ही हों, तो तरंग को अनुदैर्घ्य कहते हैं। अनुप्रस्थ व अनुदैर्घ्य तरंगो का वेग क्रमशः समीकरणों $\upsilon = \sqrt{T/m}$ और $\upsilon = \sqrt{E/\rho}$ द्वारा व्यक्त होता है।

- सघन माध्यम से परावर्तन के कारण कला में π. परिवर्तन हो जाता है। किंतु विरल माध्यम से परिवर्तन के कारण कला में परिवर्तन नहीं होता।
- दो तरंगों के अध्यारोपण से किसी बिन्दु पर परिणामी विस्थापन उस बिन्दु पर पृथक-पृथक विस्थापनों का सदिश योग होता है।
- एक ही सरल रेखा के अनुदिश एक ही दिशा में गतिमान, समान आवृत्तियों किन्तु पृथक कला की दो तरंगों के अध्यारोपण से ऊर्जा का पुन: वितरण हो जाता है जिससे व्यतिकरण पैटर्न बनते हैं।
- एक ही सरल रेखा के अनुदिश समान आवृति आयाम तथा चाल की दो विपरीत दिशाओं में चलती तरंगों के अध्यारोपण से अप्रगामी तरंगें बनती हैं। इस प्रकार की तरंगों में तरंग का रूप गति नहीं करता।
- प्रगामी तरंग में दो क्रमागत निष्पंदों या प्रस्पंदों के बीच की दूरी $\lambda/2$ होती है। अत: यह स्पष्ट है कि दो निष्पंदों के बीच में एक प्रस्पंद तथा दो प्रस्पदों के बीच में एक निस्पंद होता है।
- तीव्रता स्तर समीकरण $\beta = 10\log (I/I_0)$, जहाँ I_0 को 10^{-12} W m^{-2} मान लिया गया है। तीव्रता स्तर को डेसीबेल में नापते हैं।
- गुणता किसी स्तर का वह अभिलक्षण है जिसके कारण हम दो पृथक वाद्य यंत्रों की ध्वनियों को पहचान सकते है। भले ही उनकी तीव्रता व आवृत्तियाँ समान हों।
- विद्युत चुम्बकीय तरंगें की प्रकृति अनुप्रस्थ है और उन्हें संचरण के लिए किसी माध्यम की आवश्यकता नहीं होती।
- प्रकाश की तरंगे विद्युत चुम्बकीय तरंगे हैं जिनका परिसर 4000 Å – 7500 Å.होता है।
- विद्युत चुम्बकीय तरंगों की आवृत्ति माध्यम में परिवर्तन से परिवर्तित नहीं होती।
- विद्युत चुम्बकीय तरंगों का उपयोग बेतार रेडियो, संचार, टी.वी. प्रसारण, उपग्रह संचार आदि में होता है।

पाठांत अभ्यास

1. आप तरंग की परिभाषा सबसे सामान्य रूप में कैसे करेंगे?
2. एक उपयुक्त यांत्रिक मॉडल की सहायता से (i) अनुप्रस्थ तरंगों (ii) अनुदैर्ध्य तरंगों के संचरण की व्याख्या कीजिए। आवृत्ति तथा तरंग दैर्घ्य की परिभाषा लिखिए।
3. कोणीय आवृत्ति ω और संचरण नियंताक की परिभाषा लिखिए और इससे प्रदर्शित कीजिए कि तरंग संचरण का वेग, $\upsilon = \omega/k = n\lambda$ होता है।
4. किसी सरल आवर्त तरंग के लिए एक समीकरण प्राप्त कीजिए।
5. (i) अनुप्रस्थ (ii) अनुदैर्ध्य, तरंगों के संचरण के लिए माध्यम में क्या आवश्यक गुण होने चाहिए।

6. किसी तरंग की तीव्रता के लिए, उसके वेग, आयाम और आवृत्ति तथा माध्यम के घनत्व के संदर्भ में एक व्यंजक प्राप्त कीजिए।
7. किसी गैस में ध्वनि के वेग के लिए न्यूटन का सूत्र लिखिए और लाप्लास के संशोधन की व्याख्या कीजिए।
8. तरंगों में कब होता है (i) रचनात्मक व्यतिकरण (ii) विघटनात्मक व्यतिकरण?
9. त्रिकोणोमिति का उपयोग करते हुए प्रदर्शित कीजिए की समान कोणीय वेग ω समान तरंग दैर्ध्य λ किंतु पृथक आयाम a_1 और a_2 की दो सरल आवर्त तरंगों के अध्यारोपण से प्राप्त परिणामी तरंग का आयाम $A=\sqrt{a_2^2+a_2^2+2a_1a_2\cos\theta}$, जहाँ θ इन तरंगों के बीच कलान्तर है। A, का मान क्या होगा, $\theta=0$, (ii) $\theta=2\pi$, और (iii) $\theta=(2m+1)\pi$?
10. विस्पंद क्या हैं? ये कैसे बनते हैं? ग्राफीय विधि से व्याख्या कीजिए।
11. ग्राफीय विधि से अप्रगामी तरंगों के बनने की व्याख्या कीजिए। इन तरंगों को अप्रगामी क्यों कहते हैं? निष्पंद व प्रस्पंद की परिभाषा लिखिए।
12. प्रगामी तथा अप्रगामी तरंगों के तीन अंतर लिखिए।
13. किसी अप्रगामी तरंग के लिए समीकरण प्राप्त कीजिए, और प्रदर्शित कीजिए की विस्थापन निस्पंद, दाब प्रस्पंद तथा विस्थापन प्रस्पंद दाब निस्पंद होते हैं।
14. सुस्वर ध्वनियों के अभिलक्षण क्या हैं? व्याख्या कीजिए।
15. डेसीबेल (db) क्या है? श्रवण की देहली तथा संवेदन की देहली से क्या तात्पर्य है?
16. ध्वनि की गुणता से क्या समझते हैं? उदाहरण सहित व्याख्या कीजिये।
17. किसी ऑर्गन पाइप के संनादी स्वरों की व्याख्या कीजिए। प्रदर्शित कीजिये कि खुले पाइप में अधिक संनादी स्वर होते हैं।
18. प्रदर्शित कीजिए कि (i) खुले पाइप के मूलस्वरक की आवृत्ति, बन्द पाइप के मूलस्वरक की आवृत्ति को दुगुनी होती है। (ii) समान आवृत्ति के मूलस्वरक के लिये खुल पाइप की लम्बाई, बन्द पाइप से दोगुनी होनी चाहिए।
19. किसी ऑर्गन पाइप में निष्पंदों व प्रस्पंदों की उपस्थिति दिखाने के लिये एक प्रयोग का वर्णन कीजिए।
20. **ध्वनि** प्रदूषण के कारण, उसके हानिकारक प्रभावों की उपस्थिति दिखाने के लिये एक प्रयोग का वर्णन कीजिए।
21. डॉप्लर प्रभाव की व्याख्या कीजिए और आभासी आवृत्ति के लिये एक व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए। यदि ध्वनि संचरण का माध्यम भी गति में हो तो यह व्यंजक किस प्रकार रूपांरित हो जाएगा।
22. (i) तारों के पश्चसरण (recession) वेग के मापन (ii) रडार द्वारा शत्रु के विमानों के वेग के मापन, और (iii) सोनार द्वारा शत्रु की नावों के वेग के मापन, में डॉप्लर प्रभाव के उपयोग की विवेचन कीजिए।

23. (23) उस गैस में ध्वनि के वेग की गणना कीजिए जिसमें 1.00 m और 1.01 m तरंगदैर्घ्य की तरंगे 3 सेकंड में 10 विस्पंद उत्पन्न करती हैं।

24. उस बन्द पाइप की लम्बाई कितनी होगी जिसके निम्नतम स्वर की आवृत्ति 20^{o} C पर 256 Hz है? वायु में ध्वनि का वेग 0^{o}C पर 332 m s^{-1} है।

25. किसी ध्वनि स्रोत द्वारा उत्सर्जित ध्वनि की आवृत्ति 1Hz है। किसी श्रोता द्वारा सुनी गई ध्वनि की आवृत्ति की गणना कीजिये जब (a) स्रोत व श्रोता दोनों विराम अवस्था में हैं (b) स्रोत, 50 m s^{-1} के वेग से श्रोता की ओर गति कर रहा है। (c) स्रोत 50 m s^{-1} के वेग से श्रोता से दूर गति कर रहा है। वायु में ध्वनि का वेग 350 m s^{-1} है।

26. विद्युत चुम्बकीय तरंगों के उन लक्षणों को लिखिए जो उन्हें ध्वनि तरंगों से असदृश्य (भिन्न) बनाते हैं।

27. विद्युत चुम्बकीय तरंगों का वेग उनके संचरण के माध्यम की चुम्बकीशीलता (μ) तथा विद्युतशीलता (ε) पर किस प्रकार निर्भर करती है?

28. निम्नलिखित विद्युत चुम्बकीय तरंगों की तरंगदैर्घ्य परिसर कहाँ से कहाँ तक होता है?

    (i) रेडियो तरंगें (ii) सूक्ष्मतरंगें (iii) पराबैगनी तरंगें (iv) एक्स-किरणें।

29. एक्स-किरणें किस प्रकार उत्पन्न होती हैं?

30. क्या सभी आवृत्तियों की विद्युत चुम्बकीय तरंगे निर्वात् से होकर जा सकती हैं?

31. रिक्त स्थान भरिये:

    (i) परिवर्ती विद्युत क्षेत्र अपने आसपास के क्षेत्र में ______________ उत्पन्न करता है।

    (ii) ____________ हमारी आँखों के लिये एक्स-किरणों से अधिक हानिकारक होती हैं।

    (iii) ___________ कोबल्ट के रेडियो एक्टिव नाभिकों से उत्सर्जित होती हैं।

    (iv) अवरक्त किरणें में ________________ से कम ऊर्जा होती है।

    (v) Z- दिशा में संचरित विद्युत चुम्बकीय तरंग में यदि E क्षेत्र X-Z तल में दोलन करें तो B-क्षेत्र ________________ तल में दोलन करेगा।

    (vi) मुक्त **दिक्स्थान** में विद्युत चुम्बकीय तरंगों के लिये अनुपात $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}}$ को _______________ कहते हैं।

    (vii) F-M बैंड का परिसर _________________ है।

    (viii) T.V. (टी.वी.) प्रसारण मे ____________ सिग्नल का आवत्ति माडुलन होता है।

पाठगत प्रश्नों के उत्तर

14.1

1. 14.1.4. खंड को देखिए
2. यदि पथान्तर p हो तो कलान्तर $\theta = \frac{2\pi}{\lambda} p$.
3. ϕ

14.2

1. न्यूटन ने माना था कि ध्वनि तरंगों द्वारा उत्पन्न संपीडन व विरलन, समतापीय अवस्था में होते हैं।
3. न्यूटन ने ध्वनि संचरण में रूद्धोष्म अवस्थाओं के स्थान पर समतापीय अवस्था की कल्पना की थी।
4. 357^0C.
5. $v = \sqrt{\frac{T}{m}}$
6. अत: $n = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{T}{m}}$

सर्वाधिक सरल कम्पन की दशा में डोरी के दोनों सिरों पर निस्पंद तथा बीच में प्रस्पंद कहते बनते हैं, अत: $l = l/2$ या $\lambda = 2l$, अत: $n = \lambda/2l \sqrt{\frac{T}{m}}$. यदि डोरी p भागों में कम्पन करे तो $\lambda = p\, l/2$ or $\lambda = 2l/p$. तब $n = (p/2l) \sqrt{\frac{T}{m}}$.

14.3

सभी प्रश्नों के उत्तरों के लिये पुस्तक देखिए

14.4

1. 25/9.
2. 4 विस्पंद प्रति सेकंड उत्पन्न होंगे।
3. विस्पंदों की आवृत्ति Δv है।
4. 517, मोम लगाने पर A की आवृत्ति 517 से 507Hz हो जाती है।

14.5

1. नहीं। किसी खंड में ऊर्जा आगे-पीछे दोलन करती है।
2. दो लगातार निस्पंदों के बीच की दूरी $\lambda/2$, और एक निस्पंद व प्रस्पंद के बीच की दूरी $\lambda/4$ है।
4. (i) 1m, (ii) 1m, (iii) 1/4m.

14.6

1. आवृत्ति बढ़ने से तारत्व भी बढ़ता है।
2. गुणता
3. गुणता
4. खुला पाइप
5. (i) बन्द पाइप के मूल स्वरक के लिये $l = \lambda/4$ or $\lambda = 4l$, अत: $n = \upsilon/\lambda = \upsilon/4l$.

   (ii) खुले पाइप के लिये $\ell = \lambda/2$. अत: $n' = \upsilon/2l$.

(i) और (ii) दोनों की तुलना करने पर $n' = 2n$

6. $n = \dfrac{\upsilon}{2\ell}$ क्योंकि ताप बढ़ने पर υ बढ़ता है n भी बढ़ता है।

14.7

(*i*) माइक्रो तरंगे (सूक्ष्म तरंगे)

(*ii*) पीला-हरा ($\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m)

(*iii*) सूर्य

(*iv*) एक्स-किरणों

(*v*) थर्मोपाइल (ताप वैद्युत पुंज)

2. (*i*) पराबैगनी

   (ii) गामा-किरणें
3. सूक्ष्म तरंगें
4. ओजोन
5. एक दूसरे के लम्बवत्

14.8

1. $n' = n\,\dfrac{c - \upsilon_0}{c} = 40 \times 10^3 \times \dfrac{1450 - 100}{1450}$

$$= 40 \times \frac{135}{145} \times 10 = 37.2 \text{ kHz.}$$

टिप्पणियाँ

2. $n' = 200 \times \dfrac{340+16}{340-16}$

$= 200 \times \dfrac{356}{224} = 220$ Hz.

पाठ्गत प्रश्नों के उत्तर

23. 337 m s^{-1}
24. 30 cm.
25. (*a*) 1 kHz
    (*b*) 857 Hz
    (*c*) 1143 Hz.

उच्चतर माध्यमिक पाठ्यक्रम
भौतिकी
विद्यार्थी मूल्यांकन पत्र-4

अधिकतम अंक : 50 **समय : $1\frac{1}{2}$ घंटा**

निर्देश

- सभी प्रश्नों के उत्तर कागज की पृथक शीट पर दीजिए।
- अपनी उत्तर पुस्तिका पर निम्नलिखित सूचनाएं दीजिए
  - नाम
  - पंजीयन संख्या
  - विषय
  - मूल्यांकन पत्र संख्या
  - पता
- अपने मूल्यांकन पत्र का मूल्यांकन अपने अध्ययन केन्द्र के विषयाध्यापक से करायें ताकि आपको उनसे अपने कार्य के संबंध में धनात्मक प्रतिक्रिया प्राप्त हो सके।

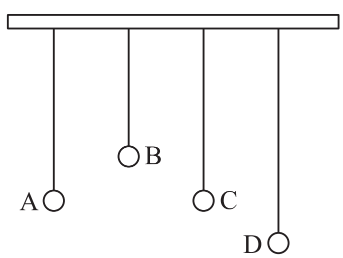
अपना मूल्यांकन पत्र NIOS को न भेजें

1. निम्नलिखित में कौन सा समीकरण सरल आवर्ती गति निर्दिष्ट करता है: (1)

   (*a*) $y = 1 + \omega t$.

   (*b*) $y = \sin.\omega t + \cos.\omega t$.

   (*c*) $y = \sin.\omega t + \cos \omega t$.



2. चार सरल लोलक A, B, C एवं D एक ही आधार से लटकाए गए हैं। यदि इनमें से किसी एक को दोलन कराया जाएं तो सभी चार लोलक दोलन करने लगते हैं। इनमें से कौन से दो लोलक एक ही आवृत्ति से दोलन करेंगे और क्यों?

3. कोई द्रव्यमान m जब k बल नियतांक के स्प्रिंग पर दोलन करता है तो इसकी आवृत्ति v होती है। इस स्प्रिंग को दो सर्वसम भागों में काटा गया और वहीं द्रव्यमान आधे स्प्रिंग पर लटका कर फिर दोलन कराया गया। अब इसकी नई आवृत्ति क्या होगी? (1)

4. एक ऐसी गति का उदाहरण दें जो आवर्ती तो हों पर दोलनी न हो? (1)

5. दाब परिवर्तन के साथ वायु में ध्वनि के वेग में होने वाले परिवर्तन का ग्राफ बनाईए। (1)

6. जब ध्वनि वायु से जल में प्रवेश करती है तो क्या उसके गमन-पथ में कोई विचलन आता है। समझाईए। (1)

7. जब किसी डोरी पर चलता हुआ कोई अनुप्रस्थ तरंग स्पंद डोरी के स्थिर सिरे पर पहुँचता है तो क्या होता है? (1)

8. जब कोई विद्युत चुम्बकीय तरंग निर्वात से किसी द्रव्यात्मक माध्यम में प्रवेश करती है तो इसकी चाल पर क्या प्रभाव पड़ता है? (1)

9. समीकरण $x = 3 \sin \left(2\pi r + \frac{\pi}{4}\right)$ द्वारा निर्दिष्ट निर्देटश वृत्त बनाइए। इस पर कण की प्रारंभिक स्थिति, वृत्त की त्रिज्या एवं परिक्रमण करते कण की कोणीय चाल संसूचित कीजिए। सुविधा के लिए परिक्रमण की दिशा आप दक्षिणावर्त ले सकते हैं। दिए गए व्यंजक में x का मान cm में एवं t सेकंड में है। (2)

10. दो तरंगें जिनकी तीव्रताएं 1 : 9, के अनुपात में है अध्यारोपण कर पर्दे पर व्यतिकरण पैटर्न बनाती हैं। इस व्यतिकरण पैटर्न में अधिकतम एवं न्यूनतम तीव्रताओं का अनुपात ज्ञात कीजिए। (2)

11. दो स्वत्रि द्विभुजों A एवं B में प्रत्येक पर 480 *hz* अंकित है। जब उनको एक साथ ध्वनित कराया जाता है तो प्रति सेकंड 5 विस्पंद उत्पन्न होते हैं। स्वरित्र द्विभुजों पर अंकित आवृत्तियों के विषय में आप क्या कह सकते हैं। अनुपात v_A/v_B आप कैसे ज्ञात करेंगे? (2)

12. (a) वायुमान चालन में प्रयुकत राडारों में प्रयोग की जाने वाली विद्युत चुंबकीय तरंगों का नाम लिखिए।

    (b) वायुमण्डल में कौन सी गैस पराबैंगनी (u-v) तरंगों को अवशोषित करती है। (2)

13. वायु में ध्वनि के वेग का लाप्लास-सूत्र लिखिए। इस सूत्र का उपयोग करके समझाइए कि वायु में ध्वनि का वेग (*a*) तापवृद्धि से (*b*) आर्द्रता वृद्धि से क्यों बढ़ जाता है। (4)

14. किसी डोरी में अनुप्रस्थ आवर्ती तरंग को हम निम्नलिखित समीकरण द्वारा व्यक्त कर सकते हैं-

$$y(x_1 t) = 3.0 \sin(36t + 0.018x)$$

    (*i*) इस तरंग के लिए कणों के वेग का आयाम (*ii*) तरंग-वेग ज्ञात कीजिए। (4)

15. एक चमगादड़ वायु में 10^3 KHz आवृत्ति की परा ध्वनि तरंगे उत्पन्न अपवर्तित करता है। यदि ये तरंगे जल की सतह से टकराये तो ध्वनि एवं परावर्तित ध्वनि की तरंग दैर्ध्यों का अंतर ज्ञात कीजिए। (ध्वनि का वेग वायु में 350 ms^{-1} एवं जल में 1500 ms^{-1}है।) (4)

16. दो दृढ़ आधारों के बीच कसा हुआ एक तार 50 Hz. के मूलस्वर के कम्पन करता है। तार का द्रव्यमान 3.5×10^{-2} *kg* एवं इसका रैखिक घनत्व 4.0×10^{-2} $kg\ m^{-1}$ है। (a) इस तार पर गमन करने वाली अनुप्रस्थ तरंग का वेग (b) तार में तनाव कितना है?

17. 20 *cm* लम्बाई का एक पाइप एक सिरे पर बंद है। 430 Hz के स्रोत से इस पाइप में कौन सा संनादी स्वर अनुनादित होगा? क्या यह स्रोत दोनों सिरों पर खुले पाइप के साथ भी अनुनादित होगा?

18. समझाईए कि क्यों

    (*i*) ठोस अनुप्रस्थ एवं अनुदैर्ध्य दोनों प्रकार की तरंगों को गमन करने देते है जबकि गैसों में केवल अनुदैर्ध्य तरंगे ही गमन कर पाती हैं?

    (*ii*) किसी विक्षेपक माध्यम में गमन करते समय एक स्पंद का रूप विकृत हो जाता है।

(*iii*) एक अप्रगामी ध्वनि तरंग में विस्थापन-निस्पंद दाब-प्रस्पंद होता है एवं दाब निस्पंद विस्थापन प्रस्पंद।

(*iv*) वायलिन एवं सितार पर एक ही स्वर उत्पन्न किया जाए तो इसकी आवृत्ति समान होती है फिर भी हम इन्हें अलग-अलग पहचान सकते हैं।

19. (*i*) तारों का अपगमन वेग (*ii*) सोनार (SONAR.) द्वारा शत्रु-नौका का आगमन वेग मापने के लिए डॉप्लर प्रभाव के अनुप्रयोग की विवेचना कीजिए। (5)

20. 1.5 मीटर लम्बाई एवं 0.03 कि.ग्रा. द्रव्यमान की दोनों सिरों पर कसी हुई एक डोरी के अनुप्रस्थ दोलनों का विस्थापन व्यक्तकरने के लिए समीकरण हैं (5)

$$y = 0.068m \ \frac{2\pi x}{3} \ \cos(120\pi t)$$

जहां x एवं y m में एवं t सेकंड में है

(*i*) यह प्रगामी तरंग को निर्दिष्ट करती है या अप्रगामी तरंग को

(*ii*) इस तरंग की व्याख्या दो तरंगों के अध्यारोपण के रूप में कीजिए।

(*iii*) प्रत्येक अध्यारोपक तरंग की आवृत्ति, तरंग दैर्ध्य एवं चाल ज्ञात कीजिए।

प्रतिपुष्टि प्रपत्र को आज ही भरें तथा डाक से भेजें

पाठों के विषय में प्रतिपुष्टि (Feed back on Lessons)

पाठ संख्या	पाठ का नाम	विषय वस्तु			भाषा		उदाहरण		आपने क्या सीखा	
		कठिन	रोचक	भ्रामक	सरल	जटिल	उपयोगी	उपयोगी नहीं	अत्यंत सहायक	सहायक नहीं
1.										
2.										
3.										
4.										
5.										
6.										
7.										
8.										
9.										
10.										
11.										
12.										
13.										
14.										

अन्तिम मोड़

चौथा मोड़

तीसरा मोड़

प्रिय शिक्षार्थियो

अपनी पाठ्य पुस्तकों को पढ़कर आपको अच्छा लगा होगा। पाठ्य सामग्री को प्रासंगिक तथा रूचिकर बनाने के लिये हमने भरसक प्रयास किया है। विषय सामग्री को बनाना एक दो तरुा प्रक्रिया है। आपकी प्रतिपुष्टि विषय सामग्री को सुधारने में हमारी सहायता करेगी। अपने समय में से कुछ मिनट अवश्य निकाले तथा प्रतिपुष्टि प्रपत्र को भरे ताकि एक रूचिकर तथा उपयोगी विषय सामग्री का निर्माण किया जा सके।

धन्यवाद

समन्वयकर्ता

(भौतिकी)

प्रश्नों के विषय में प्रतिपुष्टि (Feed back on Questions)

पाठ संख्या	पाठ का नाम	पाठगत प्रश्न		पाठान्त प्रश्न		
		उपयोगी	उपयोगी नहीं	सरल	कठिन	अत्यंत कठिन
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						
8.						
9.						
10.						
11.						
12.						
13.						
14.						

दूसरा मोड़

आपके सुझाव

____
____
____
____

क्या आपने भौतिकी के अधययन के लिये कोई अन्य पुस्तक पढ़ी है?   हाँ/नहीं

यदि हाँ तो उसे पढ़ने का कारण दें।

____
____

नाम : ______________________

नामांकन संख्या : ______________

पता : ______________________

____

विषय : ______________________

पुस्तक संख्या : ______________

डाक टिकट

सहायक निदेशक (शैक्षिक)
राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान
ए - 24-25, इंस्टीट्यूशनल एरिया
सेक्टर - 62 नोएडा (यू.पी.)

किसी अनुलग्नक की अनुमति नहीं